



REDE AMAZÔNICA DE EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA - REAMEC
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA - PPGECEM
POLO ACADÊMICO: UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS - UEA

OSMILCY LIMA FEITOSA

PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA NO ENSINO DAS RELAÇÕES
TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO

BOA VISTA – RR
2026



OSMILCY LIMA FEITOSA

**PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA NO ENSINO DAS RELAÇÕES
TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO**

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática – PPGECEM da Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática – REAMEC vinculado a Universidade do Estado do Amazonas – UEA como requisito parcial para obtenção do título de doutor em Educação em Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Itamar Miranda da Silva

**BOA VISTA – RR
2026**



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site
<https://edoc.amazonas.am.gov.br/8D0B.2CA3.169E.DC6B/9813F31D>
Código verificador: **8D0B.2CA3.169E.DC6B** CRC: **9813F31D**

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a). **Sistema Integrado de Bibliotecas da Universidade do Estado do Amazonas.**

F311p

Feitosa, Osmilcy Lima

PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA NO ENSINO DAS
RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO / Osmilcy

Lima Feitosa. Manaus: [s.n], 2026. 170

f.: color.; 21.0 cm.

Tese - Doutorado em Educação em Ciências e Matemática da Rede
Amazônica de Educação em Ciências e Matemática- Universidade do
Estado do Amazonas, Manaus, 2026.

Inclui Bibliografia.

Inclui Anexo.

Orientador: Itamar Miranda da Silva.

1. Percurso de Estudo e Pesquisa. 2. Teoria Antropológica do Didático.
3. Ensino da Trigonometria. 4. Praxeologias.

I. Itamar Miranda da Silva (Orient.) II. Universidade do Estado do
Amazonas. III. Título

CDU(1997)502:51(043.2)



AGRADECIMENTOS

A Deus, pelo dom da vida, pela oportunidade que foi aberta para cursar essa pós-graduação e pelo sustento e coragem para enfrentar todos os desafios que surgiram ao longo dessa caminhada.

Aos meus pais, pelo amor e incentivo, desde cedo, onde não mediram esforços para que eu tivesse acesso ao conhecimento, sempre mostrando que o estudo é o caminho para o sucesso. Incentivos esses que me fizeram crescer e progredir na vida acadêmica.

A todos os meus familiares, pelo incentivo e força em todos os momentos.

A minha esposa, Larissa Gardênia, pelo amor e compreensão durante todos os momentos de ausência e dedicação. Pelas orações a mim atribuídas nesses percursos e por todos os incentivos a mim destinados, se alegrando comigo em cada nova etapa dessa conquista.

Aos meus filhos, por compreender a minha ausência durante esses quatro anos de curso, e por vezes decidiram renunciar a momentos em família para que eu pudesse concluir essa etapa.

Ao meu orientador, o Professor Doutor Itamar Miranda da Silva, por ter acreditado em mim, me estendido a mão e oportunizado o enveredar pelos caminhos da pós-graduação, partilhando seus conhecimentos e dedicando tempo e paciência para meu crescimento acadêmico.

Aos Professores Doutores Josefina Barrera Kalhil, Héctor José Garcia Mendonza, Luiz Márcio Santos Farias, José Messildo Viana Nunes por aceitarem o convite para participação na banca de qualificação, e ainda Josefina Barrera Kalhil, Luiz Márcio Santos Farias, Gladys Denise Wielewski e José Carlos de Souza Pereira que participaram da banca defesa, contribuindo de forma significativa para o aprimoramento do trabalho.

Aos Professores do Programa REAMEC, pela dedicação nas aulas ministradas e pelas orientações e incentivos a cada nova fase dessa pesquisa, contribuições essas que foram fundamentais para a construção desse trabalho.

A todos os meus colegas de turma pelo estímulo nos momentos de angústia, pela ajuda e incentivo a cada nova etapa e pelo viver e compartilhar das mesmas experiências e pelas contribuições realizadas.

O meu muito obrigado a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a construção dessa pesquisa e pela realização de mais esse desafio em minha vida profissional e acadêmica.



RESUMO

Esta tese investiga de que maneira o Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP) mobiliza as praxeologias de professores que ensinam matemática no contexto do ensino das relações trigonométricas no triângulo. Fundamentada na Teoria Antropológica do Didático, a pesquisa toma como referência a modelização praxeológica do saber matemático e a análise das condições institucionais que incidem sobre as práticas docentes. O problema de pesquisa consiste em compreender como a implementação de um PEP pode tensionar, mobilizar e eventualmente reconfigurar as organizações praxeológicas associadas ao ensino da trigonometria. Para tanto, constrói-se um Modelo Epistemológico de Referência e um Modelo Praxeológico de Referência, que orientam a elaboração e implementação do percurso junto a professores participantes. Metodologicamente, a investigação organiza-se em análise preliminar, planejamento a priori, experimentação e análise a posteriori, considerando elementos como sistema didático, variáveis didáticas e meio. A coleta de dados ocorreu durante a implementação do PEP, sendo analisadas as produções dos participantes, as discussões coletivas e os registros das atividades desenvolvidas. Os resultados indicam que o PEP constitui um dispositivo capaz de provocar deslocamentos nas praxeologias docentes, ao promover a problematização do saber e a explicitação das dimensões tecnológicas e teóricas subjacentes às técnicas mobilizadas. Observa-se, contudo, que tais mobilizações são condicionadas por restrições institucionais e paradigmáticas que limitam a consolidação de mudanças mais estruturais. Conclui-se que o PEP se apresenta como um instrumento potente para a formação e o desenvolvimento profissional docente, na medida em que favorece a transição de práticas centradas na aplicação técnica para abordagens fundamentadas na investigação e na construção coletiva do saber, contribuindo para a ampliação das possibilidades didáticas no ensino da trigonometria.

Palavras-chave: Teoria Antropológica do Didático; Percurso de Estudo e Pesquisa; Praxeologia; Ensino de Trigonometria; Formação de Professores.



ABSTRACT

This thesis investigates how the Study and Research Course (SRC) mobilizes the praxeologies of teachers who teach mathematics in the context of teaching trigonometric relations in triangles. Grounded in the Anthropological Theory of Didactics, the research takes as its reference the praxeological modeling of mathematical knowledge and the analysis of the institutional conditions that affect teaching practices. The research problem consists of understanding how the implementation of an SRC can challenge, mobilize, and eventually reconfigure the praxeological organizations associated with the teaching of trigonometry. To this end, an Epistemological Reference Model and a Praxeological Reference Model were developed, which guide the elaboration and implementation of the course with the participating teachers. Methodologically, the investigation is organized into preliminary analysis, a priori planning, experimentation, and a posteriori analysis, considering elements such as the didactic system, didactic variables, and environment. Data collection occurred during the implementation of the SRC, verifying the participants' productions, collective discussions, and records of the activities carried out. The results indicate that the PEP (Project-Based Learning) constitutes a device capable of provoking shifts in teaching practices, by promoting the problematization of knowledge and the explication of the technological and theoretical dimensions underlying the techniques mobilized. However, it is observed that such mobilizations are conditioned by institutional and paradigmatic restrictions that limit the consolidation of more structural changes. It is concluded that the PEP presents itself as a powerful instrument for teacher training and professional development, insofar as it favors the transition from practices centered on technical application to approaches based on research and the collective construction of knowledge, contributing to the expansion of didactic possibilities in the teaching of trigonometry.

Keywords: Anthropological Theory of Didactics; Project-Based Learning; Praxeology; Trigonometry Teaching; Teacher Training.



LISTA DE FIGURAS

Figura 1- Teorema de Média Geométrica.....	51
Figura 2- Escala de codeterminação didática	59
Figura 3- mapa conceitual em forma hierarquizada	74
Figura 4- Mirante Edileuza Lóz.....	76
Figura 5- Habilidades e competências encontradas no livro didático.....	90
Figura 6-Competências encontradas no livro didático	90
Figura 7- Habilidades encontradas no livro didático.....	91
Figura 8- tarefa proposta pelo livro didático	91
Figura 9-tarefa proposta pelo livro didático	92
Figura 10- Grupo 01 construindo o teodolito	105
Figura 11-Grupo 02 construindo o teodolito	106
Figura 12-Grupo 03 construindo o teodolito	106
Figura 13-teodolito construído pelos alunos.....	107
Figura 14-torre de telecomunicações que foi medida pelos alunos.....	108
Figura 15-Grupo 02 operando o teodolito.....	109
Figura 16-Grupo 02 realizando as medições	110
Figura 17-Ficha de coleta de dados.....	110
Figura 18- aluno 01 realizando a lista de tarefas	112
Figura 19-aluno 02 realizando a lista de tarefas	113
Figura 20-aluno 03 realizando a lista de tarefas	114
Figura 21-enunciado da tarefa proposta.....	120
Figura 22-resposta do grupo A a tarefa proposta	120
Figura 23- resposta do grupo B a tarefa proposta	121
Figura 24- posta do grupo C a tarefa proposta	121
Figura 25- resposta do grupo D a tarefa proposta.....	122
Figura 26-segunda tarefa proposta aos alunos	122
Figura 27-resposta do grupo A a segunda tarefa proposta	123
Figura 28-: resposta do grupo B a segunda tarefa proposta	123
Figura 29-resposta do grupo C a segunda tarefa proposta	123
Figura 30-resposta do grupo C a segunda tarefa proposta	124
Figura 31-terceira tarefa proposta aos alunos	125
Figura 32-resposta do grupo A a terceira tarefa proposta	125
Figura 33-resposta do grupo B a terceira tarefa proposta	126
Figura 34-resposta do grupo C a terceira tarefa proposta	126
Figura 35-resposta do grupo D a terceira tarefa proposta	126
Figura 36-quarta tarefa proposta para os alunos.....	127
Figura 37-resposta do grupo A a quarta tarefa proposta	128
Figura 38-resposta do grupo B a quarta tarefa proposta	128
Figura 39-resposta apresentada pelo grupo C a quarta tarefa	129
Figura 40-resposta apresentada pelo grupo D a quarta tarefa	129
Figura 41-tarefa 01 apresentada no momento 04	130
Figura 42-resposta apresentada pelo grupo B a tarefa 01 do momento 04	131
Figura 43-resposta apresentada pelo grupo C a tarefa 01 do momento 04	131
Figura 44-resposta apresentada pelo grupo D a tarefa 01 do momento 04	132
Figura 45-tarefa 02 apresentada durante o momento 04	132
Figura 46-grupo de alunos construindo o teodolito	134
Figura 47-teodolito construído pelos alunos.....	134
Figura 48-grupo de alunos utilizando o teodolito construído	135



SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	10
1 CONSTRUÇÃO DA PESQUISA	17
1.1 TRAJETÓRIA DO PESQUISADOR E ESCOLHA DO OBJETO DE PESQUISA	17
1.2 PROBLEMA DA PESQUISA	20
1.3 AFIRMATIVA DE TESE.....	20
1.4 OBJETIVOS	20
1.4.1 Objetivo Geral.....	20
1.4.2 Objetivos Específicos	21
1.5 REFERENCIAL TEÓRICO	21
1.6 METODOLOGIA.....	27
1.7 CONTEXTO DA PESQUISA	29
2 O CONTEXTO DAS RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS AO LONGO DA HISTÓRIA.....	35
2.1 CONTEXTO HISTÓRICO.....	35
2.2 CONTEXTO EPISTEMOLÓGICO	37
3 ALGUNS ELEMENTOS DA TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO – TAD	43
3.1 INTRODUÇÃO A TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO	43
3.2 OS PARADIGMAS E SUAS TRANSIÇÕES	46
3.2.1 Paradigma de visita as obras	47
3.2.2 Paradigma de questionamento do mundo	49
3.2.3 O paradigma de questionamento do mundo e as organizações didáticas	53
3.3 OS MODELOS PRAXEOLÓGICOS DE REFERÊNCIA	56
3.3.1 Modelos praxeológicos de referência na TAD	60
3.4 O PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA - PEP.....	61
3.5 PRAXEOLOGIAS MATEMÁTICAS DE UM PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA	70
4 A CONSTRUÇÃO DO PEP PARA O ENSINO DA TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO.....	75
4.1 DESENVOLVIMENTO DO PEP E COLETA DE DADOS	79
4.1.1 O PEP com os professores	79
4.1.2 O PEP com os alunos	96



4.2	ANÁLISE DOS DADOS COLETADOS	114
4.2.1	Momento 01.....	116
4.2.2	Momento 02.....	118
4.2.3	Momento 03.....	119
4.2.4	Momento 04.....	130
4.2.5	Momento 05.....	133
4.2.6	Momento 06.....	135
4.2.7	Momento 07.....	136
5	CONCLUSÃO	140
6	REFERÊNCIAS.....	143
7	ANEXOS	150
7.1	PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP	150
7.2	REGISTRO DE CONSENTIMENTO DO PROFESSOR 1	154
7.3	REGISTRO DE CONSENTIMENTO DO PROFESSOR 2.....	157
7.4	QUESTIONÁRIO DO PROFESSOR 1	159
7.5	QUESTIONÁRIO DO PROFESSOR 2	162
7.6	TERMO DE ANUÊNCIA	165
7.7	LISTA DE TAREFAS	167



INTRODUÇÃO

Muito tem se discutido, sobre a relação da matemática escolar¹ com cotidiano e suas aplicações de forma mais significativa na vida do aluno. Perguntas como: “*Quem inventou a matemática?*” ou “*Pra que serve a matemática?*” tem se mostrado cada vez mais recorrente nas escolas durante as aulas de matemática. De acordo com Silveira:

Certamente a maior parte dos professores de matemática, principalmente do ensino fundamental, já ouviu a pergunta (ainda que retórica): “quem inventou a matemática?”. Mesmo no meio acadêmico matemático, muitos professores não têm resposta para essa questão e vários deles nunca refletiram sobre os fundamentos da disciplina que lecionam. (Silveira 2021, p.33)

Nesse contexto, podemos relacionar o ensino da matemática escolar em dois grandes pilares: o conhecimento matemático e o saber matemático. Enquanto o saber está relacionado ao plano histórico de uma produção de área disciplinar, o conhecimento é considerado mais próximo do fenômeno da cognição. Quando falamos de saber matemático estamos nos referindo a uma ciência, a uma prática específica que tem suas teorias estruturadas em um contexto próprio. Para Brousseau:

Os saberes são os meios sociais e culturais de identificação, organização, validação e emprego dos conhecimentos. A noção de conhecimento e saber não tem as mesmas propriedades, nem como meio de investigação nem como possibilidade de expressões, nem como instrumento de convicção ou como argumento e não é aprendida da mesma maneira. (Brousseau 1997, p. 9)

De acordo com Pais (2019), o saber matemático está relacionado a uma ciência que tem suas teorias estruturadas em um contexto próprio, já o conhecimento matemático refere-se mais a dimensão individual e subjetiva, ou seja, está mais presente ao caráter experimental e pragmático do que o aspecto teórico e racional. PAIS explica:

Por exemplo, o conhecimento do conceito de cubo é formado por um conjunto de imagens mentais e de informações, sobre o qual o sujeito exerce um relativo domínio, mas isso que permanece no plano intelectual não pode ser identificado com o aspecto universal do conceito geométrico correspondente.

¹ o termo matemática escolar refere-se a uma prática particular de se relacionar com saber matemática vivido em outras práticas, como a acadêmica e tantas outras. A matemática escolar é aquela em que exige uma transposição do saber sábio ao saber a ser ensinado conforme Chevallard(1998).



Por maior que seja o domínio cognitivo sobre o conceito, não é possível identificar o conceito com sua representação mental. (Pais 2019, p. 38)

Por outro lado, a Base Nacional Comum Curricular – BNCC tem orientado que o ensino da matemática escolar deve ser pautado em habilidades e competências específicas para cada nível de ensino. No âmbito da matemática escolar, os alunos precisam levantar hipótese e argumentar sobre elas, usando estratégias e procedimentos matemáticos adequados. De acordo com a BNCC (Brasil, 2018), o aluno precisa:

Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente (Brasil, 2018, p. 531).

Sendo assim, com o passar dos anos muitas pesquisas com enfoque no ensino e na aprendizagem em matemática tem se debruçado em problemáticas diversas e, boa parte delas buscam desenvolver novas metodologias de ensino que favoreçam a aprendizagem dos alunos e produzam novos conhecimentos e, que tragam impacto significativo no processo de ensino.

Contudo, de acordo com Moreira (2004) esse conhecimento ainda não atingiu de forma significativa seus objetivos esperados, que é influenciar de forma mais abrangente as metodologias de ensino desenvolvidas em sala de aula. Para Moreira (2004, p. 131): "[...] esse corpo de conhecimentos não teve ainda impacto significativo no sistema escolar, em particular na sala de aula, o que coloca, de forma evidente, a necessidade de ações que revertam este quadro."

Em paralelo ao exposto anteriormente, a experiência na docência do ensino da matemática na Educação Básica nos faz com que venha à tona a reflexão sobre as condições e restrições da difusão social das praxeologias matemáticas conforme Chevallard (1999) e, em particular, porque as relações trigonométricas no triângulo é uma parte do currículo em que os alunos apresentam muitas dificuldades. Por outro lado, o ensino da matemática escolar deve estimular o aluno a problematizá-la com esse mundo. Então, há necessidade de fazer o enfrentamento na direção de melhorar a relação tanto do professor quanto do aluno com esse tal saber.



O ensino da matemática na Educação Básica tem sido cada vez mais complexo diante das novas tecnologias e de um mundo que busca respostas cada vez mais imediata, onde em frações de segundos se consegue informações de qualquer natureza. No contexto escolar isso se torna mais recorrente, uma vez que, os alunos não conseguem se concentrar nas aulas, visto que, na maioria das vezes, as aulas são desenvolvidas de forma explicativa, expositiva e com poucos fundamentos que prendam a atenção do aluno e fomentem seu interesse para a aprendizagem em matemática. De acordo com Borba (2019):

Alguns professores procuram caminhar numa *zona de conforto* onde quase tudo é conhecido, previsível e controlável. Conforto aqui está sendo utilizado no sentido de pouco movimento. Mesmo insatisfeitos, e em geral os professores se sentem assim, eles não se movimentam em direção a um território desconhecido. Muitos reconhecem que a forma como estão atuando não favorece a aprendizagem dos alunos e possuem um discurso que indica que gostariam que fosse diferente. Porém, no nível de sua prática, não conseguem se movimentar para mudar aquilo que não os agrada. Acabam cristalizando sua prática numa zona dessa natureza e nunca buscam caminhos que podem gerar a incerteza e imprevisibilidade. Esses professores nunca avançam para o que chamamos de uma zona de risco, na qual é preciso avaliar constantemente as consequências das ações propostas. (Borba 2019, p. 56)

Nessa direção, se busca respostas e/ou condições voltadas para o desenvolvimento de habilidades e competências no âmbito da matemática, competências essas já exploradas pela Base Nacional Curricular Comum. Segundo a BNCC (Brasil, 2018), ao longo da Educação Básica, as aprendizagens essenciais por ela definidas devem concorrer para assegurar aos estudantes o desenvolvimento de dez competências gerais, que consubstanciam, no âmbito pedagógico, os direitos de aprendizagem e desenvolvimento.

Diante desse contexto surgiu a ideia de compreender de forma mais ampla, o ensino da trigonometria desenvolvido nas escolas públicas da cidade de Boa Vista, e assim, identificar as condições e restrições impostas sobre a relação trigonométrica e aplicá-las em situações do mundo. Corroborando com essa perspectiva Fonseca, Bosch e Gascón (2007), nos ensina que os conceitos matemáticos são estudados e abordados de maneira geral, de uma única maneira, de forma pontual e sem muita articulação com outras áreas do conhecimento. Segundo eles, essa forma de abordar o ensino da matemática traz essa dificuldade de estabelecer uma relação mais reflexiva nos diferentes níveis de ensino.



Com isso, estudar a matemática com seus teoremas e conceitos, de maneira questionadora parece desafiar a intelectualidade tanto do professor, quanto do aluno, o que de certa forma desperta seu interesse e favorece o aprendizado. Porém, estudos tem demonstrado que os professores que ensinam matemática apresentam dificuldades em compreender os fundamentos teóricos e tecnológicos da matemática escolar e sua importância na realidade cotidiana, ou seja, compreender as limitações em determinados conceitos e propriedades relacionados ao assunto de trigonometria podem contribuir para o desenvolvimento de outras maneiras de agir e pensar sobre a difusão de tal saber. De acordo com Passos e De Goés:

O ensino da disciplina deve levar o aluno a gostar de estudar matemática. Um professor, desde que bem-preparado, munido de algumas estratégias e muito motivado, poderia atingir esse objetivo. Afinal, estudar a matemática com seus cálculos e seus conceitos, tende a desafiar a intelectualidade do jovem, o que em muito já favorece o interesse dos alunos. (Passos; De Goés, 2008, p. 02)

Diante disso, surgiu a ideia de explorar o objeto de ensino relações trigonométricas através da metodologia fundamentada na Teoria Antropológica do Didático, usando um dispositivo didático para a evolução de paradigmas conhecido como Percurso de Estudo e Pesquisa - PEP. Sendo assim, assumimos o PEP como uma proposta metodológica-teórica que propicia processos de produção coletiva, conduzindo o professor a uma reflexão, por meio de pesquisas das suas praxeologias em torno de um determinado saber matemático.

A noção de praxeologia é extremamente fundamental para a construção de um PEP em conformidade com Teoria Antropológica do Didático. É por meio das praxeologias que podemos modelar as diferentes noções culturais mais comuns, como por exemplo o saber e o saber-fazer. É esse conceito, ou noção de praxeologia que vai permitir designar toda a estrutura de conhecimento possível nesse contexto, tanto na análise inicial, *a priori*, ou na análise final, *a posteriori*. Para Almouloud 2018:

A noção de praxeologia é o coração da TAD. Essa noção generaliza diferentes noções culturais comuns – a de saber e a de saber fazer... [a praxeologia] deve permitir designar, sem afetações epistemológicas-culturais (isto é saber, isto não é um saber, é um “simples” saber fazer etc.) sem juízo de valor *a priori* ou *a posteriori*, toda a estrutura de conhecimento possível. (Almouloud, 2018, p. 34)

Daí, a estrutura praxeológica mais simples consiste no envolvimento de quatro pilares que a compõe: um tipo de tarefa, uma tecnologia, um discurso fundamentado



sobre a técnica e um componente teórico que rege a tecnologia. Segundo Chevallard (2009) uma determinada praxeologia comporta uma parte prático-técnica, ou *práxis*, que pode ser chamada de “saber-fazer”; e uma parte tecnológica-teórica, ou *logos*, que pode ser identificado como o “saber”.

Ainda por essa vertente, imprescindível anotar, que no contexto da praxeologia, em uma perspectiva antropológica, não há *práxis* que não seja acompanhada de um *logos*, embora em alguns casos ela não parece tão visível. Almouloud (2018) ilustra bem essa situação através de um exemplo envolvendo divisão de números naturais. Ele afirma:

dividir por exemplo, 509 por 15 é uma tarefa t [de um tipo de tarefas]. Uma certa técnica τ , em seguida, leva, no caso de t , a fazer assim: porque $15 = 3 \times 5$, nós dividimos 509 por 5, o que leva a dividir 505 por 5; o quociente, 101, é então dividido por 3, o que leva, em seguida, a dividir 99 por 3: obtemos finalmente, 33, que é o quociente procurado. (Almouloud 2018, p. 35).

Dessa forma, no tocante a relação do professor com o saber matemático e os conhecimentos mobilizados em sua prática, essa pesquisa visa buscar subsídios que possam garantir que essa relação possa contribuir para a compreensão de como os dispositivos teóricos podem auxiliar na construção objetiva de novas praxeologias para o ensino de um objeto específico. De acordo com Silva (2014), a ausência desses recursos teóricos, embora não impeçam a construção de novas praxeologias, não asseguram a revelação de grande parte dos problemas docentes.

A presente tese encontra-se estruturada em cinco capítulos, além das referências e anexos, organizados de forma a assegurar a articulação entre os fundamentos teóricos, os procedimentos metodológicos e as análises decorrentes da investigação realizada.

O primeiro capítulo trata da construção da pesquisa, apresentando os elementos que fundamentam sua delimitação e desenvolvimento. Inicialmente, são expostos os aspectos que motivaram a escolha do objeto de estudo. Em seguida, são explicitados o problema de pesquisa, a afirmativa de tese e os objetivos geral e específicos. O capítulo contempla, ainda, a descrição do referencial teórico adotado, dos procedimentos metodológicos delineados e do contexto empírico no qual a investigação foi desenvolvida.



O segundo capítulo aborda o contexto das relações trigonométricas ao longo da história, contemplando dimensões históricas e epistemológicas da trigonometria enquanto campo do saber matemático. São discutidos os principais marcos de sua constituição, as transformações conceituais ocorridas ao longo do tempo e as implicações dessas transformações para sua inserção e abordagem no currículo da matemática escolar.

O terceiro capítulo apresenta elementos centrais da Teoria Antropológica do Didático (TAD), formulada por Yves Chevallard, que constitui o principal aporte teórico da investigação. São discutidos conceitos fundamentais, tais como objeto, relação pessoal, instituição, praxeologia, paradigmas didáticos, modelos praxeológicos de referência e o Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP), os quais sustentam o arcabouço analítico mobilizado no estudo.

O quarto capítulo descreve a construção e o desenvolvimento do Percurso de Estudo e Pesquisa voltado ao ensino das relações trigonométricas no triângulo. São apresentadas as etapas de elaboração e implementação do PEP junto aos professores e estudantes participantes, bem como os procedimentos de coleta e análise dos dados. Procede-se, ainda, à análise das mobilizações praxeológicas observadas, à luz do referencial teórico adotado.

O quinto capítulo apresenta as considerações finais da investigação, retomando o problema de pesquisa e os objetivos estabelecidos, sistematizando os principais resultados obtidos e discutindo suas contribuições para o campo da Educação Matemática. São igualmente indicados os limites do estudo e possíveis desdobramentos para pesquisas futuras.

Ao final, são apresentadas as referências que fundamentam teoricamente o trabalho e os anexos, que reúnem os instrumentos utilizados na pesquisa e demais documentos que asseguram o respaldo metodológico e ético da investigação.

Por fim, que a relação de todos esses elementos teóricos aqui abordados com as maneiras de agir e pensar dos professores que ensinam matemática, possam promover, de forma mais efetiva, a construção de um percurso matemático de formação e de ensino através da construção de um modelo dominante de referência, que possam ser utilizados na prática dos professores no ensino das relações



trigonométricos em um triângulo qualquer. De outro modo, o que buscamos alcançar será uma relação mais forte e intensa do professor com o saber matemático na perspectiva escolar.



1 CONSTRUÇÃO DA PESQUISA

1.1 TRAJETÓRIA DO PESQUISADOR E ESCOLHA DO OBJETO DE PESQUISA

Neste capítulo será abordado um resumo da minha trajetória profissional e alguns fatores que influenciaram para a escolha do objeto de pesquisa. Essa trajetória se inicia com a minha formação inicial em magistério e se estende até o objeto de conhecimento matemático que fomentou a construção dessa pesquisa.

Ao concluir o Curso de Formação para o Magistério, já tive minha primeira experiência como docente em uma turma de 1º período (crianças com idade de 4 anos). A partir desse momento já senti a necessidade de participar do processo de ensino e aprendizagem de forma mais efetiva. Logo em seguida, cursei graduação em Licenciatura em Matemática, pois tinha interesse de participar do processo de educação dos alunos. Seguindo essa ideia, fiz minha pós-graduação, especialização em Metodologia do Ensino de Matemática.

No ano de 2002, participei de um curso de formação continuada promovido pelo MEC em parceria com os sistemas municipais de ensino (Programa Gestão de Aprendizagem Escolar – GESTAR) sobre metodologias de ensino nas áreas de língua portuguesa e matemática. Ao desenvolver os métodos aprendidos no curso, percebi que diferentes metodologias aplicadas nas salas de aula influenciavam diretamente o processo de ensino e aprendizagem, então percebi que essa área de atuação favorecia o conhecimento e decidi me aprofundar nela. Depois, comecei a trabalhar como professor formador na área de matemática, onde teria a oportunidade de ministrar cursos de capacitação para os professores, desenvolvendo novas metodologias para as aulas a serem ministradas. Ao participar de cursos de capacitação pude aprofundar ainda mais meus conhecimentos na área de metodologias de ensino e compartilhar esse aprendizado com os professores que atuavam em sala de aula.

Em contrapartida, eu próprio poderia aplicar as minhas ideias desenvolvidas por essas formações continuadas nas salas de aulas que eu lecionava. Nessas aulas, percebi que uma das maiores dificuldades dos alunos era na área de trigonometria, pois na maioria das vezes era ensinada de forma atemporal, sem relação com aplicações práticas. A partir desse momento surgiu a ideia de realizar estudos nessa



área, para tentar investigar a origem dessa dificuldade e, como poderia ser feito para facilitar esse processo de aprendizagem.

Através desses estudos e com o intuito de desenvolver atividades mais contextualizadas, gerar um aprendizado mais efetivo na vida dos alunos, criar mecanismos de fomento e questões norteadoras que ajudariam na aprendizagem dos alunos, ou seja, onde os alunos poderiam construir seus próprios conhecimentos a partir dos conceitos discutidos em sala de aula, passei a trabalhar com o uso do material manipulativo.

Em uma das aulas construímos um modelo de referência com fenômenos periódicos e como poderiam ser modeladas usando como ponto de partida as funções trigonométricas. As fases da lua, o ciclo da maré, dentre outros fenômenos levaram os alunos a perceberem a relação desses fenômenos com as funções periódicas trigonométricas, em que áreas e como eram usados, e ainda, que conhecimentos matemáticos eram necessários. Ao desenvolver essa atividade, identifiquei que esse assunto, muitas vezes aplicado para os alunos de forma geral, e em alguns casos sendo até suprimido do currículo, por ser de difícil compreensão, poderia ser abordado de forma mais dinâmica gerando um aprendizado mais contextualizado.

Durante o curso de pós-graduação *stricto sensu* no Mestrado profissional em Matemática – PROFMAT, consegui ampliar meus conhecimentos na área de matemática e na área de ensino, despertando ainda mais o interesse por uma pesquisa na área de novas metodologias de ensino e como poderíamos tornar o ensino de matemática mais agradável na vida dos alunos, sem prejudicar o processo de ensino. Na ocasião, procurei abordar um tema também pouco explorado no ensino médio e que os alunos não sabiam muito a sua utilização no contexto matemático. Com uma dissertação intitulada “Algumas técnicas de resolução de problemas de máximos e mínimos na geometria euclidiana” abordei de forma simples e objetiva a utilização de extremos na resolução de problemas e como esse assunto poderia ser abordado no ensino médio.

Já lecionando no ensino superior, nos cursos de licenciatura em Matemática tive a oportunidade de formar os futuros professores e colocar em prática as novas metodologias aprendidas ao longo dos anos de estudos e experiências, nas



disciplinas de Prática Profissional, Metodologias de Ensino em Matemática, Estágios, entre outras, e contribuir na formação dos professores. Nesse período pude comprovar que uma das maiores dificuldades dos alunos – futuros professores de matemáticas – também era a trigonometria. Daí surgiu alguns questionamentos: “Os alunos têm dificuldade porque também é uma dificuldade dos professores?”; ou ainda: “Se os professores dominassem melhor seus conhecimentos na área de trigonometria, eles conseguiriam abordar esse assunto com mais efetividade?”; “Os alunos poderiam melhorar sua relação com os saberes?”. A partir daí surgiu o interesse de realizar essa pesquisa e, aprofundar sobre esse assunto e poder assim, responder tais questionamentos.

Por fim, todos esses anos de experiência e trabalhos desenvolvidos, conhecimentos adquiridos pela participação de cursos e eventos na área de matemática pode resumir a minha vida profissional e acadêmica como um conjunto de ações sempre voltadas para o processo de ensino e aprendizagem, buscando novas formas de ensinar e aprender, fazendo com que os alunos (tanto da rede estadual como na universidade) possam aprender, ao menos, grande parte do que foi proposto.

Com isso, fazendo associações práticas com a aplicação do conteúdo matemático em outras áreas do conhecimento, ou seja, percebendo assim a real função da matemática e sua fundamental importância em outras ciências, deixando claro que a ciência matemática não resume sua aplicação ao supermercado ou a uma lista de compras. O conhecimento científico matemático vai muito além das quatro operações e, a sua aplicação pode ser bem mais abrangente do que se prega ou se imagina atualmente.

Dessa maneira, refletir sobre as possibilidades de alterar as maneiras de agir e pensar, isto é, das praxeologias dos professores na relação com o saber relações trigonométricas nos processos de ensino e aprendizagem se constitui a razão de ser desta pesquisa.



PROBLEMA DA PESQUISA

Diante da importância do ensino da trigonometria para Educação Básica, relacionando-as com construtos da Teoria Antropológica do Didático, elaborou-se como questão central da pesquisa o seguinte problema: *De que maneira, o Percurso de Estudo e Pesquisa, envolvendo o objeto de ensino relações trigonométricas modifica as praxeologias dos professores que ensinam matemática?*

AFIRMATIVA DE TESE

A pesquisa terá como tese a afirmação de que uma metodologia de ensino sob as lentes da Teoria Antropológica do Didático, em particular o PEP, envolvendo o objeto de ensino relações trigonométricas, pode contribuir para confrontos das praxeologias dos professores que ensinam matemática no Ensino Médio e, conseqüentemente o rompimento com modos cristalizados, assim permitindo um olhar mais holístico e questionador nos processos formativos que envolve ensino e aprendizagem da matemática.

OBJETIVOS

Esse trabalho será desenvolvido com o intuito de dialogar entre o problema de pesquisa e a afirmativa de tese relacionando-os com os seguintes objetivos:

1.1.1 Objetivo Geral

Compreender as implicações do uso de construtos da Teoria Antropológica do Didático - TAD quando utilizados no ensino de matemática com professores ao mobilizarem suas praxeologias em função do objeto relações trigonométricas, particularmente à luz do Percurso de Estudo e Pesquisa.



1.1.2 Objetivos Específicos

- ✓ Explorar os conceitos da trigonometria para as diversas áreas do conhecimento e como esses conceitos evoluíram ao longo do tempo através de sua relação com o cotidiano.
- ✓ Investigar as organizações matemáticas e didáticas dos professores durante a aplicação do Percurso de Estudo e Pesquisa frente aos conteúdos de relações trigonométricas no triângulo.
- ✓ Analisar o desenvolvimento do percurso matemático proposto, tomando por base o sistema didático apregoado pela Teoria Antropológica do Didático.

REFERENCIAL TEÓRICO

A aprendizagem é um processo contínuo, que dura a vida inteira. Nesse processo, a apropriação de conhecimento é feita a partir de outro anterior, que costumamos chamar de conhecimento prévio. Além de contar com seu próprio conhecimento, o aluno necessita da ajuda de outras pessoas para aprender novos conceitos. Criar expectativas sobre o conteúdo a ser abordado no processo de ensino e aprendizagem é uma forma de explorar esse conhecimento prévio, relacionando com o conhecimento científico a ser aprendido.

Vale ressaltar que o desenvolvimento desse trabalho será ancorado na Teoria Antropológica do Didático, uma teoria elaborada por Yves Chevallard, cuja ideia é colocar o sujeito em estudo sobre os objetos matemáticos das organizações matemáticas e a forma que esses objetos são postos para o ensino nas organizações didáticas. Segundo Almouloud (2018):

A [Teoria Antropológica do Didático - TAD] focaliza o estudo das organizações praxeológicas didáticas pensadas para o ensino e a aprendizagem de organizações matemáticas. A TAD ocupa hoje uma posição decisiva na investigação em Didática da Matemática e Didática de outras áreas do conhecimento. (Almouloud 2018, p. 11)

Na Teoria Antropológica do Didático (TAD), sugere-se iniciar com uma ideia inicial e fundamental a compreensão do processo, que é a ideia de **objeto**; o objeto é



qualquer entidade que existe, seja material ou imaterial, incluindo pessoas. Por exemplo, o conceito de trigonometria é um objeto, bem como a ideia de ângulo, e até mesmo o nome *ângulo* pode ser considerado um objeto, isto é, objeto é tudo que pode ser capitado pela cognição.

Num segundo momento, pode-se verificar a relação de um indivíduo a determinado objeto, é o que se conhece por *relação pessoal*. Na TAD, a relação pessoal é o conjunto de todas as interações que o indivíduo pode ter com o objeto. Um terceiro conceito fundamental dentro da TAD é a noção de *pessoa*. Em relação a esses três conceitos fundamentais, Rodrigues, Menezes e Santos (2017) traz a explanação proposta por Chevallard e sua relação entre si. Segundo eles:

A definição de pessoa proposta por Chevallard não deve generalizar o fato de que “todo indivíduo é uma pessoa”. Pessoa surge das várias relações que o indivíduo tem com instituições diferentes, ou seja, é o conjunto de sujeitos do indivíduo é que forma a pessoa. (Rodrigues, Menezes e Santos, p. 39).

A TAD tem um papel fundamental quando se trata de investigação relacionada a Didática da Matemática. É através dela que as reflexões relacionadas a ensino e aprendizagem se expandem, ou seja, a TAD serve como um instrumento de fomento para as investigações relacionadas ao ensino e a aprendizagem em matemática. Esse novo ponto de vista sobre os dispositivos de ensino e as análises da realidade escolar, que se encontram, de certa forma fragmentadas são direcionamentos do processo investigativo de todos os envolvidos, visando melhorias neste processo. Para Almouloud (2018):

A atividade do matemático, do professor de matemática, dos estudantes ao ensinarem ou estudarem e produzirem matemática, são atividades humanas, mas não são atividades isoladas, são parte de uma instituição e contribuem ativamente para a sobrevivência dos saberes em tais instituições. (Almouloud 2018, p. 182).

Existem alguns elementos da TAD que contribuem para a análise e investigação das metodologias de ensino utilizadas e como a prática pedagógica pode influenciar de forma relevante para o processo de ensino e aprendizagem. Um desses elementos é conhecido como O Percurso de Estudo e Pesquisa – PEP. O PEP corresponde a um ensino centrado na pesquisa, pois se inicia o percurso propondo uma questão suficientemente ampla, chamada de questão geratriz. A partir da questão geratriz, são elaboradas questões derivadas, onde os estudantes, através da busca de conhecimentos, procuram responder esses questionamentos.



Dentro do processo desenvolvido pelo PEP, os alunos são incentivados a construir novos questionamentos, relacionando esses questionamentos sempre com a busca da resposta a questão geratriz. Para Chevallard, o processo de ensino é nato do ser humano e se busca, em todas as coisas que o homem realiza, a relação entre estudar e aprender. Dessa forma, a didática da matemática relaciona-se a modelos pré-estabelecidos que ele chama de paradigmas. Chevallard aborda três grandes paradigmas relacionados a didática da matemática: paradigma de visita as obras; paradigma de questionamento do mundo e; paradigma de estudo dos autores.

Nesse contexto, Chevallard menciona que o paradigma “questionar o mundo” deve ser base na sociedade, e são através desses questionamentos que se busca uma associação entre o cotidiano e os conhecimentos matemáticos abordados. De acordo com Chevallard (2009a):

A “metodologia”, portanto, é o que eu chamarei as praxeologias de pesquisa colocadas em jogo em um determinado campo (ou em uma dada pesquisa particular). Eu aproveito este momento para enfatizar que o trabalho coletivo sobre as praxeologias de pesquisa em didática, ou seja, sobre “os métodos e procedimentos pelos quais tal conhecimento e compreensão são alcançados” e “a formulação de métodos sistemáticos e logicamente consistentes para a busca de conhecimento”, me parece hoje mais necessário do que nunca, para combater os efeitos da rotina ou mesmo da quase naturalização dos métodos frequentemente utilizados. (Chevallard, 2009a, p. 11)

Quando nos referimos ao dispositivo didático PEP relacionado a matemática, em particular, ao ensino das relações trigonométricas, objeto de estudo dessa pesquisa, é importante considerar os domínios das propostas das escolas em seus diferentes níveis. Por exemplo, ao se construir uma PEP para o ensino da trigonometria nas turmas do 1º ano do Ensino Médio, é necessário compreender como esse conteúdo foi abordado no Ensino Fundamental, até que ponto os conhecimentos adquiridos podem fomentar a construção de novos conhecimentos. A partir desse diagnóstico, deve-se propor novas questões que possibilitam aos estudantes levantarem novos questionamentos a partir dos seus conhecimentos prévios.

Para Chevallard, toda situação didática pode ser representada por um sistema didático semelhante a um sistema cartesiano no espaço tridimensional formado pelo ponto S (X, Y, Z), onde X representa um coletivo de estudos, Y representa a equipe de pesquisadores e Z representa a obra estudada. O objetivo desse sistema didático é estudar Z, ou seja, procurar uma resposta R que satisfaça as questões pré-



estabelecidas no processo investigativo. O percurso percorrido para encontrar essas respostas é o que o autor chama de Percurso de Estudo e Pesquisa.

Proporcionar aos alunos uma visão contextualizada do ensino e da aplicabilidade da matemática no nosso contexto, quer cultural, quer histórico, quer profissional pode levá-los a ter uma visão diferenciada da matemática, e ainda mais, que ele está muito além de teoremas e propriedades. De acordo com Brasil (2018, p.522), “um dos desafios para a aprendizagem da Matemática no Ensino Médio é exatamente proporcionar aos estudantes a visão de que ela não é um conjunto de regras e técnicas, mas faz parte de nossa cultura e de nossa história”.

Outro fator importante a ser considerado no processo de ensino é o uso da linguagem matemática. Segundo D’Amore (2007, p.249), a matemática possui uma linguagem específica, e um dos objetivos principais de quem a ensina é de fazer com que os alunos aprendam. A forma como se desenvolve a linguagem matemática em sala de aula deve ser considerada de extrema relevância no processo de ensino e aprendizagem em matemática. De acordo com D’Amore (2007), a matemática é considerada, por si mesma, uma linguagem, pois possui de maneira totalmente evidente uma sintaxe, uma semântica e uma pragmática. Ao se ensinar matemática é necessário levar em consideração que a comunicação deve se dar de forma simples, de maneira que os alunos compreendam exatamente o que se pretende dizer. Termos técnicos e de difícil compreensão podem interferir de forma negativa no processo de ensino e aprendizagem. Segundo D’Amore:

o ensino é comunicação e um dos seus objetivos é o de favorecer a aprendizagem dos alunos; em primeiro lugar, então, que comunica deve fazê-lo de maneira tal que a linguagem utilizada não seja ela própria uma fonte de obstáculos a compreensão; a solução poderia parecer banal: bastaria evitar com os alunos aquela linguagem específica: toda comunicação deveria acontecer na linguagem comum. (D’Amore, 2007, p. 249)

Nessa abordagem, os alunos devem ser desafiados a aplicar aquilo que aprenderam de forma contextualizada, fazendo com que essas relações sejam de fato estabelecidas entre o conhecimento e a prática. Para que isso ocorra, o professor precisa desenvolver uma sequência didática em sala de aula que possam articular os conteúdos teóricos e o cotidiano escolar, uma vez que, de acordo com Zabala (1998, p. 18) seriam “as três fases de toda intervenção reflexiva: planejamento, aplicação e avaliação”.



O ensino da trigonometria não pode fugir desse contexto. Os PCN's (Brasil, 2002) já apresentavam algumas orientações de como desenvolver habilidades relacionadas ao ensino da trigonometria. Eles afirmavam:

O que deve ser assegurado são as aplicações da trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis e para construir modelos que correspondem a fenômenos periódicos. Dessa forma, o estudo deve se ater às funções seno, cosseno e tangente com ênfase ao seu estudo na primeira volta do círculo trigonométrico e à perspectiva histórica das aplicações das relações trigonométricas (Brasil, 2002, p.121-122).

Para a BNCC, a aprendizagem dos conceitos e procedimentos matemáticos precisam ser precedidos de registros e experimentos. O processo de registros do desenvolvimento das etapas em que ocorreram o processo de construção do conhecimento do aluno gera uma aprendizagem mais efetiva. Segundo a BNCC:

Para tanto, esta Base assume que para as aprendizagens dos conceitos e procedimentos matemáticos deve-se incluir, quando possível, pelo menos dois registros de representação. Assim, os estudantes precisam estar preparados para escolher as representações mais convenientes para cada situação, para mobilizar, de modo simultâneo, ao menos dois registros de representação e para, a todo o momento, trocar de registro de representação. (Brasil 2018, P. 530)

Outra metodologia fundamental no processo de ensino de matemática é o uso de situações-problemas. A resolução de problemas é entendida como um recurso metodológico, um caminho alternativo para o professor fazer Matemática na sala de aula. A abordagem da resolução de problemas através de situações desafiadoras fomenta os alunos a desenvolverem o pensamento crítico e a elaborar estratégias de resolução.

A resolução de problemas é considerada uma habilitação prática, ou seja, adquirimos a técnica de resolução de problemas por imitação prática. No processo de resolução de problemas temos que observar outras pessoas para assim aprendermos a resolver problemas, resolvendo-os. Ao se resolver um problema o ideal é segmentar em partes mais compreensíveis, identificar as questões principais e estabelecer um plano ou estratégia de resolução. Segundo Polya (1995, p.3):

para se resolver uma situação problema temos que passar por quatro fases fundamentais: compreender o problema, relacionar os itens do problema para estabelecer o plano, executar o plano, e por fim, fazendo um retrospecto da resolução completa, revendo-a e a discutindo-a. (Polya, 1995, p.3)



Para Branca (1997), a resolução de problemas é uma expressão abrangente que pode ser pensada e interpretada de formas distintas. Para Oliveira (2020), a resolução de problemas pode ser entendida como uma meta, como um processo ou como habilidade básica. De maneira geral, o uso da resolução de problemas propondo situações desafiadoras para os alunos fomenta o desenvolvimento de habilidades que favorecem o processo de ensino e aprendizagem em matemática.

De acordo com Oliveira (2020), a resolução de problemas é uma meta, quando o objetivo principal do processo educativo é ensinar matemática para o aluno aprender a resolver problemas, ou seja, a resolução é a principal razão para o estudo dos conteúdos matemáticos. Em contrapartida, a resolução de problemas se caracteriza como um processo, quando, no desenvolvimento da prática pedagógica, prioriza-se o ensino de técnicas, de procedimentos e de estratégias específicas que vão efetivamente contribuir para a resolução de problemas. Por fim, é considerada uma habilidade básica, quando a ideia central é exigir dos alunos o domínio das possíveis alternativas de resolução, ou seja, o processo pelo qual foi construída a resolução é que será explorado, onde essas possíveis alternativas são tidas como competências mínimas para o desenvolvimento nos estudos.

Nesse contexto, será utilizado a TAD para a elaboração dos problemas compostos por situações problemas ou tipos de tarefa constituída a partir de uma sequência de subtarefas que poderão ser realizadas com a utilização de diversas técnicas justificadas pelos procedimentos metodológicos que se utilizará da trigonometria no triângulo como objeto de estudo.

Assim, uma didática voltada na resolução de problemas, usando atividades significativas e fazendo relações entre teoria e prática irá fomentar os alunos a despertar o interesse pelo estudo da trigonometria, e posteriormente, para as aulas de matemática, pois a partir desse processo, os alunos estão construindo o seu próprio conhecimento.



METODOLOGIA

Essa pesquisa é de natureza qualitativa e os caminhos metodológicos utilizados para construção do trabalho de pesquisa ocorreram através de fonte bibliográfica, pesquisa documental e pesquisa de campo com realização de entrevistas com os sujeitos de algumas escolas estaduais do Ensino Médio do município de Boa Vista/RR. Desta forma, o processo metodológico encontra-se estruturado em três pontos que direcionaram toda a pesquisa.

O primeiro foi a realização da pesquisa através de uma revisão bibliográfica com levantamento de teóricos e autores que discutem o conceito de Trigonometria, Teoria Antropológica do Didático e Percurso de Estudo e Pesquisa. A partir desses conceitos, foi desenvolvido o estudo das dimensões epistemológica, econômica e ecológica do problema didático. Como resultado dessa pesquisa inicial teve-se o Modelo de Referência Epistemológica (MER) e o Modelo de Praxeológico de Referência (MPR)

O segundo está direcionado a pesquisa de campo no município de Boa Vista/RR, em que foi utilizada a aplicação de questionários e entrevistas gravadas para coleta de dados e informações sobre o ensino da trigonometria nas escolas do Ensino Médio. Optou-se em realizar a pesquisa nas turmas do 1º ano do Ensino Médio nas escolas públicas da rede estadual do município de Boa Vista/RR. Foram pesquisados os professores através de um Percurso de estudo e Pesquisa - PEP, apresentando a ideia do PEP aos professores que ensinam matemática e que lecionam nas turmas de 1º ano do Ensino Médio, destacando a importância dessa metodologia na aprendizagem dos alunos.

Foram selecionados os professores das escolas que funcionam com turmas de 1º ano do Ensino Médio que se dispuserem a participar da pesquisa (a rede estadual possui um total de 60 professores), onde foi feita uma formação com esses professores, destacando o percurso que eles deverão seguir em sala de aula durante a pesquisa. Para que a pesquisa realmente funcione foi fundamental que os professores realmente desejassem participar e aceitassem desenvolver o percurso da forma que foi proposto, a fim de que os resultados possam realmente retratar o que se busca na pesquisa.



Dessa forma, o primeiro encontro com os professores foi em apresentar a proposta e foi estendido o convite para a participação da pesquisa. Nesse momento, os professores que não tiveram interesse em participar não fizeram parte do grupo das formações seguintes, ficando no grupo de professores pesquisados somente os que aceitaram o convite e se dispuseram a aplicar o percurso construído em sala de aula.

Com o grupo já formado, foram realizadas formações mensais para a coleta dos dados construídos em sala de aula com o desenvolvimento do percurso pelos professores. Em alguns momentos, o pesquisador fez visitas durante a aplicação do percurso diretamente em loco, o que favoreceu construir os dados a partir de suas observações.

Nas formações iniciais buscou-se um panorama dos professores participantes e como é realizada sua prática atualmente. Através de questionários almejou-se pesquisar quais as áreas da matemática os professores têm mais dificuldade em aprender dentre os conceitos e teoremas e ainda qual a área da matemática eles tem mais dificuldades em ensinar para os alunos. A partir desses questionários fez-se um comparativo entre essas áreas e qual sua relação com o processo de ensino e aprendizagem dos alunos.

O terceiro pilar da metodologia foi a pesquisa documental realizada através da seleção de documentos oficiais em órgão governamentais para coleta de dados sobre o currículo, metodologia e estratégias de ensino, onde foi feita uma associação com a prática efetiva de sala de aula. Os documentos pesquisados foram as Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica; Base Nacional Curricular Comum e Documento Curricular de Roraima, bem como os Itinerários Formativos construídos para a aplicação dos objetos de conhecimento do novo Ensino Médio. A análise sistemática dos referidos documentos foi fundamental para as reflexões e análises no processo de construção da pesquisa.

A proposta de coleta e análise de dados foi desenvolvida através do Percorso de Estudo e Pesquisa e foi dividido em quatro fases, a saber: primeiro, uma análise praxeológica ou análise preliminar do objeto de pesquisa. Nesse contexto foi realizado um questionamento epistemológico sobre os conceitos matemáticos presente nos



documentos curriculares vigentes e como esses conceitos podem ser introduzidos em sala de aula. Além disso, realizou-se um estudo das condições e limitações oferecida pelas instituições de ensino.

Em um segundo momento foi feito um planejamento matemático e didático da proposta de intervenção, também chamado de análise *a priori*. Nessa fase se desenvolveu todo o roteiro do PEP, elaborando a questão geratriz e fomentando o surgimento e desenvolvimento das questões derivadas, sempre em busca de solucionar a questão geratriz principal, questão essa que foi estabelecida durante a aplicação do PEP.

Na terceira fase foi realizada o processo de experimentação, ou seja, nesse momento foi aplicado os instrumentos de coleta de dados, entre eles um questionário específico diagnóstico, a fim de mensurar o grau de conhecimento dos envolvidos sobre o assunto de trigonometria e como esses conhecimentos podem ser explorados e aplicados em situações do cotidiano. Um outro instrumento foi a ficha de trabalho, da qual denominamos portfolio, cujo objetivo é revisar a didática utilizada em sala de aula e os recursos tecnológicos utilizados pelos professores para lecionar o assunto de relações trigonométricas em sala de aula.

Na quarta e última fase do processo de aplicação do PEP foi realizada a análise dos dados construídos, também chamada de análise *a posteriori*. Nesse momento foram feitas as comparações dos dados recolhidos na fase anterior, na tentativa de validar, ou não, as hipóteses levantadas no início da pesquisa, e até mesmo apresentar o surgimento de novos problemas.

CONTEXTO DA PESQUISA

A pesquisa foi realizada na cidade de Boa Vista, estado de Roraima nas escolas públicas estaduais, com professores que atuam nas turmas de 1º ano do Ensino Médio. A escolha da série se justifica pelo fato de a pesquisa abordar o ensino das relações trigonométricas no triângulo a luz do Percorso de Estudo e Pesquisa, objeto de conhecimento abordado nas turmas de 1º ano.

De acordo com os dados da Secretaria Estadual de Educação, funcionam 58 escolas estaduais localizadas na cidade de Boa Vista, área urbana, entre as



modalidades de Ensino Fundamental e Médio. Dessas 58 escolas, 40 possuem turmas de 1º ano, onde será o foco da nossa pesquisa. Trabalham nessas 40 escolas um quantitativo de 60 professores de matemática que lecionam nas referidas turmas.

No início do ano letivo de 2024, como de costume o ano foi iniciado com um curso de formação para professores, conhecido no estado como Jornada Pedagógica. Nessa Jornada, os professores são separados por área de conhecimento. Dessa forma os professores de matemática se reúnem em um mesmo local para discutir melhorias no processo de ensino e aprendizagem.

Durante a Jornada Pedagógica do referido ano, estiveram presentes 217 professores, desses apenas 48 trabalhavam em turmas de Ensino Médio, onde 10 deles não lecionavam em turmas de 1º ano. Ao conversar com esses professores sobre a possibilidade de se fazer uma pesquisa em suas turmas de atuação, muitos deles ficaram receosos e não aceitaram. Apenas oito professores aceitaram o desafio, sendo que seis deles atuavam no turno matutino, o que impossibilitaria a minha pesquisa, devido a pouca disponibilidade do próprio pesquisador em acompanhar a pesquisa. Dessa forma, apenas dois professores, um deles lecionava na Escola Estadual Mário David Andreazza, e o outro, na Escola Estadual Carlos Drummond de Andrade, aceitaram participar da pesquisa e desenvolver o PEP. Então, a pesquisa foi realizada nesse contexto e esse foi o critério de escolha adotado.

Além disso, paralelo ao desenvolvimento do PEP com os professores, foi proposto também a aplicação do PEP em uma turma de 1º ano pelo próprio pesquisador, a fim de colher dados e analisar com mais propriedade a real influência desse percurso na aprendizagem dos alunos.

A ideia da pesquisa foi mobilizar as praxeologias dos professores de matemática através de um sistema teórico metodológico conhecido como Percurso de Estudo e Pesquisa. Dessa forma, a pesquisa não se limita a aplicação com os alunos, mas a mobilização na práxis dos professores, garantindo a priori uma discussão entre os professores de matemática e suas práxis.

O PEP foi aplicado em uma turma de 1º ano do Ensino Médio na Escola Mário David Andreazza. A escola está situada no município de Boa Vista, vinculada à Secretaria Estadual de Educação e Desporto, mantida pelo Governo do Estado de



Roraima, foi criada pelo decreto número 020/88 de 31 de agosto de 1981 e obteve sua autorização de funcionamento por intermédio do parecer número 31/CEE/RR de 18 de dezembro de 1990. Atualmente a escola conta com 310 alunos matriculados, distribuídos em 2 turnos: matutino e vespertino. No turno matutino a escola funciona com 7 turmas de Ensino Fundamental, do 6º ao 9º ano. Já no turno vespertino, a escola funciona com 7 turmas de Ensino Médio, do 1º ao 3º ano.

A escola adota um currículo inovador que é desenvolvido por meio de Projetos e Salas Ambientes, entre essas salas destacam-se: sala de informática, sala de leitura, biblioteca, sala multifuncional, sala de cultura, sala dos componentes curriculares com os integrantes das tecnologias educacionais e técnicas de ensino diversificado.

A proposta pedagógica da Escola Estadual Mário David Andreazza tem como destaque os seguintes projetos: Cultura Afro-Brasileira e Indígena, Fortalecendo a Identidade, Ler para Crescer, Feira de Ciências, Natal Fraterno, Semana Literária, Mostra de Educação Física, Resgate da Autoridade da Família e Projeto Banda Musical Estrela de David.

O estado de Roraima utiliza um documento próprio que rege as diretrizes e o currículo a ser aplicado nas escolas. A partir da homologação da Base Nacional Comum Curricular – BNCC, em dezembro de 2017, para Educação Básica, o Governo do Estado de Roraima através da Secretaria Estadual de Educação iniciou o processo de construção do Documento Curricular de Roraima – DCR, com o intuito de formalizar a ideia de currículo único no estado, onde houve a adesão dos 14 municípios do território roraimense, alinhando as diretrizes da implementação da BNCC.

A construção do DCR foi baseada na estrutura curricular da BNCC e adaptada a realidade local, a fim de que os currículos desenvolvidos nas escolas estaduais abordassem o que se propõe na Base e, ao mesmo tempo, explorasse as culturas e contextos locais, muito ricos para o desenvolvimento das habilidades propostas pela Base. Assim, de acordo com o DCR:

A construção do Documento Curricular de Roraima, alinhado à política de qualidade da educação, conforme as premissas do Programa de Apoio à implementação da Base Nacional Comum Curricular – ProBNCC, define as aprendizagens essenciais que todos os alunos devem aprender ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, traduzidas nas dez competências



da Base Nacional Comum Curricular – BNCC. Também em conformidade com os marcos legais preconizados na Constituição Federal de 1988, Lei de Diretrizes e Bases – 1996, Diretrizes Curriculares Nacionais – DCNs, 2013, e Plano Nacional de Educação – 2014/2024, assegurando-se a todos os direitos de aprendizagem e desenvolvimento, como garantia da formação humana integral. DCR – Educação Infantil e Ensino Fundamental, P. 8, 9).

A partir da criação do DCR foi estabelecido o currículo único em todas as escolas estaduais, de forma que todos os professores pudessem utilizar esse documento como subsídio principal no planejamento das suas aulas. Na área de matemática o documento trabalha com oito competências específicas que devem ser desenvolvidas durante os 3 anos do Ensino Médio. O ensino da matemática, de acordo com a BNCC deve dar maior ênfase a resolução de problemas, valorizando o desenvolvimento de habilidades e competências nas estratégias didáticas e na progressão da aprendizagem ao longo dos anos. De acordo com a BNCC:

O Ensino Fundamental deve ter compromisso com o desenvolvimento do **letramento matemático**, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. É também o letramento matemático que assegura aos alunos reconhecer que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo e perceber o caráter de jogo intelectual da matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser prazeroso (fruição). (Brasil 2017, p. 266)

Dentro do currículo destinado as turmas de 1º ano do Ensino Médio, no âmbito da Geometria, o DCR aborda algumas habilidades específicas envolvendo as relações métricas e trigonométricas no triângulo retângulo e qualquer, com a utilização das Leis de Seno e Cosseno. Em Geometria e Medidas, são contempladas as habilidades que levarão o aluno a compreender melhor o mundo físico em que vive, e a ser capaz de utilizar recursos da matemática para mensurar e interagir de maneira positiva com a realidade.

Vale destacar que os objetos de conhecimentos estudados na unidade temática Geometria também favorecem o aprimoramento do raciocínio algébrico do aluno, uma vez que, utilizará esse raciocínio para a generalização de fórmulas relacionadas com, por exemplo, a obtenção de medidas de áreas de regiões planas, superfícies e volumes de sólidos.



Ainda de acordo com o DCR, dentro do objeto de conhecimento Geometria e Medidas e Números e Álgebra são exploradas as ideias de ângulos, relações métricas e trigonométricas e aplicação de ângulos em situações práticas. Isso pode ser observado no Quadro 01 abaixo:

Quadro 01: Habilidades sobre trigonometria a serem desenvolvidas

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3			
UNIDADES TEMÁTICAS	HABILIDADES	OBJETOS DO CONHECIMENTO	ORIENTAÇÕES DIDÁTICO-METODOLÓGICAS
Geometria e medidas	(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.	-Relações métricas no triângulo retângulo (leis dos senos e dos cossenos). -Congruência de triângulos (por transformações geométricas - isometria). -Semelhança de triângulos (por transformações geométricas - homotetia).	-Desenvolver atividades que possibilitem aos alunos a resolução e elaboração de problemas com aplicação das leis dos senos e dos cossenos. -O desenvolvimento dessas atividades, que podem envolver projetos associados a preservação de áreas, possibilita a utilização de instrumentos de medição como trena, transferidores e teodolitos. Ou ainda, calculadoras científicas e aplicativos específicos.
Geometria e medidas	(EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos)	-Conceitos, elementos e classificação dos sólidos geométricos (prisma, pirâmide, cilindro, cone e esfera). -Área total e volume dos sólidos geométricos.	-Desenvolver atividades que possibilitem, por exemplo, calcular a área de um determinado objeto a fim de identificar, por exemplo, a quantidade de tinta, papel de parede, azulejos e outros para a pintura e/ou revestimento do referido objeto.
Números e álgebra	(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.	- Principais razões trigonométricas no triângulo retângulo. -Trigonometria no ciclo trigonométrico -Unidades de medidas de ângulos (radianos) -Funções seno e cosseno e suas representações gráficas.	-Desenvolver atividades que envolvam a resolução e elaboração de problemas a partir de situações de aplicações com fenômenos periódicos reais, realizando inclusive, suas representações gráficas, com o uso de tecnologias digitais ou de materiais manipuláveis. Para tanto, pode-se utilizar conceitos relacionados à astronomia (ciclo lunar e marés) e à arte, como fenômenos periódicos presentes nas notas musicais.

Fonte: Documento Curricular de Roraima, p. 123 e 124

A competência específica 3, de acordo com o documento, prioriza a ideia de utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. Todas as habilidades propostas visam desenvolver essa competência, no intuito de preparar o aluno para uma aplicação prática dos objetos de conhecimentos estudados.

São esses documentos que nortearam a pesquisa em relação ao currículo e relacionaram o objeto de conhecimento trigonometria as turmas de 1º ano, referentes a essa unidade temática com as habilidades a serem desenvolvidas em cada bimestre, e como isso pode influenciar na aprendizagem dos alunos.



Essa pesquisa foi submetida e aprovada pelo Conselho de Ética em Pesquisa da Universidade Estadual de Roraima sobre o número **CAAE**: 67565423.5.0000.562, conforme parecer em anexo.



2 O CONTEXTO DAS RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS AO LONGO DA HISTÓRIA

CONTEXTO HISTÓRICO

A matemática e suas diversas ramificações tem se tornado cada vez presente nas mais diferentes áreas do conhecimento e isso faz com que a busca por aplicações da matemática nessas áreas seja mais fomentada atualmente. Dentre as áreas de estudo da matemática pode-se destacar a trigonometria – palavra de origem grega que significa tri = três, gono = ângulo, metria = medida. Os primeiros relatos sobre a trigonometria remontam do antigo Egito, onde o problema 56 do Papiro de Rhind (papiro copiado pelo escriba Ahmes por volta de 1600 A. C.) contém rudimentos de trigonometria e uma teoria de triângulos semelhantes.

Séculos mais tarde a trigonometria é destaque na Grécia Antiga. As propriedades das cordas, medidas dos ângulos centrais e ângulos inscritos em círculos eram conhecidos desde os tempos de Hipócrates. Segundo Boyer, é provável que Eudoxo tenha usado razões e medidas de ângulos para determinar o tamanho da Terra e as distâncias relativas do Sol e da Lua. Ainda de acordo com Boyer (1974, p.116), o próprio Euclides já usava conceitos de trigonometria em suas obras. Segundo ele “nas obras de Euclides não há trigonometria no sentido estrito da palavra, mas há teoremas equivalentes a leis ou fórmulas trigonométricas específicas.”

Para Boyer (1974) a obra de Euclides conhecida como *Os Elementos*, traz ligações entre as relações trigonométricas em um triângulo qualquer, destacando as propriedades das Leis dos Senos e Lei dos Cossenos. Segundo Boyer:

As proposições II.12 e II.13 de *Os elementos*, por exemplo, são as leis de cossenos para ângulos obtuso e agudo respectivamente enunciados em linguagem geométrica em vez de trigonométrica e são provadas por métodos semelhante ao usado por Euclides para o Teorema de Pitágoras. Os teoremas sobre comprimentos de cordas são essencialmente aplicações da lei dos senos. (Boyer 1974, P.116)

Ainda há relatos da aplicação dos conceitos trigonométricos em diferentes partes do mundo antigo, entre eles pode-se destacar Arquimedes de Siracusa, Eratóstenes de Cirene, Aristarco de Samos. Ainda de acordo com Boyer:

Vimos que o teorema de Arquimedes sobre corda quebrada pode facilmente ser traduzido em linguagem trigonométrica a fórmulas para senos de somas



e diferenças de ângulos. Cada vez mais os astrônomos da Idade Alexandrina – notadamente Eratóstenes de Cirene (por volta de 276-194 A. C.) e Aristarco de Samos (por volta de 310-230 A. C.) tratavam problemas que indicavam a necessidade de relações mais sistematizadas entre ângulos e cordas. (Boyer 1974, p. 16)

Na Índia, os conceitos relacionados a trigonometria tomaram uma nova forma. Embora os hindus tenham tomado conhecimento da trigonometria do helenismo cosmopolita de Alexandria, através dos estudos de Ptolomeu, eles aprofundaram seus conhecimentos em um período conhecido como *Siddhāntas*, os sistemas, que marcou o início de um renascimento da cultura sânscrita. Os estudos de Ptolomeu se baseavam na relação funcional entre as cordas de um círculo enquanto os hindus converteram isso num estudo de correspondência entre metade de uma corda de um círculo e metade do ângulo subentendido no centro pela corda toda. Para Boyer:

...aparentemente nasceu na Índia a precursora da função trigonométrica moderna que chamamos seno de um ângulo, e a introdução da função seno representa a contribuição mais importante *Siddhāntas* à história da matemática. Embora se suponha em geral que a mudança da corda toda para a metade teve lugar na Índia, Paul Tannery, o mais importante historiador de ciências do fim do século passado e início deste, sugeriu que essa transformação trigonométrica teve lugar em Alexandria durante o período pós-ptolomaico. Quer essa sugestão seja válida ou não, não há dúvida de que é os hindus, não dos gregos, que deriva nosso uso da metade da corda; e o nosso termo “seno”, por acidente de tradução, provém da palavra hindu *jiva*. (Boyer 1974, p. 153)

Os árabes também muito contribuíram para o avanço da matemática e, em particular, para os conceitos de trigonometria. Desde os tempos remotos da origem dos números e dos sistemas de numeração houve disputa das civilizações sobre a melhor forma de registrar quantidades. Em relação ao sistema de numeração utilizado atualmente, sabe-se que foi criado pelos hindus e aperfeiçoado pelos árabes, daí o nome de Sistema de Numeração Indo-arábico.

De acordo com a história, essa disputa por conhecimentos matemáticos entre hindus e árabes se estendeu aos cálculos astronômicos, gerando na Arábia, a princípio, dois tipos de trigonometria: a usada pelos gregos e a utilizada pelos hindus. Findado o conflito de ideias, os árabes passaram a utilizar rigorosamente a trigonometria hindu e, atribui-se aos árabes a chegada da trigonometria dos senos a Europa.



Já por volta do século XVI, chega na Europa o prelúdio a matemática moderna, onde as principais obras matemáticas da antiguidade tinham sido recuperadas. A transição do renascimento para o período conhecido como matemática moderna foi feita por grandes personagens na história da matemática. Entre eles podemos citar os italianos Galileu Galilei (1564-1642) e Boaventura Cavalieri (1598-1647); os ingleses Henry Briggs (1562-1639), Thomas Harriot (1560-1621) e William Oughtred (1574-1660); Simon Stevin (1548-1620) e Albert Girard (1590-1633) eram dos países baixos; John Napier (1550-1617) era da Escócia, Jobst Burgi (1552-1632) da Suíça e Johann Kepler (1571-1630) da Alemanha. Todos esses estudiosos e a maior parte da Europa Ocidental participavam ativamente do desenvolvimento da matemática nesse período, mas uma figura de maior destaque foi o matemático francês François Viète (1540-1603).

A maior característica de Viète em relação aos seus estudos sobre trigonometria era uma ênfase maior na generalidade e prodigalidade em sua visão. Viète pode ser chamado o pai de uma abordagem analítica generalizada da trigonometria. De acordo com BOYER:

...Viète escolheu um “sinus totus” ou hipotenusa de 100000 partes para as tabelas de senos e cossenos e uma “base” ou *perpendicularum* de 100000 partes para as tabelas das tangentes, cotangentes, secantes e cossecantes (não usava, porém, esses nomes, exceto quanto a função seno). Para resolver triângulos oblíquos, Viète no *Canon mathematicus* decompunha-os em triângulos retângulos, mas em outra obra, poucos anos depois, *Variorum de rebus mathematicis* (1953) há um enunciado equivalente à nossa lei das tangentes. (Boyer 1974, p. 226)

Atualmente a trigonometria é utilizada nos mais variados contextos e, em particular, as relações trigonométricas no triângulo facilitam o cálculo de medidas inacessíveis, aplicação nas telecomunicações, na dança, na medicina, entre outras. Trazer ao contexto educacional a evolução dos conceitos de trigonometria é fundamental para que se possa compreender sua aplicabilidade e real utilização em outras áreas do conhecimento.

CONTEXTO EPISTEMOLÓGICO

Em relação ao aspecto epistemológico, a trigonometria tem origem em práticas ligadas à astronomia e à medição de terras, evoluindo para um corpo teórico fundamental no estudo de funções periódicas.



No contexto escolar, essa trajetória histórica implica uma tensão entre o ensino da trigonometria como um conjunto de técnicas de cálculo (razões em triângulos) e como sistema funcional que permite a modelagem de fenômenos periódicos (Gomes, 2013). Essa dualidade reflete diretamente nas propostas didáticas: ora prevalece o enfoque algorítmico, ora a ênfase em aplicações e representações múltiplas (Sousa, 2020).

Os documentos oficiais, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1997, 2000) e a Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018), situam a trigonometria como um conteúdo estratégico. Enquanto os PCN priorizavam um ensino mais instrumental, a BNCC propõe competências ligadas à modelagem de situações reais e à compreensão funcional. Essa mudança revela um deslocamento epistemológico do foco procedimental para a articulação de múltiplas representações.

Pesquisas brasileiras mostram que os livros didáticos, em geral, apresentam uma didatização processual, centrada em algoritmos de resolução de identidades e equações (José, 2019). Contudo, propostas de ensino apoiadas na história da matemática (Gomes, 2013) e na modelagem matemática (Costa; Lima, 2019) apontam para maior potencial de compreensão conceitual. A literatura sugere que abordagens que valorizam contextos e representações gráficas favorecem uma aprendizagem mais significativa (Fernandes, 2018).

A revisão sistemática de Ferreira e colaboradores (2022) indica que professores do Ensino Médio enfrentam dificuldades em articular conceitos fundamentais (ângulo, razão, função) e em transitar entre diferentes representações. Essa limitação decorre tanto de lacunas na formação inicial quanto de insuficiência em programas de formação continuada. Pesquisas de campo confirmam que práticas docentes tendem a reproduzir o modelo de ensino baseado em exercícios algorítmicos (Silva, 2019).

Estudos empíricos revelam que os alunos apresentam dificuldades na compreensão da medida de ângulos, na diferenciação entre razões trigonométricas e funções e na interpretação gráfica de periodicidade (Costa; Lima, 2019). Essas dificuldades são reforçadas por práticas pedagógicas que privilegiam a resolução



mecânica de problemas em detrimento da exploração de significados (Fernandes, 2018).

Entre as abordagens que demonstram resultados positivos destacam-se: (a) o uso da história da matemática para introduzir conceitos (Gomes, 2013); (b) a modelagem matemática de fenômenos físicos e sociais (Costa; Lima, 2019); (c) a utilização de tecnologias digitais como o GeoGebra (Ferreira et al., 2022); e (d) sequências didáticas problematizadoras (Souza, 2017). Tais estratégias ampliam a compreensão conceitual e promovem maior engajamento dos estudantes.

Uma das abordagens mais discutidas na literatura é o uso da história da matemática para introduzir conceitos. Gomes (2013) apresenta uma sequência didática que insere os alunos em um percurso histórico, permitindo compreender a trigonometria não apenas como um conjunto de regras, mas como uma construção humana ligada a problemas práticos. Na minha visão, essa estratégia contribui para dar sentido ao estudo e pode melhorar a motivação dos estudantes, pois conecta os conteúdos escolares a narrativas que revelam sua utilidade em diferentes épocas.

Outra linha de investigação é a modelagem matemática. Costa e Lima (2019) argumentam que a trigonometria, quando aplicada a fenômenos físicos como ondas sonoras e movimento circular, torna-se mais significativa para os alunos. Eles relatam que o envolvimento dos estudantes aumenta quando há relação entre o conteúdo e o cotidiano. Pessoalmente, considero que essa abordagem reforça a ideia de matemática como ferramenta para explicar o mundo, rompendo com a imagem de disciplina excessivamente abstrata.

O uso de tecnologias digitais, como o GeoGebra, também tem ganhado destaque. Ferreira et al. (2022) apontam que recursos computacionais permitem explorar dinamicamente a variação de ângulos e razões trigonométricas, facilitando a transição entre diferentes representações. Na minha opinião, o papel dessas ferramentas não deve ser apenas ilustrativo, mas sim investigativo: os alunos podem manipular parâmetros, observar padrões e formular conjecturas.

Por fim, destacam-se as sequências didáticas problematizadoras. Souza (2017) defende que propor problemas instigantes antes da formalização matemática estimula a reflexão e o desenvolvimento da autonomia intelectual. Entendo que essa



metodologia é poderosa porque desafia os alunos a pensar antes de reproduzir fórmulas, cultivando habilidades analíticas e críticas.

Assim, considero que a literatura brasileira converge para a necessidade de diversificar as abordagens metodológicas, valorizando significados e contextos. Essa multiplicidade de estratégias pode auxiliar na superação das dificuldades relatadas e promover uma aprendizagem mais profunda e conectada com a realidade dos estudantes.

Apesar dos avanços, persistem lacunas relacionadas à transição entre representações, ao impacto das mudanças curriculares da BNCC, à formação docente e à avaliação da aprendizagem. Esses pontos constituem oportunidades relevantes para investigações acadêmicas em programas de pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática.

A seguir apresenta-se uma matriz que relaciona as principais lacunas de pesquisa identificadas na literatura sobre o ensino da trigonometria no Brasil, associando-as às fontes bibliográficas correspondentes e aos métodos de investigação possíveis. Essa matriz pode servir como guia para a elaboração de projetos de pesquisa no âmbito da pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática.

Quadro 02: Lacunas no ensino de trigonometria e métodos de investigações possíveis para suprir essas lacunas

Lacuna Identificada	Fontes Principais	Possíveis Métodos de Investigação
Dificuldade na transição entre representações (triângulo ↔ círculo unitário ↔ gráfico)	Gomes (2013); Costa; Lima (2019)	Experimentos de sala de aula com tarefas específicas; análise de discurso dos alunos; pré e pós-testes de representações múltiplas
Limitações na formação docente em trigonometria	Ferreira et al. (2022); Silva (2019)	Estudos de caso com professores; entrevistas; análise de programas de formação inicial e continuada
Impacto da BNCC e do Novo Ensino Médio no ensino da trigonometria	Brasil (2018); Sousa (2020)	Análise documental; estudos comparativos entre coleções didáticas; observação de aulas em diferentes redes



Avaliação da aprendizagem e influência do ENEM	Brasil (2018); Sousa (2020)	Análise de itens de avaliações; entrevistas com professores; estudo de desempenho de estudantes em exames
Eficácia de abordagens históricas e de modelagem matemática	Gomes (2013); Fernandes (2018)	Intervenções controladas em sala de aula; análise de desempenho conceitual; estudos qualitativos de engajamento

Fonte: Autor 2024

A análise das lacunas identificadas evidencia que o ensino de trigonometria no Ensino Médio brasileiro enfrenta desafios que se distribuem em três dimensões interdependentes: cognitiva, formativa e avaliativa. No plano cognitivo, a dificuldade dos estudantes na transição entre representações — triângulo retângulo, círculo unitário e gráfico das funções trigonométricas — revela uma aprendizagem fragmentada, marcada pela memorização de fórmulas e procedimentos, mas com pouca compreensão conceitual. Essa desarticulação compromete a construção do significado matemático e limita a capacidade de generalização e aplicação dos conceitos.

Na dimensão formativa, as fragilidades na formação inicial e continuada dos professores reforçam essa abordagem predominantemente procedimental. A ausência de aprofundamento teórico, histórico e epistemológico da trigonometria dificulta a adoção de estratégias didáticas que integrem múltiplas representações e promovam compreensão estrutural do conteúdo. Assim, as limitações formativas repercutem diretamente nas práticas de sala de aula.

No âmbito curricular e avaliativo, as orientações da Ministério da Educação por meio da BNCC e a influência das avaliações externas conduzidas pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), especialmente o ENEM, parecem contribuir para um ensino orientado por competências avaliativas específicas. Embora essas diretrizes busquem contextualização e aplicação prática, observa-se o risco de redução da profundidade conceitual quando o foco se desloca para o treinamento voltado aos exames.



Por outro lado, a literatura aponta potencial significativo em abordagens históricas e em propostas de modelagem matemática como caminhos promissores para fortalecer o entendimento conceitual e o engajamento dos estudantes. Entretanto, ainda são necessárias investigações empíricas mais robustas que validem, de maneira sistemática, a eficácia dessas metodologias.

Assim, fica evidente que superar as dificuldades no ensino da trigonometria exige uma abordagem integrada que articule: (1) o desenvolvimento da compreensão conceitual por meio da conexão entre representações; (2) o fortalecimento da formação docente; e (3) uma reflexão crítica sobre as influências curriculares e avaliativas. Avançar nessas frentes pode contribuir para um ensino de trigonometria mais significativo, reflexivo e alinhado às demandas formativas da Educação Matemática contemporânea.



3 ALGUNS ELEMENTOS DA TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO – TAD

Como já citado anteriormente, o objetivo dessa pesquisa é analisar quais são as implicações que o dispositivo didático Percurso de Estudo e Pesquisa pode ocasionar quando utilizado no ensino de matemática com professores no ensino das relações trigonométricas e de que forma esse percurso pode mobilizar as praxeologias dos professores que ensinam matemática.

Para que esse objetivo seja alcançado faz-se necessário a utilização de alguns conceitos e elementos da Teoria Antropológica do Didático – TAD que fundamentam essa pesquisa. Dessa forma, a ideia é articular e relacionar cada um desses elementos com o objeto matemático, relações trigonométricas, e identificar quais os pontos dessa articulação podem servir de subsídios para a construção e desenvolvimento do Percurso de Estudo e Pesquisa, promovendo assim a aprendizagem dos alunos.

INTRODUÇÃO A TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

A Teoria Antropológica do Didático (TAD) foi desenvolvida pelo Didático e Matemático francês Yves Chevallard e vem ocupando um espaço muito importante na didática da matemática atualmente pois é considerada uma evolução da Teoria da Transposição Didática que além de ampliar e colocar as discussões sobre conhecimento matemático no nível das relações humanas, configurando, nestes termos, uma teoria amparada numa abordagem antropológica, ela focaliza o estudo das organizações praxeológicas didáticas pensadas para o ensino e a aprendizagem das organizações matemáticas. De acordo com Almouloud (2018), a “TAD ocupa hoje uma posição decisiva na investigação em Didática da Matemática e Didáticas de outras áreas de conhecimentos.”

No Brasil, vários pesquisadores em Educação Matemática têm se dedicado ao estudo da TAD e desenvolvem suas pesquisas apoiados em suas ideias. Vale ressaltar que boa parte dessas pesquisas não tem seus resultados divulgados, o que acaba impedindo que esse estudo tenha maior alcance.



Como já dito anteriormente, na TAD a primeira noção que deve ficar bem clara é a noção do objeto. Objeto é qualquer entidade que existe individualmente, ou seja, tudo é objeto. Podemos citar como exemplo o número 7, o nome *sete*. Na situação de uma frase onde “o homem foi a supermercado”, o homem em questão também é um objeto, e ainda, no contexto em que se diz: “vai precisar de muita coragem”, coragem aqui também se caracteriza como objeto. No contexto matemático, a noção de derivada, seu conceito e até seu símbolo também são considerados objetos. Em particular, qualquer produto intencional de atividade humana é um objeto.

Depois de ficar claro a noção de objeto, deve se destacar como segunda noção no contexto da TAD a ideia de *relação pessoal* de um indivíduo x a um determinado objeto. Dessa forma, todas as interações que o indivíduo tem com o objeto é representado através de um sistema cartesiano $R(x, o)$, onde a relação R é o conjunto de todas as interações que o indivíduo x tem com o objeto o . Podemos afirmar que o existe para x se a relação pessoal de x a o é não vazia que denotaremos por $R(x, o) \neq \emptyset$.

Uma terceira noção que deve ser altamente explorada dentro da TAD é a ideia de *pessoa*. Pessoa aqui é a dupla formada pela relação R e o indivíduo x em algum momento da história de x . Não se pode confundir a ideia de pessoa nesse contexto com o real sentido da palavra *pessoa*. Todo indivíduo é uma pessoa. Vale frisar que ao longo do tempo os sistemas de relações pessoas de um indivíduo sofre alterações e, de certa forma, evolui. Os objetos que não existiam passam a existir e outros que existiam deixam de existir. Por exemplo, uma criança que tem medo do escuro quando cresce perde esse medo, mas adquire outros medos quando se torna adulto.

Por fim, quando a relação pessoal de todas as iterações do indivíduo com o objeto é não vazia, o conjunto de todas as razões que especificam a maneira de como o indivíduo conhece o objeto é chamado de Universo Cognitivo de x e será representado por $UC(x) = \{(o, R(x; o)/R(x; o) \neq \emptyset\}$. Almouloud (2018) detalha a ideia de universo cognitivo e como deve ser entendido dentro da TAD. Segundo Almouloud:

Deve-se ressaltar que o adjetivo *cognitivo* não é usado aqui na sua acepção intelectualista atual: eu tenho uma relação pessoal com a minha escova de dente, a máquina de café, a cafeteira, o pedal do freio do meu carro etc. todos os objetos que fazem parte do meu universo cognitivo, em parte, da mesma maneira que, por exemplo, a noção de equação do segundo grau ou a de derivada. (Almouloud 2018, p. 32).



O universo cognitivo de uma pessoa, depois de sua formação passa por um processo de evolução. Para que se possa compreender esse processo de mudança, é necessário acrescentar uma quarta noção fundamental da TAD, que é a ideia de *instituição*. Uma instituição I é um dispositivo social que permite, ou de certa forma até impõe aos seus sujeitos (que ocupam diferentes posições p ofertadas em I) a implementação de maneiras diferentes de pensar e agir. Essas maneiras diferentes de pensar e agir serão chamadas de praxeologias. Como exemplo podemos citar que uma sala de aula é uma instituição, as pessoas presentes na sala de aula são os sujeitos, o ensino e a aprendizagem podem ser caracterizados como objetos, onde as posições essenciais do sujeito são as do professor e do aluno. Nesse mesmo contexto, a escola também pode ser considerada uma instituição.

Como se pode observar, o universo cognitivo de um indivíduo é muito amplo e sofre diversas alterações no decorrer do processo de construção, além disso, não se pode afirmar que o universo cognitivo tende a está pronto e acabado, pois ele está sempre em construção, a depender das instituições que cercam cada pessoa e os objetos ao seu redor. Diante de tudo isso, pode se questionar: como, então, se constitui o universo cognitivo de um indivíduo e como ele muda ao longo do tempo? Almouloud traz a seguinte afirmação em relação a isso:

A relação pessoal de [uma pessoa] x a um objeto o muda – ou é criada, se não existia ainda – pelo encontro de x com o objeto o nas instituições I onde ele vive e onde x ocupa uma determinada posição p que o coloca em contato com o . (Almouloud 2018, p. 32)

Dessa forma, pode-se observar que desde cedo cada indivíduo é sustentado por diversas instituições, como por exemplo, a família, a igreja, a escola etc. tornando-se sujeito. Há ainda outras instituições que influenciam diretamente na construção desse universo cognitivo, como por exemplo, a linguagem. Será essa linguagem que definirá futuras posições do indivíduo a determinados objetos.

De igual modo, a teoria do conhecimento aplicada sobre os indivíduos, ou seja, as relações pessoais dos indivíduos com os objetos, se aplica também as instituições e serão denominadas de *relação institucional*. Assim, dado um objeto o , uma instituição I e uma posição p em I , a relação institucional será denotada por $R_I(p, o)$ e representa a relação dos indivíduos da instituição ao objeto na posição dada. Ainda de acordo com Almouloud:



Ao tornar-se um sujeito de I na posição p , um indivíduo x , que já é uma pessoa dotada de um certo universo cognitivo $UC(x)$, se sujeita às relações institucionais $R_I(p; o)$ que vão remodelar suas relações pessoais: se o existe para os sujeitos de I na posição p , a relação pessoal de x a o tende a parecer a relação institucional $R_I(p; o)$, a menos que x não se revele ser, a este respeito, um “sujeito malvado” de I . (Almouloud 2018, p. 33)

Pode se observar que, de uma forma mais generalizada, as nossas relações pessoais são o resultado da história das nossas sujeições institucionais passadas e presentes. Existe, dessa forma, uma dialética de instituições e indivíduos. Essa dialética fomenta a capacidade que os indivíduos possuem de desenvolver relações pessoais institucionalmente novas e reconhecer criadores de um determinado campo de conhecimento, que pode ser artístico, científico, literário, esportivo etc.

OS PARADIGMAS E SUAS TRANSIÇÕES

Nesse tópico será abordada as ideias de Yves Chevallard em relação aos paradigmas de visita às obras e paradigma de questionamento do mundo e o que é necessário para que o sistema didático proposto faça essa transição entre um paradigma e outro, e de que forma, essa transição pode gerar um aprendizado mais efetivo.

A princípio, deve se definir o que Chevallard chama de paradigma. Paradigma é um contrato que direciona um certo tipo de atividade humana. E contrato, em geral, trata-se de um conjunto de regras que indicam em que consiste a atividade que o contrato governa, qual é seu objetivo e quais são os meios autorizados para essa atividade. Destaca-se aqui o que Almouloud descreve sobre paradigma na visão de Chevallard. De acordo com Almouloud (2022):

Para simplificar sem desfigurar a noção, diremos que paradigma é um contrato que rege um certo tipo de atividade humana. Assim, podemos de um paradigma artístico, um paradigma científico, um paradigma esportivo e, é claro, um paradigma escolar ou um paradigma didático. (Almouloud 2022, p. 27 e 28)

Chevallard (2009b) de forma metafórica chama paradigma de visita às obras (que convencionalmente será chamado de paradigma 1), o paradigma didático tradicional de ensino, no qual os conceitos matemáticos se concebem como um monumento, como algo a ser visitado e admirado, cabendo ao estudante ser um



expectador. Em contraposição Chevallard (2009b) propõe o paradigma de investigação e questionamento do mundo (que nesse texto será chamado de Paradigma 2) e sugere dispositivos didáticos que questionam elementos do ensino escolar tradicional, no qual o professor é o único que deve explicar e transmitir o saber matemático para o estudante. Entre esses dispositivos, destacam-se as Atividades de Estudo e Pesquisa – AEP e os Percursos de Estudo e Pesquisa – PEP. A seguir, será abordado cada um dos paradigmas e como se dá esse processo de transição entre eles.

3.1.1 Paradigma de visita as obras

Para contextualizar os elementos da TAD no contexto dos paradigmas deve-se explorar as ideias que define o paradigma de visita as obras. Vivemos em um mundo em constante mudança, e nesse contexto, os alunos são levados a “visitar” os conteúdos desenvolvidos em sala de aula apresentados pelo professor. Os conteúdos aqui são considerados como obras onde os alunos apenas observam como meros expectadores. De acordo com Almouloud:

... o objetivo é o estudo de obras o pertencentes ao conjunto de obras O... Dito de outra forma, o é considerada como uma obra de grande valor reconhecida como tal pela tradição curricular, e cujo estudo é definido como de alto valor formativo. O estudo aqui, assume a forma de uma “visita” como um museu, onde o interesse pela obra o é por ela e nela mesmo, e não pelo que ela permite fazer e pensar. Almouloud 2022, p. 29)

Um primeiro passo para a evolução do paradigma 1 em direção ao paradigma 2 é a discussão de aplicações da obra o e sua possível utilidade, ou seja, dizer para que serve essa obra e como pode ser utilizada para melhor compreender o mundo. Dessa forma, seja P_1^0 a variante primitiva do paradigma 1 e seja P_1^+ a variante em evolução do paradigma 1 em direção ao paradigma 2. Então, qual seria a diferença entre P_1^0 e P_1^+ ? Na variante primitiva P_1^0 as obras são consideradas nelas mesmas e por elas mesmas, numa abordagem quase estética, totalmente fora de contexto e sem relação alguma com o cotidiano. Já na variante P_1^+ aparecem aplicações dessas obras, quase sempre apresentadas através de exemplos típicos, ou seja, há uma tentativa de relacionar essas obras com a sua utilidade de compreensão do mundo em que se vive. Almouloud(2022) traz uma ilustração que pode exemplificar essa diferença. Segundo ele:



Se a e b são número não nulos, temos a igualdade $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$. Essa é uma obra que supomos que muitos professores de matemática hoje em dia dificilmente citariam uma aplicação verdadeiramente útil que não fosse concebida por causa disso... De um modo geral [essa igualdade] permite transformar uma divisão $\frac{a}{b}$, operação tradicionalmente difícil e considerada erudita, numa multiplicação, nomeadamente $a \times \frac{1}{b}$. Portanto, para calcular $\frac{57}{8}$, calcularíamos $57 \times 0,125$... Essa tecnologia (no sentido da TAD) possibilitou, em particular, fazer divisões pelo número π ... Para desenhar no chão, com uma corda, um círculo de 10 metros de comprimento, é necessário tomar um raio de comprimento $\frac{10m}{2\pi} = \frac{5m}{\pi} = 5m \times \frac{1}{\pi} = 5m \times 0,32 = 1,6m$. (Almouloud 2022, p. 29)

Porém, devido ao envelhecimento das aplicações ilustradas nesse exemplo, a variante P_1^+ acabou se corrompendo, ficando restrita a meras listas de exercícios cujo objetivo era treinar os alunos para que eles fossem capazes de “manipular” a obra o de tal forma que eles não mais aprendiam, mas sabiam fazer, o que garantia o boom domínio de o. Assim, chega-se a uma outra variante do paradigma 1, que será denotada por P_1^{+-} .

Levando em consideração as condições e restrições que afetam a sociedade, ou por assim dizer, a civilização onde a sociedade está inserida, vamos considerar três posições institucionais para uma dada obra o: o criador da obra, o utilizador da obra e, por fim, o visitante da obra. Na variante P_1^0 os alunos são visitantes da obra, onde lhes é apresentada a obra, eles aprendem a conhecer, comentam sobre ela, mas não podem manipular. Na variante P_1^+ os alunos são fomentados a utilizar a obra, mesmo que por alguns instantes, onde manipulam baseado em um “quadro de aplicações”. Por fim, na variante P_1^{+-} deixam de ser supostos utilizadores da obra e voltam a ser visitantes, porém visitantes ativos por maio das manipulações que realizam através dos exercícios associados a obra. Depois de muito se utilizar a variante P_1^{+-} , aplicou-se a ideia de iniciar as aulas com uma atividade destinada a apresentar aos alunos, didática e praxeologicamente, a obra o. Acabara de surgir a variante P_1^{++} , conhecida como ancestral do paradigma 2. Porém, essa “ancestral” do paradigma 2 acabou decepcionado os estudiosos pois estava aquém do que se pretendia alcançar. De acordo com Almouloud:

No entanto, se olharmos para a variante P_1^{++} como ancestral do paradigma 2, é decepcionante. De fato, frequentemente a atividade destinada a apresentar aos alunos [a obra] o tem pouca conexão com o e aparece como um simples aquecimento preparatório para a apresentação subsequente de o pelo professor. A mudança que promove uma variante que denotaremos por P_1^{+++} , conduz ao estudo de uma questão q de um determinado tipo Q, cuja resposta



r elaborada pela classe nas condições e restrições determinadas se baseia essencialmente em recorrer a obra o – que vai mostrar que o “serve” para responder questões do tipo Q. (Almouloud 2022, p. 31)

Guy Brousseau estudou minuciosamente a variante P_1^{+++} em sua teoria das situações didáticas em matemática observando que para alimentar suas atividades de estudos quando estão buscando respostas para o questionamento Q, “eles utilizam seus equipamentos cognitivos e seus equipamentos praxeológicos até então constituídos”. (Brousseau, 1998). Mas não só isso, os alunos também utilizam um conjunto de recursos compostos por obras diversas, materiais e imateriais que constituem o que será identificado por meio $\mathcal{M}$ de estudo.

Outro fator que diferencia a variante P_1^{+++} em relação a variante P_1^{++} é a participação do professor como elemento do meio $\mathcal{M}$. Enquanto na variante P_1^{++} o professor faz diversos questionamentos sem muita informação e fora de contexto, o que remete a um conjunto de perguntas e respostas sem fundamentos que se assemelha a um concurso de adivinhações, na variante P_1^{+++} o professor, durante uma atividade, apenas gerencia, não o conteúdo, mas o desenvolvimento. No conteúdo o professor procura não intervir, enquanto os alunos são encaminhados para a interação com o meio. Nesse contexto, a variante P_1^{+++} foi considerada o quadro de uma revolução didática, basicamente fundamental para a construção de um novo paradigma, chamado de *paradigma de questionamento do mundo*.

3.1.2 Paradigma de questionamento do mundo

Em contraposição ao paradigma de visita as obras, onde o aluno é apenas um observador, sistemático ou não, do conhecimento que se propõe em sala de aula, Chevallard (2009b) propõe o paradigma de investigação e questionamento do mundo e sugere dispositivos didáticos que questionam elementos do ensino escolar tradicional, no qual o professor é o único que deve explicar e transmitir o saber matemático para o estudante.

A ideia inicial do paradigma de observação do mundo, que convencionalmente chamaremos de paradigma 2, é caracterizada pelo fato de o trabalho em sala de aula começar com uma questão q que será investigada pelos alunos, onde se busca uma



aprendizagem baseada em investigação. Do ponto de vista epistemológico, essa variação do paradigma 2, que aqui denotaremos por P_2^0 , constitui uma certa regressão em relação ao paradigma 1, pois por trás de uma questão q , sempre existe uma obra a que é o verdadeiro desafio da aprendizagem. Por outro lado, essa variação, do ponto de vista didático, passa a ser o contemporâneo da promoção de novas formas de estudo, ou seja, se caracteriza pelo fato de se fazer uma investigação.

Vale destacar que a análise superficial dessa variante inicial do paradigma 2 pode direcionar a uma interpretação retrógrada em relação a aprendizagem. A exigência formal de investigar uma questão q leva a propor questões que podem não ter conexão com a obra a ser estudada, ou até mesmo, conexões improváveis, o que levaria ao contexto do paradigma 1. Na variante P_1^{+++} , onde os alunos buscavam sua própria interação com o meio, a partir de determinada obra a se faziam escolhas de uma questão q , muitas vezes difíceis de serem resolvidas pois estavam sujeitas a fortes restrições. Já na variante P_2^0 , o requisito formal de começar com uma pergunta pode remeter ao jogo de adivinhações na variante P_1^{++} . Mas isso parece ter sido fundamental para a evolução dessa variante, muitas vezes inconsistente, do paradigma 2.

Dessa forma, a extrusão formal da variante P_2^0 a partir de sua mudança dar-se-á num contexto de evolução didática com o surgimento de uma nova variante, que aqui denotaremos por P_2^+ . Nesse ínterim, destaca-se “As Atividades de estudo e Pesquisa” (AEP), que são atividades que consistem no estudo de uma questão q que realizada sob certas condições e sob certas restrições, vai levar a uma obra a normalmente determinada de antemão. Almouloud traz um exemplo que ilustra bem essa ideia, quando se pede para determinar graficamente (com régua e compasso) o produto de duas longitudes. Almouloud afirma:

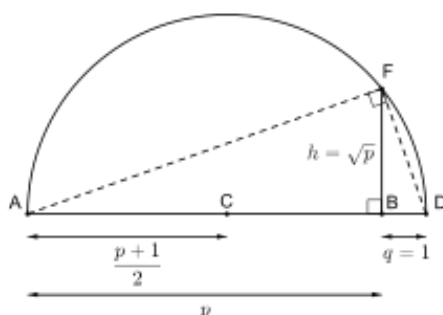
Essa é a questão q . No estudo de q , um primeiro passo é notar que a igualdade $x = a \times b$ não é dimensionalmente homogênea (uma longitude igual ao produto de longitudes). Portanto a reescrevemos $1 \times x = a \times b$. Se não conhecemos nenhum teorema cuja conclusão contém uma igualdade de produtos de longitudes, e se uma pesquisa na literatura disponível não teve sucesso, podemos reescrever a igualdade anterior como uma igualdade de relações, por exemplo $\frac{x}{b} = \frac{a}{1}$. Uma pesquisa da literatura da geometria elementar leva a conjecturar que o teorema de Tales poderia ser a chave para a resposta buscada. (Almouloud 2022, p. 33)



O exemplo citado ilustra o ponto de partida da teoria das Atividades de Estudo e Pesquisa (AEP) e dos Percursos de Estudo e Pesquisa desenvolvidos pela Teoria Antropológica do Didático e deixa ver as sementes de alguns dos principais problemas suscitados pelo desenvolvimento dessa teoria. A AEP relativa ao produto de duas longitudes citadas no exemplo acima quando os alunos alcançarem o seu objetivo: encontrem a obra α . Essa atividade de estudo será denotada por AEP_f . Pode se observar o seguinte nesse contexto exemplificado: a questão proposta q é uma amostra de um esquema de questões $\mathcal{Q}$ que podem ser enunciadas da seguinte forma: “como determinar graficamente o valor de $f(a, b, c, \dots)$ onde $a, b, c, \dots$ são longitudes dadas e f é uma determinada função?” Após a questão $q_1 = q$ pode se propor estudar uma segunda questão, chamada de q_2 em que se busca discutir a função $f(a, b) = \frac{a}{b}$ ou ainda uma terceira questão q_3 em que a nova função a ser estudada seria $f(a) = \frac{1}{b}$, ou ainda a questão q_4 em que se teria uma outra função do tipo $f(a) = \sqrt{a}$ e assim por diante.

O leque de opções que se busca estudar a partir de uma questão geratriz q dá margem para explorar uma série de outras questões que convergem sempre para a resposta r que se busca inicialmente: o teorema de Tales. Por outro lado, ao se considerar a questão q_4 , que se refere a construção de uma longitude, uma exploração mais avançada pode ser realizada a fim de buscar novas respostas a questão inicial. Uma exploração superficial da literatura, sem busca mais aprofundada, permite encontrar, por exemplo um artigo denominado “Teorema de Média Geométrica”, que resolve o problema inicial utilizando outros recursos matemáticos. Uma solução encontra-se na figura abaixo:

Figura 1- Teorema de Média Geométrica



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Teorema_da_m%C3%A9dia_geom%C3%A9trica acesso em 27 de outubro de 2023



Assim, descobrimos através dessa questão uma segunda obra, tão relevante a busca da resposta quanto a primeira. Essa obra trata-se de identificar que a altura h em um triângulo retângulo é a média geométrica dos segmentos p e q que formam a hipotenusa, ou seja, $h^2 = p \cdot q$ ou ainda $h = \sqrt{p \cdot q}$. O resultado esperado é obtido para $p = a$ e $q = 1$, o que remete a solução inicial.

A partir desse exemplo pode-se fazer uma associação entre as Atividades de Estudos com o que aqui denominamos Percurso de Estudo. Basta considerar um conjunto de questões $\mathcal{Q} = \{q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, \dots\}$ colocado à disposição para um estudo em uma classe $[X, y]$, onde X representa os estudantes e y representa o professor. A decisão de estudar $\mathcal{Q}$ cabe a y , após um possível debate na classe $[X, y]$. Nesse debate se busca discutir o que se pretende estudar dentro das questões $\mathcal{Q}$. A ordem em que a turma aborda as questões é proposta pelo professor y , com a concordância do grupo de alunos X . Dessa forma, o grupo de alunos X deve constituir e modificar o meio pelo qual se deseja utilizar para resolver as questões em relações as obras já encontradas.

A transição do AEP para o PEP nos traz um avanço em relação as variantes do paradigma 2. Ao finalizar o estudo de uma questão por uma determinada obra sucede a finalização de todo um conjunto de obras. Nesse contexto, tende a ocorrer o que será chamado de *desfinalização* de seus estudos. Assim, a desfinalização é um fator da adidatização (a linha de limitação entre o didático e o adidático) do estudo, o que torna mais incerto o fato de se questionar sobre as intenções didáticas do professor formuladas em termos de obras a serem visitadas.

Trazer para discussão a ideia de desfinalização abre um leque de ideias que favorecem a manutenção, e ainda mais específico, a construção dos conhecimentos ora listados pelos alunos durante a investigação dos alunos em uma dada questão. A desfinalização é de certa forma um tanto mais assertivo do que a busca incessante por obras que de certa forma, revelem que ferramentas eficazes para responder à questão conduzem a obras não listadas no currículo tradicional. Para Amououd:

De forma geral, esta desfinalização da investigação permite a “triagem” das obras presentes num determinado currículo, fazendo aparecer obras que se encontram “ausentes”, mas, no entanto, úteis e, ao contrário, obras nunca utilizadas para responder as questões que são feitas. Trata-se de um mecanismo importante no processo de redefinição curricular capaz de



Assim, o PEP consiste nessa investigação das obras presentes no currículo escolar e, a partir dessa investigação, traçar caminhos para encontrar as respostas as questões predeterminadas na questão geratriz. A esse percurso descrito para encontrar essas respostas é que Chevallard define como Percurso de Estudo e Pesquisa e que será explanado em detalhes posteriormente. Nesse contexto, surge a nova variante do paradigma 2 que será definida por P_2^{++} .

3.1.3 O paradigma de questionamento do mundo e as organizações didáticas

O conceito de paradigma é bem amplo e tem sido objeto de discussão entre vários teóricos do passado e da atualidade. Presente entre os filósofos gregos, onde a sua maioria usa a palavra como sinônimo de modelo ou exemplo, o conceito de paradigma tomou proporções maiores a partir do século XX quando o epistemólogo Thomas Khun abordou de forma mais específico esse conceito em seu livro “*A estrutura das revoluções Científicas*” de 1983. Nessa obra Khun destaca que um paradigma é feito de hipóteses teóricas gerais e de leis e técnicas necessárias para a sua aplicação que são adotadas por membros de uma comunidade científica. Para Khun:

A tentativa de descobrir a fonte dessa diferença levou-me ao reconhecimento do papel desempenhado na pesquisa científica por aquilo que, desde então, chamo de “paradigmas”. Considero “paradigmas” as realizações científicas universalmente reconhecidas que, durante algum tempo, fornecem problemas e soluções modelares para uma comunidade de praticantes de uma ciência. (Khun 1983, p. 12)

O objetivo não é trazer a discussão o conceito de paradigma e questionar no campo filosofia o que é paradigma didático e como este pode influenciar, ou não, no desenvolvimento do aluno. A ideia é mostrar que filósofos, historiadores, sociólogos e outros que estudaram o campo da educação concordam em observar e analisar a existência de modelos escolares, que certamente são múltiplos, variados e dominantes em uma determinada sociedade e em um determinado período de sua história.



Cabe destacar aqui o segundo dos três cursos de Guy Brousseau na VIII Escola de Verão de Didática da Matemática em 1995, cujo tema foi “*As estratégias do professor e os fenômenos típicos da atividade didática*”. Esse curso ofereceu uma modelagem das “estratégias” observadas na Teoria das Situações Didáticas utilizando quatro tipos de contratos: didáticos, não didáticos, fracamente didáticos e fortemente didáticos, todos envolvendo novos conhecimentos, porém baseados nas transformações de conhecimentos anteriores. Todos eles estão relacionados a ideia de paradigma.

Por outro lado, os paradigmas escolares declaram os termos da atividade educacional a que se referem, ou seja, qual é a sua finalidade e quais são os meios permitidos para o desenvolvimento dessa atividade, destacando ainda o que não pode ser feito para que não haja rompimento de contrato. Esses paradigmas definidos como contratos que tem relação direta com as instituições de ensino resultam na inclusão do estabelecimento escolar na sociedade, como destaca a própria Teoria Antropológica do Didático pela sua escala de níveis de codeterminação didática.

Assim sendo, trazendo de volta a discussão sobre as variantes dos paradigmas abordados nesse texto, a partir da última variação P_2^{++} surgirá uma nova variante, aqui denominada por P_2^{+++} , que traz a discussão os principais problemas da transição do paradigma 1 para o paradigma 2. Nessa variante se busca estudar as organizações didáticas que serão desenvolvidas para alcançar as possíveis respostas da questão geratriz. Nesse contexto podemos citar alguns agrupamentos fundamentais: a reunião geral da classe, onde os alunos e professores se reúnem para fazer um balanço do trabalho realizado e confirmar, modificar ou estender seu programa de trabalho; em seguida, o seminário, onde se busca consolidar as ideias levantadas na reunião geral da classe; e por fim, as oficinas temáticas, cuja ideia é reunir alunos de diferentes classes.

Mas, do que realmente se precisa para questionar o mundo? Para responder a essa pergunta, primeiramente deve-se destacar a composição do saber de cada um de nós, e como essa composição pode afetar a busca por conhecimento e a relação que existe entre o conhecimento e a ignorância. Por exemplo, estudar uma questão inicial como se fosse uma questão geradora abrangente pode envolver uma ou até várias áreas do conhecimento, por mais extensa que seja a matemática. Nesse caso,



a investigação será através de um sistema didático que envolve professores e alunos. Almouloud traz um exemplo que deixa claro essa ideia:

Sem dúvida, esse será o caso se, por exemplo, a [questão inicial for] “Quais são as causas do aquecimento global?” e {como questão secundária} for a questão “Como o aumento da temperatura média depende do nível de CO₂ na atmosfera?” ... A investigação sobre q será realizado por um sistema didático que podemos escrever, como vimos, $S_q = S(X_q, Y_q, q)$, onde $X_q \subseteq X$ et $Y_q \subseteq Y$. Aqui Y_q , idealmente deverá reunir, durante o curso da investigação, um especialista de cada uma das disciplinas que estarão implicada no estudo de q . (Almouloud 2022, p. 49 e 50)

Para combater a visão tradicional e intrínseca do paradigma de visita as obras, é necessário questionar o mundo e ter uma visão mais ampla de tudo que nos rodeia. Para tentar ilustrar essa transição tome por exemplo a definição de paralelogramo. Qualquer professor sabe que as diagonais de um paralelogramo se interceptam no ponto médio. O teorema que justifica essa afirmação também é bem conhecido no meio acadêmico tanto por professores com por alunos. No entanto, o que não se sabe, nem se busca saber atualmente é para que esse teorema é útil ou se até mesmo, quando foi desenvolvido, porque ele foi desenvolvido. De acordo com Almouloud:

A passagem do tempo é destrutiva, e na melhor das hipóteses, parcialmente regenerativa. Qualquer equipamento praxeológico pode aparecer como uma estranha mistura de obras as vezes amputadas de algumas de suas partes. (Almouloud 2022, p. 51)

A busca por essa contextualização entre a matemática e sua aplicação é destacada nas organizações didáticas aplicadas em cada situação definida no paradigma de questionamento do mundo. Tome por exemplo a seguinte situação e que o professor propõe em sala de aula o seguinte problema: “*Quantas caixas serão necessárias para embalar 250 chocolates, de modo que cada caixa tenha exatamente 6 chocolates?*” Primeiro, deve-se observar qual a relação que o aluno tem com a situação criada e de que forma isso pode influenciar na busca do resultado esperado. Imagine então que o aluno seja substituído por um funcionário de uma loja de doces e que o professor seja substituído pelo chefe do funcionário. Qual a relação do funcionário com a situação criada? Essa situação é vista como uma situação não didática cuja busca por resultado dependo de outras fatores alheios ao ambiente escolar.



OS MODELOS PRAXEOLÓGICOS DE REFERÊNCIA

A noção de modelo epistemológico de referência surgiu durante um seminário de investigação com Josep Gascón e colegas da Universidade Autônoma de Barcelona em 1990, onde foram estudados artigos sobre os níveis de Van Hiele em geometria. Esses níveis correspondem ao desenvolvimento do que é considerado “pensamento geométrico” e existem cinco deles (Braconne-Michoux, 2014; Burger; Shayghnessy, 1986):

- Nível 0: Visualização
- Nível 1: Análise
- Nível 2: Abstração ou dedução informal
- Nível 3: Dedução formal
- Nível 4: Rigor

A ideia inicial desse modelo reflete o pensamento geométrico desenvolvido pelos alunos ao se deparar com os conceitos da geometria euclidiana. Nesse modelo, o nível 0 corresponde ao reconhecimento visual das figuras de acordo com sua aparência. A partir desse reconhecimento, as figuras se tornam portadoras de propriedades, mas estas propriedades não são ordenadas. Esse é o nível 1. Já no nível 2, as propriedades são ordenadas dentro de uma figura ou entre figuras, mas não são organizadas em demonstrações. O passo seguinte corresponde a dedução e construção das demonstrações. Dessa forma, o nível 3 é alcançado quando certas propriedades são deduzidas de outras, organizadas em teoremas ou axiomas, e as deduções são explicitadas em forma de demonstrações. O nível 4, em última análise, corresponde a possibilidade de comprara sistemas baseados em diferentes axiomas e estudar várias geometrias sem o apoio de modelos concretos.

Os níveis de Van Hiele se baseavam em uma concepção particular da geometria, onde a ideia principal consistia em identificar as propriedades das figuras, organizá-las e usá-las para deduzir outras propriedades usando axiomas e teoremas já construídos. Trata-se de um modelo epistemológico que define o que é geometria, sem questioná-la. Por outro lado, todo e qualquer pesquisador deve assumir uma postura diferente e tentar entender como os alunos adquirem o pensamento geométrico e como esse pensamento pode influenciar na compreensão do que se



busca ensinar. Para Bosch (2019), atualmente os sistemas de ensino não questionam o que ensinar, se limitam apenas em buscar maneiras de como ensinar. Bosch afirma:

Esses modelos costumam ser próximos – ou, pelo menos compatíveis – aos oferecidos pelas instituições de ensino, o que os impede de serem questionados e ajuda para neutralizá-los. Já dissemos que essa naturalização aproxima o problema da pesquisa ao do ensino: não se questiona o que se deve ensinar, limitando-se a buscar boas maneiras de fazê-lo. (Bosch 2019, p. 98)

Vale destacar ainda que esse modelo epistemológico de referência, onde se busca questionar o que ensinar e o porquê se ensinar é pouco questionado e debatido atualmente, o que de certa forma acaba impedindo que seja desenvolvido com base em trabalhos de pesquisa, o que resulta em falta de investimento nos resultados encontrados. Ainda de acordo com Bosch:

Podemos dizer que muitas vezes os modelos epistemológicos relativos aos saberes a serem ensinados se escondem sob o modelo didático: não se pergunta o que é geometria e porque se deve ensiná-la – e aprendida – pergunta-se apenas como pode ser mais bem ensinada e aprendida. (Bosch 2019, P. 98)

A Teoria das Situações Didáticas, que é um modelo teórico, apresentando conteúdos matemáticos, que ilustra algumas situações fundamentais e que começa a servir de fundamentação teórica para novos trabalhos de pesquisa em didática e para a prática de professores de matemática. Ela nos traz um contraexemplo claro a esse respeito desse modelo epistemológico, não só pelo alcance que se atribuiu aos processos de teorização em didática, mas pelo fato de propor um modelo geral para descrever as atividades matemáticas ou os conhecimentos matemáticos, que tornou possível explicar – e, portanto, discutir, questionar, testar experimentalmente e desenvolver – os modelos epistemológicos necessários a pesquisa em didática. Esse modelo geral é bem conhecido, em termos de situações fundamentais definidas como desafios frente a um meio, com as diferentes dialética ou fases. Guy Brousseau é muito claro sobre isso:

Uma das abordagens da didática da matemática consiste em modelar não só os conhecimentos que se quer ensinar ou aqueles que um sujeito aprende, mas também as condições em que se manifestam. As situações são modelos mínimos que “explicam” como tal conhecimento intervém nas relações particulares que um sujeito estabelece com um meio para aí exercer uma determinada influência. (Brousseau 2000, p. 4)

Ainda de acordo com Brousseau, existem várias epistemologias – a do professor, a do aluno, a dos pais ou cidadãos, a dos professores de áreas específicas



– e as pesquisas em didática devem desenvolver seus próprios modelos epistemológicos para conseguir alcançar todos os outros. É um campo de reflexões para fazer progredir o ensino da matemática, onde o professor, com a fundamentação dessa teoria, orienta o aluno para que possa desenvolver atividades que lhe permitam apropriar-se de novos saberes. Dessa forma, a didática da matemática seria para os professores o que a ciência médica é para os médicos.

Existe uma confusão entre o modelo epistemológico e o modelo didático e isso tem limitado a divulgação internacional da teoria das situações didáticas. Vale salientar que o modelo das situações desempenha um papel duplo a esse respeito porque definem os conhecimentos pelos processos que permitem construir e não pelo que eles realmente são. É exatamente essa fusão entre o didático e o matemático que está na essência da teoria das situações didáticas e explica a relação direta da epistemologia experimental com a didática da matemática.

Ao observar os modelos epistemológicos da teoria das situações didáticas pode-se diferenciar um modelo geral em termos de situações - um modelo teórico - de modelos específicos em termos de situações ou sequências de situações fundamentais. Nesse contexto, a decomposição dos conhecimentos modelados não assume o mapeamento escolar clássico dos saberes dos vastos campos da matemática a serem ensinados. Esses modelos também permitem identificar elementos que não existem nos modelos epistemológicos escolares dominantes, sendo o exemplo mais conhecido o da enumeração.

Se tomarmos como referência a escala de codeterminação didática podemos dizer que os modelos epistemológicos propostos vão muito além do assunto ou do tema a ser abordado em sala de aula, buscam além do que se pretendem e compreendem campos do conhecimento no nível do setor ou domínio que ele se encaixa. Em relação a essa escala de codeterminação, Bosch afirma:

Em qualquer caso, o nível de questionamento é o de toda a disciplina, da qual nenhuma das divisões institucionais existentes é assumida sem um primeiro questionamento... Uma teoria didática difere de abordagens mais gerais em educação pelo fato de não tomar a construção institucional de conhecimentos e saberes como dados, não como objetos de estudos e, portanto, de questionamento e modelação. A exigência de cientificidade da didática nos leva a considerar os modelos epistemológicos elaborados com entidades regulamente submetidas a priva de fatos e de desenvolvimentos teóricos. (Bosch 2019, p.100)

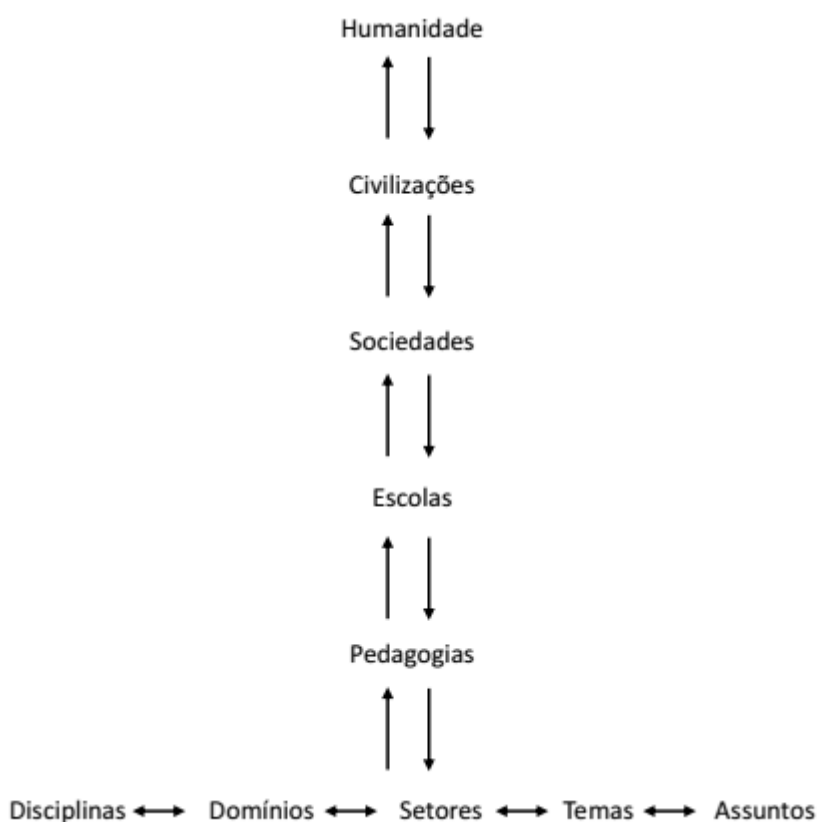


Chevallard (2002) define como fenômeno de codeterminação a relação entre as organizações matemática e didática. Assim situa um determinado saber numa escala hierárquica na qual cada nível se refere a uma realidade e determina a ecologia dessas organizações.

Os desenvolvimentos recentes da teoria antropológica (Chevallard, 2002, 2004, 2005) fornecem, sob o nome de níveis de codeterminação didática, uma modelagem que engloba essas condições e restrições segundo as quais determinam-se as organizações matemática e didática. (Chacón, 2008, p 73)

Os níveis se interrelacionam mutuamente, e vão desde os níveis mais genéricos para os mais específicos, conforme a figura 02. De acordo com Chacón(2008), há uma correspondência entre as organizações matemática e os níveis de codeterminação didática. Os níveis que se encontram posteriores ao nível da disciplina se encontram organizados de forma agregada a uma organização matemática complexa crescente (pontual, local, regional e global).

Figura 2- Escala de codeterminação didática



Fonte: BOSCH 2019



Cada um dos níveis relacionados busca avaliar e compreender as influências e restrições geradas pelas organizações matemáticas envolvidas e as organizações didáticas relacionadas a esses níveis, possibilitando assim reestruturar as condições de ensino e aprendizagem. Tomando como exemplo o nível escola, é fácil verificar que existem outros níveis superiores que regem o currículo a ser estudado na escola e quais serão os procedimentos necessários para que esse currículo seja aplicado na escola. Podemos citar as secretarias de educação, e ainda, os documentos oficiais existentes como a Base Nacional Comum Curricular.

Já em relação aos níveis inferiores a escola existe as disciplinas, os domínios, os setores, os temas e os assuntos. Cada um deles está relacionado as especificações individuais de cada nível. Por exemplo, dentro da disciplina matemática tem-se como tema a trigonometria, que ainda pode ser setorizada em diversas partes como a trigonometria no triângulo, a trigonometria no círculo, as funções trigonométricas, dentre outros. E ainda dentro dos setores esses níveis podem ser agrupados por temas como razões trigonométricas, lei dos senos e dos cossenos, etc.

3.1.4 Modelos praxeológicos de referência na TAD

A Teoria Antropológica do Didático propõe um modelo geral das atividades humanas em termos de praxeologias; um modelo para a dinâmica da reconstrução de praxeologias em termos de momentos didáticos, bem como um modelo para a dinâmica do estudo e pesquisa de questões problemáticas. Esses modelos são denominados Modelos Epistemológicos de Referência pois delimitam a necessidade de desenvolver descrições específicas dos saberes que deverão ser ensinados. De acordo com Bosch, o termo “epistemológico” não reflete seu real significado no contexto da TAD e pode ser associado ao conhecimento que se busca no aluno, podendo inclusive ser substituído por outro termo. Bosch afirma:

O termo “epistemológico” aqui se refere a “saber”. Uma vez que a TAD concebe todo saber como uma organização praxeológicas, podemos facilmente chamá-los de *modelos praxeológicos de referência*. Essa última expressão permite mais generalidade quando se abordam sistemas didáticos em torno de “saberes” que não são considerados como tais, por exemplo aprender a amarrar os nós dos sapatos, organizar uma excursão nas montanhas ou trocar cordas de uma guitarra elétrica. (Bosch 2019, p. 101)



Vale destacar que um Modelo Praxeológico de Referência é construído como uma ferramenta para estudar uma questão de pesquisa. Deve ficar bem claro que esse modelo de forma alguma deve ser considerado um modelo único de determinado objeto de conhecimento, mas um possível modelo entre tantos outros disponível na construção desse saber. Esse modelo deve ser testado de forma empírica e em constante revisão, e é por meio de sua descrição que ele poderá ser modificado de forma adequada a partir dos resultados obtidos durante a análise ou implementação das organizações matemáticas.

Os modelos descritos até aqui podem ser relacionados com as ideias de paradigmas discutidas no início desse capítulo. Está no paradigma de questionamento do mundo é incluir a construção de um modelo praxeológico de referência associada a uma determinada obra como um elemento de desconstrução e reconstrução do que deve ocorrer durante o processo de investigação. Dessa forma, deve considerar que a construção do modelo praxeológico deve ser incluída em todo o percurso de investigação das respostas procuradas de uma determinada questão geratriz.

O PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA - PEP

Como já foi abordado nesse texto, o Percurso de Estudos e Pesquisa (PEP) é o principal elemento do paradigma de questionamento do mundo. De acordo com Chevallard (2009) o Percurso de Estudo e Pesquisa é o processo de questionar o mundo, processo esse que surge a partir de uma questão geratriz, que por sua vez, traz no seu processo de investigação várias outras questões secundárias derivadas da questão inicial.

Chevallard (2010) afirma que existe um PEP quando um sistema didático estuda determinada questão Q. No entanto, deve se destacar que isso não é o suficiente para que seja caracteriza um PEP. Devem ser levadas em consideração outros fatores igualmente importantes. De acordo com Almouloud, três grandes princípios estruturam um PEP. Almouloud (2021, p. 443) destaca:

1. É organizado em torno de uma questão geradora;



2. Sua estrutura se dá em torno de seis gestos básicos: observar, analisar, avaliar as respostas, desenvolver, divulgar e, ao final, defender a resposta;
3. Faz-se necessária uma pilotagem do PEP, regulando-se a sua dialética fundamental, pois ele é associado ao esquema herbartiano [desenvolvido inicialmente por Johann Friedrich Herbart] e só existe quando se estuda uma questão Q a fim de encontrar uma resposta R, configurando a dialética de perguntas e respostas.

Chevallard chama a atenção para os cuidados a serem tomados em relação a duas fragilidades do PEP, que são o desejo do professor de controlar, em um primeiro momento, os caminhos a serem percorridos na pesquisa e investigação e a tentativa de chegar de forma rápida ao objetivo previamente determinando, não levando em consideração dessa forma todo o processo de investigação na qual foi produzida as respostas. Assim, uma das ideias para vencer essas dificuldades é propor um projeto a longo prazo.

Ainda de acordo com Chevallard (2009a), para tentar dar vida ao paradigma de questionamento do mundo é preciso estabelecer o movimento de investigação na medida do possível e sempre que possível, pois as questões que surgirem durante o PEP podem alterar tanto a resposta como o caminho a ser percorrido no processo de sua construção. Para que se possa compreender o que caracteriza o percurso, com ele pode ser representado e as funções que integram esse sistema, deve se destacar a dialética encontrada na evolução desse processo e como ele deve ser detalhada nesse percurso.

A quantidade de dialéticas envolvidas na condução de um PEP tem sido motivo de discussão entre alguns autores. No entanto, Chevallard as classifica por sete diferentes tipos. São elas:

[...] do tema e fora do tema; o paraquedista/caçadores de trufas; caixas pretas e caixas claras; conjectura e evidência ou mídia e meios; a leitura e a escrita; da difusão e da recepção. Acrescentada recentemente uma sete dialética conhecida como dialética do indivíduo e do coletivo. (Chevallard 2009a, p. 3)

Por outro lado, autores como Viviana Angélica Costa, Marcelo Arlego e Maria Rita Otero concordam com Chevallard, porém acrescentam ainda mais duas e destacam nove dialéticas existentes na evolução de um percurso de estudo e



pesquisa. No texto intitulado *Las dialécticas em um Recorrido de Estudio e Investigación para la enseñanza Cálculo Vectorial em la Universidad* (2015) Costa et al. deixa bem clara essas dialéticas, justificando a presença de cada uma delas. É possível traçar um paralelo comparativo entre essas dialéticas e como elas se relacionam uma com as outras. No quadro abaixo temos bem clara essa ideia:

Quadro 04 – As dialéticas do Percurso de Estudo e Pesquisa

COSTA et al (2015)	CHEVALLARD (2009a)
Dialética de estudo e investigação (ou de perguntas e respostas)	...
Dialética do individual e do coletivo	Dialética do individual e do coletivo
Dialética da análise e síntese	...
Dialética entrar e sair do tema	Dialética tema e fora do tema
Dialética do paraquedista e do caçador de trufas	Dialética do paraquedista e do caçador de trufas
Dialética das caixas pretas e das caixas claras	Dialética das caixas pretas e das caixas claras
Dialética conjectura e prova (ou média-meio)	Dialética conjectura e evidência (ou média-meio)
Dialética da leitura e escrita	Dialética da leitura e escrita
Dialética da difusão e da recepção	Dialética da difusão e da recepção

Fonte: Costa et al 2015 e Chevallard 2009a

Do quadro acima pode se perceber uma quase identidade entre as dialéticas. Embora não apareça na relação de Chevallard a dialética de perguntas e respostas, ele deixa claro em outros textos a presença dessa dialética no percurso. A seguir, tem-se um comentário sobre cada uma dessas dialéticas.

1ª dialética: Tema e fora do tema

Essa dialética ocorre quando no decorrer do PEP, na busca de uma resposta a uma pergunta geratriz ocorre a explanação e a inserção de diferentes temas nesse processo de construção de respostas a questão inicial. Além do conteúdo foco do



trabalho, surgem questões derivadas à questão inicialmente proposta pelo professor, cujo caminho para respondê-las pode sair do tema, ou mais que isso, sair da disciplina. Por esta razão o PEP pode deixar de ser monodisciplinar passando a ser codisciplinar ou até mesmo multidisciplinar. É preciso vigilância, para que o tema estudado e as obras visitadas não levem os envolvidos no PEP a percorrer um caminho cuja construção leve a uma resposta que não faça sentido. Como afirma Costa et al (2015, p. 115), “[...] as perguntas geratrizes podem dar lugar a amplos percursos de estudo e investigação, que poucas vezes podem circunscrever-se em um âmbito limitado de uma única disciplina.”

Isso pode ser facilmente ilustrado com o seguinte exemplo: um percurso que tem com questão geradora “*Como é o ensino de matemática para cegos?*”. Os alunos podem trazer vários temas externos a disciplina como lista de objetos que ajudam o cego a se locomover, utensílios de cozinha ideias para cegos, jogos matemáticos que facilitam o desenvolvimento do raciocínio lógico dos cegos com o soroban... havendo a necessidade de o professor corrigir o percurso, pois tudo isso não está relacionado com a questão geradora. Para a construção dessa sequência é necessário conhecer e utilizar diferentes metodologias para abordar conteúdos matemáticos e listar uso de materiais manipuláveis para que os cegos possam ter acesso ao objeto de conhecimento que se pretende estudar.

2ª dialética – paraquedista e caçadores de trufas

Tem esse nome em referência, pois associa de forma metafórica, a visão que os paraquedistas têm ao saltarem. Eles têm uma visão bem ampla, uma visão do todo. Assim, essa dialética representa visão ampla que o professor precisa ter do problema e do caminho a ser percorrido para solucionar esse problema. Costa et al (2015, p. 127) explicam que “[...] os paraquedistas realizam uma exploração de extensas áreas dos territórios[...] enquanto caçadores de trufas trazem a luz tesouros enterrados”.

Ao se desenvolver um percurso com alunos do curso de licenciatura em matemática na disciplina de didática pode-se propor a construção de uma sequência didática para o ensino dos números negativos para uma turma de 7º ano do Ensino Fundamental. Para a construção dessa sequência de ensino os alunos deverão



promover debates sobre os aspectos que constituem uma sequência didática, com conceitos de números inteiros, aplicações em situações do cotidiano, metodologias diferenciadas para tal abordagem, entre outros elementos.

O exposto acima, caracteriza uma visão geral e ampla do contexto, como a visão de um paraquedista. Por outro lado, durante a elaboração do material a ser utilizado na sequência didática, deve-se levar em consideração as diferentes aprendizagens dos alunos, avaliar aplicação da sequência numa perspectiva inclusiva, e desenvolver material específicos para ser aplicados a esses alunos. Tudo isso se configura a metáfora do caçador de trufas. Em certos momentos é necessário o distanciamento (como do paraquedista), em outros, faz-se necessária a aproximação detalhada (como do caçador de trufas).

3ª dialética – caixas pretas e caixas claras

Essa dialética se refere ao processo segundo o qual se estabelece qual conhecimento que é pertinente e precisa ser elucidado, enquanto certos saberes devem ser deixados num certo nível de “cinza”. Esta relaciona-se aos conhecimentos pertinentes ao ensino desejado, que são necessários para dar base a um novo conceito que deverá ser incorporado a estrutura cognitiva do aluno. Essa relação entre os conhecimentos novos e os conhecimentos que os alunos já possuem de forma empírica precisam ser estabelecidos durante todo o percurso, pois irão contribuir de forma significativa na obtenção da resposta procurada. Esse processo de relação entre conhecimento, ora lançando mão dos conhecimentos prévios, ora dos construídos durante o percurso irão promover a construção de outros conhecimentos e a revisita aos conhecimentos já construídos durante o percurso.

Retomando o exemplo já citado sobre o ensino da matemática para cegos pode ser levado em consideração que durante as pesquisas para a construção do percurso algum aluno se deparou com a seguinte questão derivada: “*É possível um cego morar sozinho?*” ou ainda “*Será possível um cego conseguir cozinhar?*” Pode até se concordar de forma unânime que é possível um cego morar sozinho, mas a curiosidade que surge ao saber como isso aconteceria, com ele manusearia os utensílios direciona os alunos a uma nova pesquisa, na qual irão construir novos



conhecimentos sobre como se daria essa vivência, encontrando inclusive imagens de objetos adaptados a utilização de pessoas cegas. Esses novos conhecimentos iriam dialogar com os conhecimentos já adquiridos, antes e durante o percurso.

4ª dialética - conjectura e evidência ou mídia e meios

Como o próprio nome deixa claro, essa dialética consiste em buscar mídias alternativas para encontrar as respostas derivadas a questão inicial. São consideradas mídias os sistemas de representação do mundo ou parte deles, como um programa de TV, sites, livros etc. Considera-se importante a utilização dos meios para se comunicar e obter informações de um ambiente apropriado para que as respostas obtidas sejam postas a prova, validadas por meio de instrumentos que possibilitam uma discussão crítica das respostas encontradas. De acordo com Costa:

[...] essa dialética faz referência a necessidade de dispor, para a elaboração de sucessivas respostas provisionais ao PEP, de algumas respostas preestabelecidas acessíveis por intermédio das mídias (construções elaboradas para dar respostas a perguntas elaboradas, talvez, diferentes das trazidas no processo de estudo) e, portanto, devem ser de certa maneira, “desconstruídas” e “reconstruídas” em função das próprias necessidades. Para isso e por isso, vão necessitar de outros tipos de meios, instrumentos indispensáveis para pôr aprova a validade dessas respostas. (Costa et al 2015, p. 149)

Ao retornar ao exemplo citado sobre a construção da sequência didática para o ensino de números inteiros, uma possibilidade é o uso de laptops e celulares para realização de pesquisas, o que permite a busca de informações complementares relativas ao conjunto dos números inteiros, buscando inclusive softwares que possibilitem os alunos aplicarem os números inteiros em situações de jogo.

5ª dialética – leitura e escrita

Durante o percurso existe o surgimento das questões derivadas, que são questões que corroboram para a elucidação da questão geratriz. Ao encontrar um conjunto de respostas para essas questões, eles devem expor questionamentos críticos em seus argumentos, tanto oral quanto escritos, possibilitando a oportunidade de promover novos questionamentos a resposta dada. Tudo isso favorece o



desenvolvimento de uma análise crítica das fontes de onde se obteve as informações e até mesmo dos resultados encontrados, pois esta análise se torna relevante para a construção da resposta procurada. Todo o desenvolvimento do PEP é composto por perguntas e respostas, onde em alguns casos, a própria resposta encontrada passa a ser um novo questionamento a ser investigado.

Um exemplo da promoção dessa dialética seria no desenvolvimento de uma atividade sobre grandezas e medidas onde o professor leva para a sala de aula um texto informativo contendo em seu conteúdo diversas informações sobre algumas unidades de medidas inseridas no contexto da abordagem publicitária que o texto traz. A partir desse texto, o professor solicita aos alunos a leitura de textos relacionados ao que foi disponibilizado em sala. Por meio das discussões realizadas em sala de aula, os alunos teriam que disponibilizar aos colegas uma síntese do conteúdo que está sendo discutido. Durante essas discussões existe a possibilidade de os alunos exporem suas ideias e sua compreensão do tema proposto por meio da realização de tarefas preestabelecidas, nas quais podem ser complementadas ou questionadas pelos próprios colegas ou pelo professor.

6ª dialética – difusão e recepção

Essa dialética está relacionada aos resultados obtidos pelos alunos e a forma como eles irão difundir e defender, de maneira crítica e argumentativa, esses resultados, contribuindo assim para a construção do conhecimento de todos. De acordo com Costa et al (2015), o procedimento de condução dessa dialética direciona os alunos a difundir a resposta já apresentada pelos alunos e os conhecimentos construídos pelos alunos na aquisição dessa resposta possuem uma relação direta com a atividade matemática a ser desenvolvida. Costa sustenta que:

[...] é o processo que conduz a difundir e defender a resposta desenvolvida pela comunidade de estudo. Os saberes não são importantes por si só [...], mas são produto da atividade matemática da comunidade de estudo. (Costa 2015, p. 155).

Considere o desenvolvimento de um PEP sobre múltiplos e divisores onde os alunos devem procurar como resposta de uma questão geratriz “Que situações do cotidiano estão relacionadas a aplicação desse conteúdo?”. Durante o



desenvolvimento desse percurso os alunos são divididos em grupos para destacar suas ideias já selecionadas em uma pesquisa prévia solicitada pelo professor em uma aula anterior. Ao apresentar suas ideias, os alunos precisam organizar seus posicionamentos e argumentar sobre eles em sua defesa, inclusive podendo reconsiderar seu posicionamento quando for necessário. Depois, cada grupo elabora um texto síntese para ser apresentado aos demais colegas, momento em que será possível a continuação do debate inicial, de forma que a síntese elaborada pelos grupos pode inclusive ser complementada ou questionada pelos demais colegas.

7ª dialética – indivíduo e coletivo

Ao desenvolver um PEP cada integrante do processo tem suas responsabilidades já preestabelecidas e determina um papel importante como indivíduo na construção da sequência de ensino. Por outro lado, a sequência de ensino já se caracteriza pelo coletivo, pois está relacionado ao grupo de alunos que busca respostas a uma questão inicial. Essa dialética relaciona essas responsabilidades atribuídas tanto ao coletivo quanto ao individual.

No exemplo anterior, ao solicitar dos alunos que busquem informações sobre a aplicação do conteúdo múltiplos e divisores, o professor atribui responsabilidades a cada um dos alunos, tanto no individual como o coletivo. Além disso, os grupos são formados por alunos mais questionadores, alunos que levam material para sala de aula como computador e tablet para fundamentar suas ideias, alunos que direcionam e trazem a discussão assuntos realmente relacionados ao tema e ainda, e em alguns casos, acontece de um determinado grupo perder o foco e começar a inserir assuntos alheios a discussão. Eles formam o coletivo e esses papéis surgiram do próprio grupo, não foi orientação do professor, que está direcionando a discussão, surgiram naturalmente.

8ª dialética – análise e síntese

A TAD sustenta que a Didática deveria ser definida como a ciência da difusão do conhecimento. Nesse ínterim, fazer didática seria fazer pesquisas, produzir peças



de conhecimento e organizar essas peças em termos de corpo de conhecimentos. Didática está relacionada a alguém que se esforça em todos os sentidos para que um outro indivíduo aprenda alguma coisa. De acordo com Chevallard:

a Didática estuda trabalhos que, socialmente, são questões didáticas; gestos didáticos que são ou podem ser feitos sobre eles, assim com os efeitos do encontro de estudo e aprendizado associado a esse gesto. Didático refere-se, portanto, ao conjunto de gestos didáticos de cada sociedade. (Chevallard 2013, p. 1)

Dessa forma, a atividade de ensinar matemática é uma atividade humana e pode ser sempre descritas em termos praxeológicos, ou seja, a prática está associada a uma técnica, que por sua vez, está associada a uma tecnologia, que por sua vez está associada a uma teoria. A junção de todos esses elementos direciona a praxeologia. A dialética da análise síntese refere-se, portanto, a análise praxeológica e didática e a síntese, praxeológica e didática. No centro do TAD tudo pode ser descrito em termos de praxeologias. As dialéticas do PEP, considerados gestos de estudos na investigação, são praxeologias. O ato de pensar e agir dialeticamente também pode ser descrito em termos praxeológicos. Para Costa et al:

Toda análise didática supõe uma análise praxeológica e toda análise praxeológica supõe uma análise didática. Para compreender uma realidade praxeológica (prática, técnica, tecnologia e teoria) é indispensável realizar uma análise didática. (Costa et al 2015, p. 150)

9ª dialética – das perguntas e respostas

Essa dialética acontece quando existe o surgimento de novas perguntas, sendo essas derivadas a partir da investigação inicial. A busca por respostas a essas perguntas caracteriza a construção de resultados parciais, que fazem parte do percursos. Esses resultados podem ser conceitos matemáticos e expressões ou frases que eram indicadores de uma atividade de estudo e pesquisa.

A codificação dessa dialética pode ser observada em frase do tipo: “várias propostas foram debatidas...”, ou ainda “depois de argumentar e validar suas conjecturas...”. Isto indica que havia entre os alunos, uma troca de ideias, argumentos e propostas. No caso citado sobre qual aplicação teria os múltiplos e divisores em situações do cotidiano para iniciar o estudo da questão geratriz, pode se observar que a codificação dessa dialética também pode ser observada nas questões derivadas:



Qual a importância do conceito de múltiplos? É necessário saber o conceito de divisor para lajear uma área retangular?

Depois de analisar cada uma dessas dialéticas, destaca-se que elas devem ser consideradas já no momento da construção do dispositivo didático que norteará o desenvolvimento do PEP, e podem ter sua mobilização acionada tanto pelas tarefas que seguem as questões (geratriz e derivadas) quanto pelas estratégias metodológicas escolhidas. Como a variação dos objetos de conhecimento não mudam no mesmo ritmo, a evolução do percurso passa por períodos mais lentos e outros mais rápidos. Por esse motivo, é possível identificar as leis gerais da dialética do Percurso de Estudo e Pesquisa.

PRAXEOLOGIAS MATEMÁTICAS DE UM PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA

A concepção que apresentamos sobre o praxeologia é aquela apresentada por Chevallard (2005) que diz que essa noção não somente diz respeito ao como fazer uma determinada tarefa, mas também o quê e como o sujeito pensa a respeito dessa tarefa. Isso mostra claramente que os aspectos cognitivos são levados em consideração tanto quanto aos aspectos institucionais e tal noção não só é importante na compreensão da antropologia da didática como da própria noção mais geral de didática enquanto ciência difusão do conhecimento.

Praxeologia é uma noção muito importante no âmbito da TAD. Em didática da matemática esse termo é também conhecido como organizações matemáticas e faz alusão aos objetos matemáticos em termos de tarefa, técnica, tecnologia e teoria. Isso se justifica nas praxeologias dos sujeitos de uma determinada instituição, por exemplo, quando se propõe atuar sobre a incompletude da atividade matemática institucional (Lucas et. Al. 2014).

Quando nos referimos a atuação sobre a incompletude da atividade matemática queremos dizer que é preciso ao menos garantir o desenvolvimento de dois momentos didáticos nas instituições que abrigam saberes matemáticos, como as escolas e universidades, dentre outras, a saber: o momento de trabalho da técnica e o tecnológico-teórico (Bosh, Gascon, 2010).



Uma questão muito importante foi compreender como ocorreria a reconstrução praxeológica docente na instituição que integra a investigação. Pensar nas praxeologias passava necessariamente por proposição de situações didáticas e de algumas noções a elas associadas. Assim tomamos a noção de variáveis didáticas e essas foram mais importantes para o trabalho proposto no percurso de estudo e pesquisa. Dessa forma as psicologias deveriam estar ligadas a tarefas específicas, podendo estas viabilizarem o surgimento de técnicas diferentes e explicações diferentes para elas. Dessa forma, a manipulação das variáveis e seus valores têm forte poder de gerar condições para o desenvolvimento da reconstrução praxeológica.

Nesse contexto, vamos apresentar neste trabalho elementos de investigação a respeito de reconstrução praxeológica matemática de professores que atuam na Educação Básica, de forma mais específica estamos abordando as praxeologias em torno do objeto de conhecimento trigonometria e suas relações no triângulo retângulo e qualquer, fato esse que se dá em turmas do 1º ano do Ensino Médio.

Nesse estudo busca-se observar os efeitos de uma proposta de tentativa de reconstruir ferramentas matemáticas e como essas ferramentas pode se integrar na escolha dos professores ao desenvolver esse objeto de conhecimento matemático, através de um percurso de estudo e pesquisa. Assim pode-se observar que esse trabalho com praxeologias matemáticas, nesse contexto, evidenciou a relação entre aspectos institucionais e cognitivos na medida em que o fazer e o que se pensava sobre o que fazer foram discutidos com os participantes.

O quadro a seguir sintetiza a estrutura teórico-metodológica que fundamenta a investigação, explicitando os níveis de mobilização conceitual e analítica empregados na tese, bem como sua função na resposta à questão de pesquisa.

Quadro 05 – Estrutura teórico-metodológica da investigação

Dimensão	Elementos mobilizados	Função na estrutura da tese	Operacionalização na pesquisa
Estrutura epistemológica	Paradigma da visita às obras; Paradigma do questionamento do mundo	Fundamenta a compreensão dos modelos institucionais de ensino da matemática	Análise da possível transição paradigmática a partir da implementação do PEP



Ferramentas conceituais	Objeto; Relação pessoal; Instituição	Permitem compreender a natureza institucional do saber e a relação dos professores com o objeto 'relações trigonométricas'	Análise da relação professor–saber e das condições institucionais que a moldam
Ferramentas de modelização	Praxeologia (T, τ , θ , Θ); Modelo Epistemológico de Referência (MER); Modelo Praxeológico de Referência (MPR)	Modelizam o saber matemático e as práticas docentes	Construção do MER e do MPR para comparação entre praxeologias iniciais e mobilizadas
Dispositivos didáticos	AEP (Atividade de Estudo e Pesquisa); PEP (Percurso de Estudo e Pesquisa)	Estruturam a intervenção formativa e investigativa	Implementação do PEP como dispositivo de mobilização e confronto praxeológico
Instrumentos analíticos	Dialéticas (mídia/meio; perguntas/respostas; estudo/pesquisa); Escala de codeterminação didática	Permitem analisar as dinâmicas do sistema didático	Identificação das condições e restrições institucionais que influenciam as práticas docentes
Elementos metodológicos	Sistema didático S(X;Y;Z); Variáveis didáticas; Meio; Análise a priori; Experimentação; Análise a posteriori	Estruturam o desenho metodológico da investigação	Organização da implementação, coleta e análise dos dados

Fonte: Elaboração própria, com base na Teoria Antropológica do Didático.

A investigação fundamenta-se na Teoria Antropológica do Didático, proposta por Yves Chevallard, mobilizando um conjunto articulado de ferramentas conceituais, instrumentos de modelização, dispositivos didáticos e instrumentos analíticos.

No plano epistemológico, a análise orienta-se pela distinção entre o paradigma da visita às obras e o paradigma do questionamento do mundo, compreendidos como estruturas que organizam as práticas institucionais de ensino. No plano praxeológico, procede-se à modelização do saber por meio da construção de um Modelo Epistemológico de Referência e de um Modelo Praxeológico de



Referência, os quais permitem analisar as organizações matemáticas e didáticas envolvidas no ensino das relações trigonométricas.

O Percurso de Estudo e Pesquisa constitui o dispositivo central da intervenção, funcionando como mecanismo de mobilização e possível reconfiguração das praxeologias docentes. Sua implementação é analisada à luz das dialéticas didáticas e da escala de codeterminação, possibilitando a identificação das condições e restrições que incidem sobre o sistema didático.

Metodologicamente, a investigação organiza-se em análise preliminar, planejamento a priori, experimentação e análise a posteriori, articulando variáveis didáticas, meio

e sistema didático na construção e interpretação dos dados.

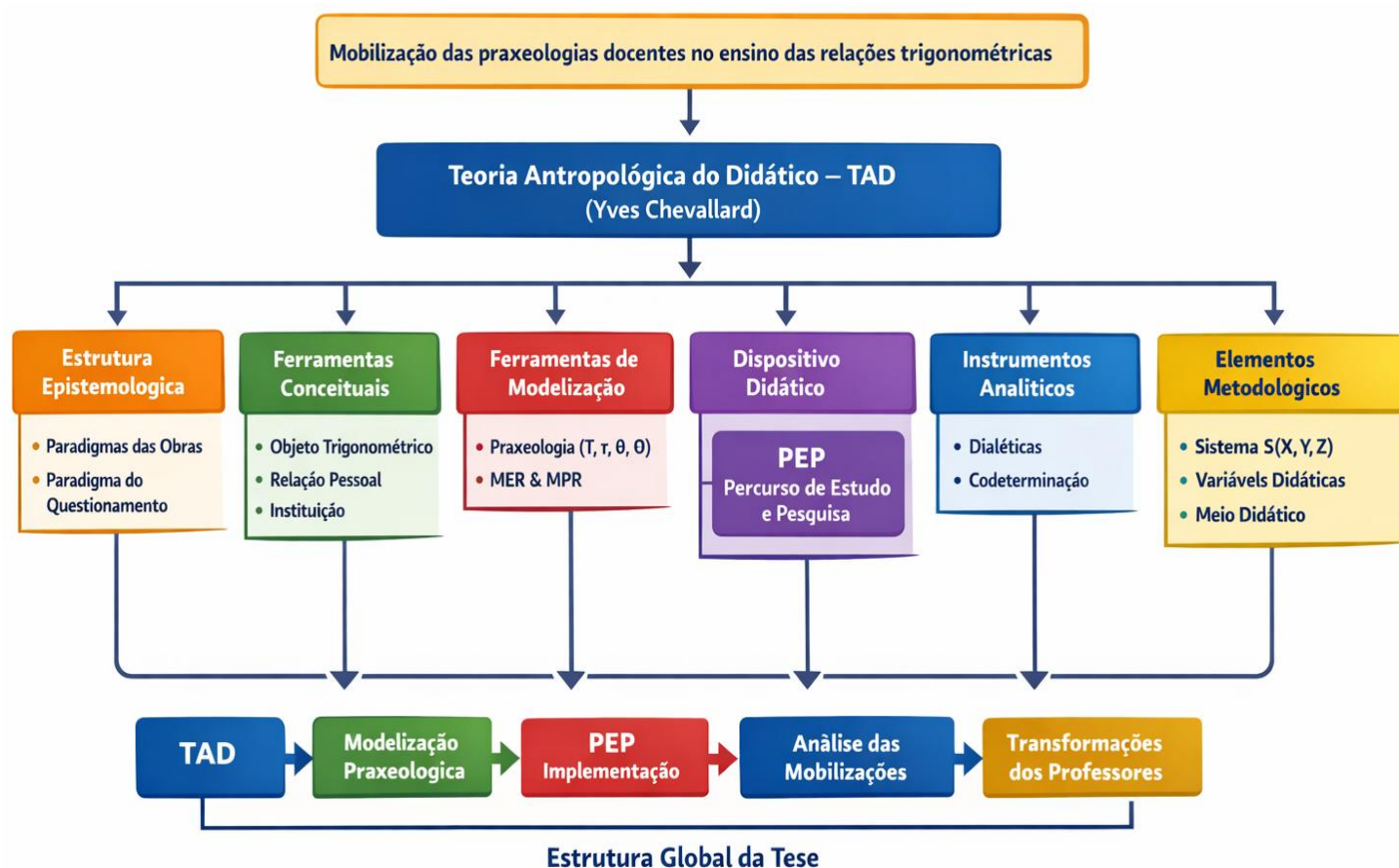
A tese opera em três níveis articulados:

- **Nível epistemológico** → compreensão da natureza do saber trigonométrico.
- **Nível praxeológico** → modelização das práticas docentes.
- **Nível didático-institucional** → análise das condições e restrições que moldam essas práticas.

O PEP atua como **dispositivo de tensão epistemológica**, promovendo o confronto entre praxeologias cristalizadas e um modelo de referência fundamentado na TAD. O mapa conceitual abaixo ilustra esse direcionamento.



Figura 3- mapa conceitual em forma hierarquizada



Fonte: Elaboração própria, com base na Teoria Antropológica do Didático.

Dessa forma ressaltamos as possibilidades do uso de dispositivos didáticos com o PEP na reformulação das praxeologia dos professores, como forma de aprofundar as questões relativas à Epistemologia da Matemática, que contribuem de forma significativa no processo de reconstrução de ferramentas matemáticas, além do despertar para a postura investigativa do professor tanto no que se refere à elaboração das tarefas quanto na busca de solução para elas.



4 O DESENVOLVIMENTO DO PEP PARA O ENSINO DA TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO

O mundo atual está repleto de monumentos turístico e comercial que se destacam por sua altura elevada em meio a um ambiente totalmente singular. Entre esses monumentos pode se destacar a Torre Eiffel. A torre tem 330 metros de altura, aproximadamente a mesma altura de um edifício de 81 andares, e é a estrutura mais alta de Paris. Sua base é quadrada, medindo 125 metros de cada lado. Foi a primeira estrutura do mundo a ultrapassar a marca dos 200 e 300 metros de altura.

Burj Khalifa Bin Zayid (em árabe: برج خليفة; "*Torre do Khalifa*"), anteriormente conhecido como Burj Dubai, é um arranha-céu localizado em Dubai, nos Emirados Árabes Unidos, sendo a mais alta estrutura e, conseqüentemente, o maior arranha-céu já construído pelo ser humano, com 828 metros de altura e 160 andares. Sua construção começou em 21 de setembro de 2004 e foi inaugurado no dia 4 de janeiro de 2010. Foi rebatizado devido ao empréstimo feito por Khalifa bin Zayed al Nahyan, xeique do emirado de Abu Dhabi, depois que este emprestou dez bilhões de dólares para evitar que o emirado de Dubai desse um calote em investidores de uma de suas principais companhias, a Dubai World.

No Brasil, tem o Cristo Redentor, uma estátua que retrata Jesus Cristo, localizada no topo do morro do Corcovado, a 709 metros acima do nível do mar, com vista para parte considerável da cidade brasileira do Rio de Janeiro. Feito de concreto armado e pedra-sabão, tem trinta metros de altura (uma das maiores estátuas do mundo), sem contar os oito metros do pedestal. Seus braços se esticam por 28 metros de largura e a estrutura pesa 1145 toneladas.

Na realidade local, na cidade de Boa Vista, estado de Roraima também existem monumentos que se destacam por sua altura elevada. Entre eles tem-se o Mirante Edileuza Lóz. Inaugurado em 20 de dezembro de 2020 o Mirante Edileusa Lóz, localizado no complexo Parque do Rio Branco, maior obra turística de Roraima, integra o novo cartão postal de Boa Vista. Tem 120 metros, sendo o ponto de observação mais alto de Boa Vista e da região Norte, a parte superior do mirante, tem 250m² e fica a 93 metros de altura.



Figura 4- Mirante Edileuza Lóz



Fonte: Autor 2024

Ao observar esses números e fazer uma análise mais específica surgiu a ideia de discutir a questão geradora: “*Como chegar a esses números, ou seja, o que é necessário para calcular a medida de distâncias inacessíveis*”? Durante o planejamento do PEP foram desenvolvidos estudos, tanto para a escolha da questão geratriz como também um planejamento prévio do que poderia ocorrer em sala de aula durante o desenvolvimento do percurso. A ideia central é encontrar uma questão geratriz que possa explorar de forma significativa todos os conceitos que se busca desenvolver sobre o objeto de conhecimento matemático relações trigonométricas no triângulo e que promovesse uma discussão nas turmas de 1º ano do Ensino Médio das escolas estadual da cidade de Boa Vista – RR.

Durante o processo investigativo e a realização do estado da arte foram encontrados no Catálogo de Teses e Dissertações da Capes um total de 640 teses sobre trigonometria, sendo abordadas de forma geral, que envolvia qualquer uma de suas áreas. Já em relação a Teoria Antropológica do Didático, foram encontradas 272 teses, abordando qualquer área de conhecimento. Ao realizar o filtro dessas teses a área de matemática, esse número reduziu para 89 trabalhos.

Por outro lado, ao especificar mais ainda os trabalhos pesquisados nesse repositório, das 272 teses relacionadas a Teoria Antropológica do Didático, apenas 33 abordavam o Percurso de Estudo e Pesquisa como metodologia de pesquisa. E dessas 33 pesquisas, apenas 8 relacionavam a TAD, o PEP e o Ensino de Matemática. Esses trabalhos estão relacionados abaixo:



1. Percurso de Estudo e Pesquisa no conceito de função: analisando o processo de ensino e aprendizagem e as influências na formação do professor de matemática;
2. Dispositivo de pesquisa e formação profissional PEP-FP/TAD: constituição do conhecimento docente para o ensino de geometria analítica plana do ponto e da reta;
3. Estudo das funções seno e cosseno por meio de um modelo didático alternativo integrado ao Geogebra;
4. Noções de estatística e probabilidade na construção de um portfólio como dispositivo didático;
5. Um Percurso de Estudo e Pesquisa a distância em uma formação continuada de professores de matemática para o ensino de quadriláteros;
6. Possibilidades e limitações de micropercursos de estudo e pesquisa em geometria: uma experiência de formação continuada com professores da rede pública;
7. Construção de um Percurso de Estudo e Pesquisa para formação de professores: o ensino de cônicas;
8. Um Percurso de Estudo e Pesquisa para abordar conceitos da didática da matemática em uma perspectiva inclusiva.

Já na Biblioteca Digital Brasileira de teses e dissertações, após realizar os mesmos filtros aplicados no repositório anterior, foram encontrados 11 trabalhos relacionados a TAD, PEP e Ensino da Matemática. Porém, 8 deles se repetiam em relação ao catálogo da CAPES. Os outros 3 trabalhos estão listados abaixo:

1. Encontros, desencontros, afetos em um Percurso de Estudo e Pesquisa em matemática: questionamentos do mundo em meio à crise;
2. A integração de construtos didáticos à prática docente: a matemática para operar com a aritmética básica;
3. Construção de um modelo epistemológico de referência considerando as análises das relações institucionais acerca do objeto matemático área;

Depois de realizar o estado da arte em relação ao tema proposto nesta pesquisa, alguns trabalhos inspiraram a escolha dessa questão geratriz. Como a tese de Benito (2019) que abordava o estudo das cônicas, a tese de Rodrigues (2019) que



abordava o estudo das funções e a tese de Oliveira (2020). Todos esses trabalhos desenvolveram um Percurso de Estudo e Pesquisa para consolidações dos conceitos matemáticos por eles propostos. Porém, nada foi encontrado em relação as relações trigonométricas no triângulo (retângulo ou qualquer)

As dificuldades encontradas nas salas de aula em relação ao processo de ensino e aprendizagem, tanto da parte do professor, em ensinar de forma dinâmica e não sistemática, bem como dos alunos em consolidar o que está sendo ensinado e relacionar com o universo em que vive evidenciam diversas problemáticas. Esse trabalho visa relacionar o ensino da trigonometria, voltada aos alunos do 1º ano do Ensino Médio a partir dos estudos das relações trigonométricas no triângulo, que é um pré-requisito fundamental para se compreender as funções trigonométricas posteriormente.

Estudos realizados por Costa (1997), Mendes (2001) e Pereira (2012), entre outros, descrevem as dificuldades no ensino e na aprendizagem dos conteúdos trigonométricos. Assim, eles apontam que essas restrições vão se acumulando ao longo de todo o Ensino Fundamental, desde os conceitos de ângulos, já no 6º ano, até os conceitos de funções trigonométricas, no Ensino Médio. Essas dificuldades acabam chegando ao Ensino Superior. De acordo com Costa (1997), esse episódio é semelhante a uma bola de neve em que os alunos se enroscam nas dificuldades, mas continuam rolando a bola que vai aumentando de tamanho conforme vai adentrando nos conteúdos com o passar dos anos de escolaridade.

É importante frisar que a trigonometria não é um simples tema de uma componente curricular, mas é, especificamente, um ramo da Matemática que serve para o homem compreender, entender e interpretar a natureza. Em meio a esse contexto, diferentes abordagens sob essa temática, estão ligadas, em muitas vezes, não somente as disciplinas da Educação Básica, mas também ao Ensino Superior por meio das disciplinas de Álgebra, Álgebra Linear, Álgebra Vetorial, Cálculo, Física, Geometria, Geometria Analítica, entre outras.

A trigonometria plana ensinada na Educação Básica trata, também, da determinação dos elementos de um triângulo qualquer. De acordo com Abbot:



assim, O termo trigonometria deriva das palavras gregas que significa “triângulo” e “medir”. Assim, foi chamado porque, em seus primórdios, estava envolvida principalmente com o problema de “solução de triângulo”. Entenda-se por isso o problema da determinação de todos os lados e ângulos de um triângulo quando só alguns deles são conhecidos. (Abbot 2004, p. 11).

Como objetivo de verificar quais sequências didáticas para o ensino de trigonometria eram mais eficientes para introduzir seus conceitos Costa (1997) elaborou e aplicou sequências para alunos do 1º e 2º anos. O trabalho trouxe importantes contribuições no que tange à análise dos erros e dos acertos ao se trabalhar com as atividades. O aprendizado das funções trigonométricas exige um alto nível de abstração por parte do estudante, mas isso pode ser facilitado com o uso de atividades manipulativas, às quais são intituladas de concretização. Ainda de acordo com Costa (1997), é necessário que os professores façam uso de recursos didáticos para assimilação do conteúdo permitindo que o processo de ensino e aprendizagem, em sala de aula, ocorra de uma forma dinâmica, eficiente e prazerosa. Pereira (2012) apresenta uma pesquisa sobre o alcance e as limitações de uma intervenção didática, tendo como tema funções trigonométricas, direcionada ao ensino noturno, por meio de representações gráficas.

Em síntese, esses dois últimos autores citados convergem em suas conclusões que para ter um bom aproveitamento no ensino de trigonometria, o educador deve entender a elaboração do conhecimento do educando, permitindo a este o desenvolvimento de habilidades de raciocínio, reflexão, questionamento e argumentação, para, em seguida, se for necessário, fazer intervenções, orientá-lo e chamar a atenção para a importância da exatidão do raciocínio sobre as conclusões obtidas. Essa concepção pode possibilitar que os discentes aprendam com o processo de investigação que será proposto em sala de aula, refletindo sobre o que estão aprendendo, como vão aprender e para que aprende.

DESENVOLVIMENTO DO PEP E COLETA DE DADOS

4.1.1 O PEP com os professores

O PEP em tela, foi desenvolvido em dois momentos. Em um primeiro momento foi feito o acompanhamento e formação de dois professores que aceitaram participar



da pesquisa. Embora a quantidade de sujeitos participantes possa ser pequena, já descaracteriza a ideia de PEP solitário. Com esses dois professores foram feitos encontros semanais de forma remota, através de softwares e aplicativos de vídeo chamada (Google Meet e Whatsapp) para as formações, desenvolvimento do PEP e construção do Modelo Praxeológico de Referência.

Na tese de Albuquerque (2021), o modelo utilizado por ele para a construção do Percurso foi através de plataformas virtuais de reunião como Google Meet, pois na época havia restrição de contato social devido ao isolamento da COVID-19. No entanto, Albuquerque (2021) afirma que mesmo não havendo literatura que contemplasse tal modalidade, foi possível construir um sistema didático para implementação de um PEP remoto para a formação de professores, sem prejuízos a sua pesquisa.

Vale destacar a utilização do modelo de investigação diagnosticado para mobilizar as praxeologias dos professores a partir dos elementos da TAD, usando como objeto de conhecimento a trigonometria no triângulo. De acordo com Chevallard (2009), para abordar uma formação questionadora e investigativa precisamos definir um modelo teórico que permite mobilizar as praxes dos professores.

Esse modelo surge a partir de uma abordagem de questionamento do mundo através de um Percurso de Estudo e Pesquisa que se desenvolve no contexto de sistemas didáticos formado em torno das questões norteadoras e das praxeologias utilizadas pelos professores. Assim, o PEP será formado pelos professores p_1 e p_2 que formam o conjunto P dos sujeitos da pesquisa.

A questão geratriz a ser objeto alvo das respostas procuradas pelos sujeitos, que chamaremos de Q_0 , é: *“como desenvolver uma praxeologia inovadora que favoreça o ensino da trigonometria no triângulo para os alunos do 1º ano do ensino médio?”* Entende-se pelo “inovador” uma situação diferente do contexto escolar diário dos alunos, buscando aqui não uma práxis nova e desconhecida no meio científico, mas uma nova maneira de abordar o objeto de ensino de forma mais atraente para os alunos e que, de certa forma, desperte o interesse e favoreça a aprendizagem.

Em outras palavras, o que se pretende buscar é a discussão de como construir uma maneira de abordar o ensino de trigonometria que permita ao professor



compreender o saber matemático envolvido nesse objeto e relacionar com o currículo escolar, considerando as condições e restrições envolvidas no processo.

Neste sentido, foi desenvolvido um ambiente de estudo, com os elementos p_1 e $p_2 \in P$, sob a orientação e supervisão do pesquisador que chamaremos de (X), em que pudéssemos produzir pelo menos uma maneira de elaborar um dispositivo didático capaz de trazer resposta a questão geratriz proposta.

Para isso, constituímos o sistema didático $S(P, X, Q_0)$ que necessitou de ferramentas, de recursos, e de um *milieu* didático específico que chamaremos de M. Entende-se por *milieu* o meio, o sistema no qual o aluno age de maneira independente por meio de ação e retroação na situação didática.

O sistema didático serve para que os sujeitos que o compõem possam identificar e aprender a usar, a fim de produzir uma resposta R, e que Chevallard (2009a) representa pelo que ele chama de esquema simplificado de Herbart (recebe esse nome em alusão ao filósofo e educador alemão Herbart (1776 - 1841)) e é representado por:

$$[S(P; X; Q_0) \rightarrow M] \rightarrow R$$

Esse *milieu* didático foi construído durante o percurso baseado nas respostas derivadas da questão geratriz e a partir das praxeologias utilizadas pelos professores elementos de P. Foram discutidos alguns textos e obras com o intuito de fomentar a busca da resposta R a questão geratriz. Essa resposta deve ser fundamentada na elaboração de um modelo praxeológico capaz de analisar as dimensões do ensino da trigonometria e sua aplicação em outras áreas do conhecimento.

Para construção e validação das respostas provisórias que chamaremos de $R_1, R_2, R_3, \dots$ foram utilizados os livros didáticos adotados pela escola para uso durante o ano letivo. A partir dessa análise, o objetivo é identificar tarefas que incentivem os alunos a desenvolverem técnicas de resolução, sendo para isso utilizados recursos e tecnologias que serão fundamentadas em teorias matemáticas.

As tarefas devem fomentar os alunos a buscarem respostas de forma que facilitem a construção de seu próprio conhecimento. Para Almouloud (2007) as tarefas propostas aos alunos devem ser equilibradas, não podendo ser difícil de modo a



impedir que os alunos consigam avançar, nem fácil impossibilitando que haja o processo de retroação do conhecimento.

Dessa forma, o sistema herbartiano utilizado para a busca da resposta R a questão geratriz Q_0 pode ser sistematizado da seguinte forma:

$$[S(P; X; Q_0) \rightarrow \{R_1, R_2, \dots, R_n\}] \rightarrow R$$

Depois de estabelecidos os elementos do sistema herbartiano que constituem o PEP, deve ficar claro que o principal fator para determinar o seu desenvolvimento é a discussão e questionamentos sobre o saber matemático sobre o objeto de conhecimento Relações Trigonométricas, levando em consideração as experiências vividas pelos professores P a partir de suas práxis.

O percurso utilizado foi um dispositivo didático e metodológico que objetivava fomentar os professores envolvidos a partir de encontros de formação continuada a discutir organizações matemáticas e modelos de referência que pudessem ser aplicados em sala de aula, com o intuito de mobilizar as práxis dos elementos envolvidos sobre o ensino das relações trigonométricas no triângulo.

Vale destacar que esse Modelo Praxeológico de Referência será construído como uma ferramenta para estudar a questão geratriz Q_0 . Deve ficar bem claro que esse modelo de forma alguma deve ser considerado um modelo único para o ensino das relações trigonométricas, mas um possível modelo entre tantos outros disponíveis na construção desse saber.

É importante frisar que esse modelo será testado de forma empírica e em constante revisão, e é por meio de sua descrição que ele poderá ser modificado de forma adequada a partir dos resultados obtidos durante a análise ou implementação das organizações matemáticas.

A proposta é desenvolver uma investigação das práticas dos professores de matemática que atuam na rede pública de ensino a partir de uma reflexão dos elementos sobre as diferentes maneiras de enfrentar as condições e restrições inerentes do ensino da matemática, a qual se constitui a partir do Percurso de Estudo e Pesquisa.



Esse percurso será construído através de uma ação reflexiva, considerando a prática do saber matemático, que será explorado através de tarefas e técnicas de resolução de tarefas desenvolvidas pelos próprios alunos, e do saber fazer matemático, que será examinado através do uso de uma tecnologia e de teorias que fundamentam todo o percurso.

As formações se deram através da plataforma Google Meet por meio de vídeo conferência. Em alguns encontros, foi utilizado o aplicativo WhatsApp, também por meio de vídeo conferência. Foram realizados 7 encontros com duração entre 90 e 120 minutos com a participação dos dois professores que aceitaram participar da pesquisa.

Segue agora o relato de como ocorreram os encontros, as discussões, os avanços e recuos, desde a escolha da questão norteadora, bem como as ideias a serem executadas para elaboração de um modelo de referência que possa ser desenvolvido em sala de aula para construção de um percurso, objetivando o ensino do objeto relações trigonométricas, favorecendo assim, um aprendizado mais coeso e estruturado.

Primeiro encontro: Nesse momento foi realizada a explanação de toda a proposta da pesquisa. Depois de apresentada a ideia da pesquisa e do objeto de conhecimento a ser estudado e desenvolvido em sala de aula, foi lançada aos professores a questão geratriz do percurso: *“como desenvolver uma praxeologia inovadora que favoreça o ensino da trigonometria no triângulo para os alunos do 1º ano do Ensino Médio?”*

Em seguida foi discutido o que se entende por praxeologia a luz da TAD e o que se busca com a ideia de inovadora. Depois de abordar os principais elementos da TAD, os professores puderam relatar as principais problemáticas encontradas em sala de aula, de forma geral, onde puderam relatar desde as condições de trabalho, até as restrições de aprendizagem encontradas. Feitos esses apontamentos foi destacado alguns aspectos da relação que pretendíamos estabelecer com os sujeitos da pesquisa de forma que fosse possível construir o sistema didático proposto.

Em seguida, foi solicitado que os elementos respondessem um questionário que serviria como diagnóstico de conceitos de algumas teorias de aprendizagem que pudessem refletir na sua prática em sala de aula (o questionário utilizado segue em



anexo). O questionário foi um dos instrumentos utilizados para a construção dos dados dessa pesquisa. Esse instrumento era formado por questões objetivas sobre teorias, práticas e formação continuada de professores e como esses elementos influenciam ou não na aprendizagem dos alunos.

O questionário proposto foi elaborado na ocasião em que a pesquisa foi submetida ao CEP para aprovação. Como o questionário era uma exigência do PEP, foi necessária sua elaboração. Sendo assim, na ocasião da conversa com os professores, entendeu-se que poderia utilizar o questionário para uma espécie de sondagem em relação ao conhecimento do elementos investigados sobre a TAD, o PEP e outros termos relacionados as Teorias de Aprendizagem.

Depois de recolher os questionários respondidos, foi feito o agradecimento e encerrado o encontro.

Segundo encontro: o segundo encontro foi iniciado com alguns questionamentos sobre as respostas apresentadas pelos sujeitos ao questionário respondido no encontro anterior. Foi necessário esse momento para que pudessem ser esclarecidos os fatores que levavam as respostas na escala, surgiram por entendermos que em algumas questões as respostas obtidas na escala proposta precisavam ser justificadas. Em outras questões onde foram marcadas mais de uma opção, que eles pudessem justificar uma ordem de prioridade nas opções assinaladas. Assim, os questionamentos foram feitos individualmente, esclarecendo aquilo que não foi compreendido tanto pelos sujeitos e também por nós.

Uma situação que se destacou nesse momento foi o fato de os participantes não terem conhecimento sobre o Percorso de Estudo e Pesquisa, o que se julgou necessário fazer um esclarecimento quanto a esse dispositivo didático e como funciona a sua aplicação metodológica. Foi importante deixar claro que todo percurso se inicia com uma questão norteadora, que já foi apresentada a eles no primeiro encontro. A partir da questão norteadora, os participantes vão em busca de sua resposta e, durante a busca por essa resposta a questão geratriz, eles perpassam por outros questionamentos, respostas derivadas, dialéticas envolvidas e praxeologias executadas.



Depois foi feito um paralelo do percurso aplicado aos professores para o percurso que será aplicado aos alunos, onde a busca por uma resposta a questão geratriz é a mesma, mas os caminhos a serem percorridos serão diferentes. Em ambos os casos será necessário tarefas, técnicas, tecnologia e teoria. Em seguida, foi questionado de forma direta quais eram as principais dificuldades dos alunos no âmbito do ensino da matemática e quais as unidades temáticas (Álgebra, Geometria, Aritmética, Trigonometria ou Números e Funções Reais) os alunos apresentavam mais restrições.

Por fim, foi levantado o seguinte questionamento: como os conteúdos de matemática são abordados por vocês em sala de aula? Essa pergunta levou a discussões mais específicas sobre a prática dos professores em sala de aula, o que eles buscam ao ensinar determinados objeto de conhecimento e como se dar o processo de verificação de aprendizagem. Em relação aos conteúdos, ficou claro que os professores seguiam o Documento Curricular proposto pelo estado e as adaptações eram feitas de forma pontual. Após essas discussões viu-se a necessidade de abordar alguns elementos da TAD, em particular, do PEP.

Nesse sentido, começou uma discussão levantando alguns questionamentos que evidenciavam compreender a importância da Didática da Matemática no processo de aprendizagem e como esse estudo evoluiu ao longo do tempo. Citando a Teoria das Situações Didáticas e depois a Teoria Antropológica do Didático, foi sugerido algumas literaturas para que os professores pudessem aprofundar o conhecimento para o próximo encontro.

Entre as literaturas sugeridas foi utilizado o artigo **‘Percurso de estudo e pesquisa como metodologia de pesquisa e de formação’**, dos autores Saddo Almouloud, José Messildo, José Carlos e Teodora Pinheiro, publicado na Revista de Educação da Universidade Federal do Vale do São Francisco, em 2021. Outro texto utilizado foi o artigo **“As organizações didáticas e matemáticas nos livros didáticos de matemática utilizados na escola básica brasileira”**, dos autores Cileda de Queiroz e Silva Coutinho e Amari Goulart, publicado em 2021 na Revista Educação Matemática em Pesquisa.

Terceiro encontro: Até esse momento já estava definido o objeto de conhecimento



matemático e a questão norteadora. Dessa forma, foi prudente iniciar as discussões para a construção do modelo de referência que seria utilizado em sala de aula. No entanto, os professores haviam feito a leitura de algumas obras sugeridas no encontro anterior e foi necessário retomar a discussão para sanar algumas dúvidas. Depois das dúvidas sanadas, foi proposto encaminhamentos para a elaboração de um roteiro que pudesse contemplar o objetivo da pesquisa. Diante de tudo isso passamos a considerar três situações.

A primeira situação a considerar é em relação ao objeto de ensino a ser compreendido pelos alunos, no caso, as relações trigonométricas e como o aporte teórico considerado nessa pesquisa norteiam essa relação. Para Chevallard, Bosh e Gascón (2001), os problemas e restições devem ser centrados no objeto e em torno de seus saberes, e não nos sujeitos.

Uma segunda situação que deve ser levada em conta é o processo de questionamento do saber, o que Chevallard (2009b) chama de paradigma de investigação e questionamento do mundo que sugere dispositivos didáticos que questionam o objeto de ensino relações trigonométricas, e esse objeto de ensino deve passar por uma análise minuciosa durante esse questionamento.

Temos ainda uma terceira situação a ser observada que sugere uma abordagem sobre as dimensões envolvidas no saber do objeto de conhecimento. As dimensões epistemológicas, ecológicas e econômicas devem fazer parte de uma relação direta com o objeto de conhecimento relações trigonométricas e é fundamental que os professores tenham conhecimento suficiente sobre o objeto afim de estabelecer essa relação forte.

Depois de uma longa discussão sobre essas situações que devem estar diretamente relacionadas com o objeto de conhecimento, partimos para a construção do percurso de estudo onde os professores possam buscar respostas secundárias que possam surgir a partir de suas práticas, resultantes dos confrontos de praxeologias em diferentes instituições e diferentes momentos de suas experiências docentes, cujo objetivo é postular respostas novas por meio da reconstruções de praxeologias.



Dessa forma, elegemos algumas questões que depois de serem estudadas poderão se constituir em maneira de fazer e justificar o saber matemático do objeto Relações Trigonométricas, o qual o professor possa colocar em ação durante a sua prática, e assim ter condições de apresentar soluções eficientes e eficazes para muitos dos problemas que enfrenta e/ou enfrentará.

Por fim, foi elaborada algumas questões derivadas que irão nortear a busca pela resposta R a questão geratriz Q_0 . As questões elaboradas pelos professores com a orientação do pesquisador estão listadas abaixo e surgiram a partir dos questionamentos levados nas discussões, levando em consideração a prática dos professores.

- Q_1 . Que condições podem estar relacionadas a prática docente que favorecem a compreensão do objeto de conhecimento Relações trigonométricas?
- Q_2 . O que é importante conhecer sobre o objeto de conhecimento Relações trigonométricas a nível de Ensino Básico que servirão como pré-requisitos para o 1º ano do Ensino Médio?
- Q_3 . Qual a relação que o objeto de conhecimento Relações trigonométricas tem com situações do cotidiano?
- Q_4 . Qual a justificativa vivenciada em sala de aula para a restrição dos alunos ao objeto de conhecimento Relações Trigonométricas?

O encontro encerrou com a elaboração das questões secundárias e sistematização de suas aplicações.

Quarto encontro: O encontro foi iniciado com a retomada das questões elaboradas no encontro anterior. Depois da leitura e recapitulação das questões, foi definido por qual questão deveria se iniciar a investigação. Depois de analisar o DCRR e a BNCC, procurou-se a relação desses documentos oficiais com o objeto de conhecimento relações trigonométricas e quais as habilidades e pretende desenvolver nos alunos a partir desse objeto.

O DCRR traz uma relação de habilidades voltadas para essa unidade de conhecimento, listando ainda as habilidades pré-requisitos para o desenvolvimento



dessas novas e como fazer para que elas sejam desenvolvidas nos alunos. Depois uma análise bem estruturada desses documentos, fizemos um comparativo com as tarefas sugeridas nos livros didáticos adotados pelas escolas e como essas tarefas podem desenvolver técnicas de resolução nos alunos que contemplem as habilidades propostas para esse nível de ensino.

A tarefa proposta para os professores era relacionar os objetivos e conteúdos previstos nos documentos analisados sobre o objeto de conhecimento relações trigonométricas com as tarefas propostas nos livros didáticos analisados, buscando coerência ou contrastes entre eles. Depois disso, foi proposta uma segunda tarefa: mapear os conteúdos anteriores que podem servir com pré-requisitos para a compreensão do objeto de conhecimento estudado. No final, foi proposto aos professores a construção de um portfólio com os materiais construídos e utilizados nas formações para que pudesse servir de fonte de consulta durante o desenvolvimento da pesquisa.

A construção desse portfólio deveria constar todos os textos discutidos e analisados durante os encontros, bem como as conclusões tiradas a partir dessas leituras e análises. Os conteúdos mapeados que poderiam ancorar o objeto de ensino trigonometria, e ainda, as conclusões das tarefas propostas nesse encontro.

Quinto encontro: o encontro foi iniciado com a apresentação dos portfólios construídos pelos professores onde foi possível descrever uma visão ampla sobre os conceitos discutidos ao longo dos encontros, das condições e restrições das praxeologias utilizadas por eles durante sua prática docente e uma associação as transformações de ideias que já ocorreram durante o processo de formação. Baseado em Chevallard (2009a), essas transformações são chamadas de transformações didáticas.

Para Chevallard (2009a):

Um conteúdo do conhecimento tendo sido designado como saber a ensinar sofre então um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a tomar lugar entre os objetos de ensino. O “trabalho” que, de um objeto de saber a ensinar faz um objeto de ensino é chamado de transposição didática. (Chevallard 2009a, p. 39)



Os elementos destacaram ainda, que a noção de transposição didática foi estudada a partir da compreensão de que há diferenças entre as diversas formas de configuração de um determinado saber, ou seja, é diferente o saber matemático científico de um objeto, no sentido acadêmico do saber matemático escolar de um objeto que tem como perspectiva o ensino, e que depende das finalidades e do contexto a que este está inserido.

Com a ideia de deixar claro a diferença entre saber e conhecimento, destacou-se nesse encontro que no decorrer do percurso, o saber passa por uma transformação, durante uma transição que existe entre o saber científico, que depois passa por um saber do senso comum até chegar aquele que é ensinado na escola. Essas transformações é o que Chevallard(2009a) chama de Transposição Didática. Por fim, deixo claro que não é objetivo da pesquisa aprofundar esse assunto, e que esse tema tem teor meio complexo e objeto de algumas discussões entre o meio científico.

Em seguida, foi feita uma análise das tarefas propostas nos livros didáticos utilizados nas escolas estaduais do Roraima. Dessa forma, apenas duas obras estavam disponíveis para análise, por ser as obras utilizadas nas escolas em que os professores participantes atuavam. São elas: *Conexões: matemática e suas tecnologias*, volume Trigonometria, de autoria de Fábio Martins de Leonardo. A obra aborda semelhança de triângulos, trigonometria no triângulo retângulo, ciclo trigonométrico, funções trigonométricas e geometria, publicado pela Editora Moderna; e a obra *Identidade Matemática*. A coleção "Identidade Saraiva: Matemática", aprovada no PNLD Ensino Médio 2023 é assinada principalmente por **Gelson Iezzi**, junto a David Degenszajn, Marcio Tamari e Guilherme Pasmanik. A obra foca na resolução de problemas, contexto da BNCC/ENEM, educação financeira, e no protagonismo do estudante.

A análise foi feita relacionando as habilidades propostas pela BNCC contidas nos livros didáticos, na parte destinada ao planejamento dos professores, com as tarefas analisadas nos exercícios propostos contidos no livro. Na obra *Identidade Matemática* da Editora Saraiva pode se destacar as habilidades e competências conforme a figura 05.



Figura 5- Habilidades e competências encontradas no livro didático

A BNCC nesta Unidade

Competências gerais da Educação Básica:

CG01, CG03, CG07, CG09 e CG010.

Competência específica da área de Matemática e suas Tecnologias:

CEMAT03.

Habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias:

EM13MAT301, EM13MAT307 e EM13MAT308.

Competência de outras áreas do conhecimento:

CECNT01.

Temas Contemporâneos Transversais:

Diversidade Cultural; Educação Ambiental; Educação em Direitos Humanos; Educação para o Trânsito; Vida Familiar e Social.

Fonte: Livro didático Identidade Matemática, ed Saraiva, página 348

Ao analisar o livro Conexões: matemática e suas tecnologias, pode se ter uma ideia dessa relação entre habilidades e competências segundo a BNCC, pois a obra da editora moderna era mais explicativa e detalhada. As figuras 06 e 07 ilustram isso:

Figura 6-Competências encontradas no livro didático

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

Fonte: Livro didático Conexões: matemática e suas tecnologias, ed moderna, p. 6

Para cada competência específica o livro traz uma relação dessa competência com as habilidades que a ela estão relacionadas. Isso fica bem claro na figura 07



Figura 7- Habilidades encontradas no livro didático

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3
(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1ª ou 2ª grau, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.
(EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.
(EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.
(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.
(EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.
(EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.
(EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.
(EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.
(EM13MAT313) Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro.
(EM13MAT314) Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).
(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.
(EM13MAT316) Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).

Fonte: Livro didático Conexões: matemática e suas tecnologias, ed mpderna, p. 7

Depois da análise da parte do planejamento dos professores e desenvolvimento das habilidades propostas, chegou o momento de analisar as tarefas propostas pelo livro. Verificou-se que as tarefas eram bem contextualizadas e procuram relacionar sempre com uma situação do cotidiano. Um exemplo dessas tarefas pode ser observado na figura 08.

Figura 8- tarefa proposta pelo livro didático

3. De um ponto no solo, um observador vê o topo de um edifício sob um ângulo de medida 30° em relação ao solo. Aproximando-se 50 m do prédio, o ângulo de observação passa a medir 45° em relação ao solo. Determine a medida da altura do edifício.

Fonte: livro didático identidade matemática, ed saraiva, p. 181

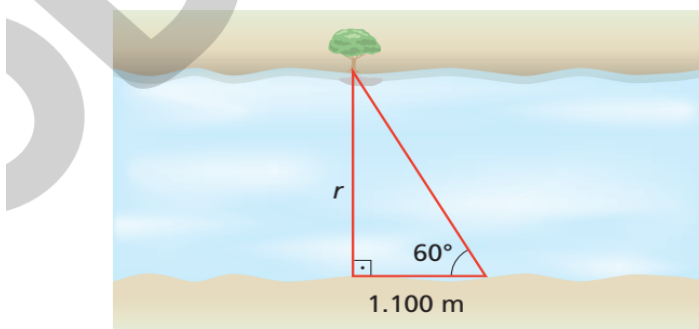
Ao observar as tarefas do livro didático da editora moderna, pode-se perceber



que trazia ideias semelhantes a obra da editora saraviva, também relacionando às tarefas com situações do cotidiano. A figura 09 ilustra isso:

Figura 9-tarefa proposta pelo livro didático

4. Na região do município de Óbidos, no Pará, encontra-se a garganta mais estreita do rio Amazonas. De um ponto na margem esquerda avista-se, perpendicularmente, certa árvore na outra margem. Caminhando 1.100 m pela margem esquerda, avista-se a mesma árvore sob um ângulo de 60° , conforme a figura abaixo.



Sabendo que $\text{tg } 60^\circ \approx 1,7321$, calcule a largura aproximada do rio Amazonas nesse local. $\approx 1.905 \text{ m}$

Fonte: livro didático conexões: matemática e suas tecnologias, ed moderna, p. 146

Nesse momento, os professores falaram sobre a investigação que fizeram na seleção de situações envolvidas nas tarefas que buscassem relacionar as relações trigonométricas com situações do cotidiano. O ponto crucial das investigações se deu ao destacarem que a maioria das tarefas que envolvem relações trigonométricas associadas a situações do cotidiano estão relacionadas ao cálculo de alturas. Ao serem indagados sobre isso, percebeu-se que essas alturas são consideradas inacessíveis, daí a necessidade de se utilizar relações trigonométricas para esses cálculos.

Nesse momento, definiu-se como questão norteadora para o desenvolvimento do PEP em sala de aula a seguinte pergunta: “*Como chegar aos números de medição da altura dos monumentos com tamanha precisão, ou seja, o que é necessário para calcular a medida de distâncias inacessíveis?*”

Sexto encontro: Esse momento foi iniciado com uma reflexão sobre as tarefas investigadas no encontro anterior, elencando as contribuições que essas tarefas podem permear na prática dos professores. Depois, chegou o momento de selecionar



as tarefas a serem aplicadas durante o percurso em sala de aula. Após a seleção das tarefas, foi feita uma análise mais cuidadosa em cada uma delas, fazendo as adaptações a realidade local, levando em consideração o contexto geográfico, social e cultural da região. Em seguida, foi construída a lista de tarefas que será utilizada em sala de aula (lista localizada nos anexos).

Durante a construção da lista de tarefas, surgiram alguns questionamentos por parte dos professores que fomentaram uma discussão mais ampla sobre a influência dessas tarefas na prática dos professores. Entre esses questionamentos, destacamos alguns que direcionaram a discussão durante todo o encontro:

- 1) Quais os conceitos matemáticos que os professores do Ensino Fundamental Séries Finais precisam conhecer e consolidar em suas práticas para que os alunos do 1º ano do Ensino Médio possam desenvolver as habilidades propostas para esta série?
- 2) Qual é realmente a função do professor frente a esses conceitos e que influência ele pode ter no desenvolvimento da aprendizagem desses alunos em relação ao conhecimento sobre trigonometria?
- 3) Até que ponto o livro didático ajuda na prática do professor em sala de aula? E nas escolas que não adotam o livro didático, como pode ser abordada essa lista de tarefas?
- 4) Esse dispositivo que será utilizado em sala de aula (se referindo ao PEP) deve fazer parte integrante da minha prática a partir de agora?

O encontro foi finalizado sugerindo que os professores resolvessem a lista de tarefas construída, indicando pontos de possíveis questionamentos dos alunos ou textos que possam ter dúvida interpretação e análise.

Sétimo encontro: O encontro foi iniciado abrindo uma discussão sobre as tarefas resolvidas. Neste sentido, orientamos e questionamos os professores sobre perspectivas vislumbradas a partir das leituras e dos diálogos realizados durante o processo resultante no desenrolar do PEP, analisando a relação com o objeto de conhecimento relações trigonométricas e a prática dos professores.



Assim, pode-se perceber o envolvimento dos professores nessa etapa do percurso e que de fato aconteceu mobilização dos conhecimentos e confronto de praxeologias, o que de certa forma pode induzir os professores a apresentarem algumas observações:

- ✓ Existe uma articulação entre as relações trigonométricas com outras áreas de ensino dentro da própria matemática como Geometria Plana nas congruências de triângulos, pontos notáveis, bissetriz de um ângulo, ponto médio, mediana de um triângulo... conceitos que, de acordo com o DCRR, devem ser introduzidos aos alunos no 7º e 8º anos do Ensino Fundamental para ser trabalhados e consolidados no 9º ano. Dessa forma, a abordagem desses conceitos e a perspectiva de que as habilidades sobre o objeto de conhecimento relações trigonométricas serão consolidadas até o final do Ensino Fundamental vão contribuir de forma positiva e significativa para realização das tarefas propostas.
- ✓ É de fundamental relevância a escolha do objeto de conhecimento relações trigonométricas por ser um conceito pouco abordado em sala de aula e que tem relações diretas com outras áreas do conhecimento e outras áreas dentro da própria matemática. A escolha desse objeto de conhecimento também pode ser justificada pela abordagem que a BNCC traz em relação a esse conceito, bem como a relação de habilidades que precisam ser desenvolvidas no início do Ensino Médio.
- ✓ A limitação da prática dos professores em sala de aula através dos projetos propostos pela Secretaria Estadual de Educação como Educação Fiscal, Feira de Ciências, Educação Financeira, Escuta Adolescente e Jovens bem com algumas avaliações nacionais diagnósticas como CAED, Prova Brasil, OBMEP acabam restringindo as metodologias envolvidas nas praxeologias dos professores, que são demandados a apresentar resultados que possam ser considerados satisfatórios.
- ✓ A formação continuada através de abordagem realmente relevantes que influenciem diretamente a prática dos professores, através de aportes teóricos que possam confrontar suas práticas em sala de aula, buscando novas



metodologias que favoreçam diretamente a aprendizagem dos alunos. Isso pode ser contemplado na seguinte fala de um dos professores: *“todo ano a mesma coisa, começa o ano com a Jornada Pedagógica, os mesmos formadores, as mesmas ideias, as mesmas cobranças e até os mesmos slides. Não precisamos disso, precisamos de formações que possam influenciar diretamente na nossa prática em sala de aula, com sugestões de metodologias que possam desenvolver as habilidades que a Secretaria tanto cobra da gente.”*

- ✓ A formação dos professores das séries iniciais do Ensino Fundamental também é insuficiente, causando de certa forma uma lacuna entre os conceitos matemáticos de diferentes contextos, fazendo com os alunos apresentem déficit no desenvolvimento das habilidades previstas em cada nível, acarretando uma interrupção na construção dos conceitos necessários para a compreensão de diferentes objetos de conhecimento. Essa ideia pode ser contemplada na seguinte fala de um professor: *“o que influencia diretamente no ensino de matemática é que os professores do 1º ao 5º ano não tem formação específica em matemática, são formados apenas em pedagogia, daí não conseguem abordar esses assuntos mais complexos como geometria. Por isso, os alunos chegam nas séries finais com déficit de aprendizagem e não conhecem os conceitos fundamentais necessários.”*

Esse encontro foi uma espécie de seminário onde foi possível a socialização dos temas abordados durante todo o percurso em relação as Metodologias em Educação Matemática. Os professores apresentaram uma síntese do percurso de estudo e pesquisa realizado. Relataram sobre as infraestruturas didáticas que foram mobilizadas durante o PEP, o que permitiu uma visão dos recursos utilizados para os estudos, como artigos, dissertações, documentos oficiais e os livros didáticos de matemática. Depois destacaram o mapeamento realizado do objeto de ensino relações trigonométricas, explicitando a construção das tarefas e os problemas enfrentados.

Em seguida, relataram a justificativa sobre a relevância deste objeto para o ensino e expectativas sobre o mesmo durante a aplicação do PEP em sala de aula. Dessa forma, chegaram a resposta R esperada para a questão geratriz Q_0 proposta no início do percurso. A questão era *“como desenvolver uma praxeologia inovadora*



que favoreça o ensino da trigonometria no triângulo para os alunos do 1º ano do Ensino Médio?”

A resposta *R* que satisfaz a questão geratriz pode ser resolvida da seguinte forma: *“Através de uma investigação sobre novas formas de ver e pensar o saber matemático, as relações trigonométricas, buscando desenvolver tarefas e técnicas que fomentem a utilização de tecnologias e teorias que favoreçam a construção do saber pelo próprio aluno.”* A seguir, apresentaremos o Modelo Praxeológico de Referência construído durante o PEP e que será aplicado em uma turma de 1º ano do Ensino Médio.

4.1.2 O PEP com os alunos

Em um outro momento foi desenvolvido o PEP com os alunos a partir do Modelo Praxeológico construído. O PEP foi desenvolvido em uma turma de 1º ano do Ensino Médio da Escola Estadual Mário David Andreazza, na cidade de Boa Vista, estado de Roraima, país Brasil. Nesse contexto, os alunos estão em processo de transição entre o Ensino Fundamental e Médio e ainda trazem conceitos ainda não consolidados. Com o intuito de diagnosticar as principais restrições referente as relações trigonométricas no triângulo - em um primeiro momento, retângulo e, a posteriori, um triângulo qualquer - foi desenvolvida uma sequência didática com uma abordagem em torno de enfrentamento de tarefas.

O sistema didático utilizado com os alunos a fim de produzir uma resposta *R*, e que Chevallard (2009a) representa pelo que ele chama de esquema simplificado de Herbart é representado por:

$$[S(A_1, \dots, A_5, B_1, \dots, B_5, C_1, \dots, C_4, D_1, \dots, D_4; X; Q_0) \rightarrow M] \rightarrow R$$

Para melhor coletar os dados, cada grupo foi identificado pelas letras do alfabeto e os alunos por números cardinais, sendo assim tivemos: Grupo A (alunos 1, 2, 3, 4 e 5), Grupo B (alunos 6, 7, 8, 9 e 10), Grupo C (alunos 11, 12, 13 e 14) e Grupo D (alunos 15, 16, 17 e 18).



Após o momento de diagnóstico realizado durante o momento prévio com o professor, pode-se identificar a dificuldade dos alunos em relacionar as relações trigonométricas com aplicações práticas. Diante de tal cenário, surgiu a necessidade de discutir a questão geradora: *“Como chegar aos números de medição da altura dos monumentos com tamanha precisão, ou seja, o que é necessário para calcular a medida de distâncias inacessíveis”?*

Ademais, durante o planejamento do PEP foram desenvolvidos estudos, tanto para a escolha da questão geratriz como também um planejamento prévio do que poderia ocorrer em sala de aula durante o desenvolvimento do percurso. A preocupação principal era encontrar uma questão geratriz que pudesse ser explorada de forma significativa envolvendo o máximo de estudantes bem como os conceitos que tem relação com o objeto de ensino escolhido.

A sequência didática ocorreu com uma abrangência de 07 momentos, onde cada momento tinha a duração de 60 minutos (1 hora) com o objetivo de desenvolver um conjunto de habilidades voltadas para a Competência 3 da Base Nacional Comum Curricular, que diz que o aluno deve ser capaz de:

Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, **Geometria**, Probabilidade e Estatística - interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentos consistente. (Brasil 2018, P. 527) (Grifo do autor).

As habilidades indicadas para o desenvolvimento dessa competência visam fomentar nos alunos a busca de uma relação entre os conceitos matemáticos com a própria matemática e com outras áreas do conhecimento e estão relacionadas à interpretação, construção de modelos, resolução e formulação de problemas matemáticos envolvendo noções, conceitos e procedimentos quantitativos, espaciais, estatísticos, probabilísticos, entre outros.

Então, ao utilizar essa estratégia busca-se desenvolver nos alunos o senso crítico e a formulação de conjecturas, fazendo com que eles associem os conceitos estudados com sua aplicação prática, por isso esses problemas incluem, necessariamente, os contextos relativos às áreas das Ciências da Natureza e



Humanas e da própria Matemática, incluindo os oriundos do avanço tecnológico. De acordo com a BNCC:

No Ensino Médio, os estudantes devem desenvolver e mobilizar habilidades que servirão para resolver problemas ao longo de sua vida; por isso, as situações propostas devem ter significado real para eles. Nesse sentido, os problemas cotidianos têm papel fundamental na escola para o aprendizado e a aplicação de conceitos matemáticos, considerando que o cotidiano não se refere apenas às atividades do dia a dia dos estudantes, mas também às questões da comunidade mais ampla e do mundo do trabalho. (Brasil 2018, P. 527)

Nesse contexto, faz-se o uso das dialéticas (Chevallard 2009) para que os alunos possam construir seus conceitos e relacioná-los entre si. Por exemplo, para um aluno que já conhece a ideia de ângulo, suas representações, e como são aplicadas em situações do dia a dia, é capaz de resolver problemas envolvendo aplicações de ângulos em estruturas construídas, relacionando-os com o cotidiano. Mas, ao apresentar aos alunos as relações entre os ângulos, relações métricas e trigonométricas, bem como suas propriedades, o aluno dará significado a esse novo conhecimento “acionando” o objeto *Representação de ângulos*. Esse novo conhecimento ficará mais rico e elaborado pois terá novos significados a partir do conhecimento que ele já adquiriu em outro momento, podendo aplicá-lo não só dentro da matemática, mas também em outras áreas do conhecimento, isto é, a mobilização de novos conhecimentos a partir daqueles já assimilados.

Outro fator a ser abordado na sequência didática proposta é a *Utilização de jogos e materiais manipuláveis*, na construção dos conceitos das relações trigonométricas. Mais especificamente, o uso de materiais manipuláveis, que permite aos alunos a manipulação de materiais para a construção dos conceitos pré-estabelecidos. Essa sequência se baseia na construção de Teodolito², onde será possível realizar a medição de ângulos, e a partir dessas medições, desenvolver cálculos para a aferição da altura de determinados objetos no contexto escolar.

Ainda nessa trilha, o material manipulável permite a ampliação de conceitos matemáticos, descoberta de propriedades, compreensão de algoritmos e colabora

² O **teodolito** é um instrumento de precisão óptico que mede ângulos verticais e horizontais, aplicado em diversos setores como na navegação, na construção civil, na agricultura e na meteorologia.



para a aprendizagem do aluno através de uma reflexão diante da atividade proposta que envolve o material manipulável. Para Sarmento (2012):

A utilização dos materiais manipulativos oferece uma série de vantagens para a aprendizagem das crianças, entre outras, podemos destacar: a) propicia um ambiente favorável a aprendizagem, pois desperta a curiosidade das crianças e aproveita seu potencial lúdico; b) possibilita o desenvolvimento da percepção dos alunos por meio das interações realizadas com os colegas e com o professor; c) contribui com a descoberta (redescoberta) das relações matemáticas subjacentes em cada material; d) é motivador, pois dar um sentido para o ensino da matemática. O conteúdo passa a ter um significado especial; e) facilita a internalização das relações percebidas. (Sarmento 2012, P. 4)

Segue o roteiro do desenvolvimento do PEP bem como as orientações de como foi desenvolvida em sala de aula com a participação dos alunos em cada uma das etapas. O contexto da aplicação são alunos do 1º ano do Ensino Médio. O âmbito em foco foi selecionado uma vez que é no referido semestre que o objeto de conhecimento trigonometria e suas aplicações se torna parte do currículo a ser consolidado na vida escolar dos alunos.

A aplicação ocorreu em uma única turma, com 18 alunos matriculados. Nessa turma são trabalhados diferentes conteúdos, inclusive funções seno e cosseno. Desse modo, organizamos o PEP em sete encontros, com um tempo médio de uma hora cada. O tempo extra foi utilizado fora de sala de aula. A seguir, apresentaremos a organização geral do PEP:

Momento 01 - O primeiro encontro é o momento em que se apresenta a turma com a questão geratriz. Nesse momento, houve a exposição da organização geral do estudo, onde foi apresentado aos alunos algumas imagens de monumentos conhecidos como Torre Eiffel, Cristo Redentor e Mirante Edileuza Loz. A partir da apresentação desses monumentos foi instigada a participação dos alunos com perguntas do tipo: que monumentos são esses? Onde ficam localizados? O que eles têm em Comum? Qual a altura deles? Depois de um breve instante em que foi autorizado a pesquisa nos aparelhos celulares para que os alunos obtivessem as informações das alturas exatas desses monumentos foi apresentado a eles a questão geratriz: Como se calcula com exatidão a medida da altura desses monumentos? E ainda, como se faz para calcular a medida de alturas inacessíveis?



A partir dessas discussões surgiram questões derivadas/secundárias a serem respondidas. Nesse momento os alunos trabalharam em pequenos grupos e utilizaram um caderno de trabalho para cada grupo; neste foram registradas todas as ideias, questões derivadas, respostas e rascunhos. O caderno funcionou como um diário de trabalho, que conta todas as informações.

Momento 02 - No segundo momento, após exploração da questão geratriz, foi apresentado aos alunos uma questão derivada: qual a importância do triângulo nesse contexto? Essa questão foi lançada para discussão e participação dos alunos nessa análise. Foi proposto aos alunos uma pesquisa em locais da cidade que se pudessem observar triângulos em construções ou estruturas construídas. A partir dessa pesquisa, se discutiu a importância do triângulo nas construções e sua rigidez e inflexibilidade, daí o uso contínuo em construções.

A priori, estiveram disponíveis tarefas no desenvolvimento do PEP relacionadas ao nosso MER. Essas questões nortearam a aplicação do PEP complementando as questões levantadas pelos alunos durante a aplicação. Em cada momento da aplicação apresentamos, enquanto professor, questões e tarefas para que os alunos as abordassem, em pequenos grupos, as quais fazem parte do PEP. E, através do desenvolvimento do grupo, estávamos disponíveis para orientar e esclarecer possíveis dúvidas.

Ao final de cada sessão, foram realizadas socializações dos trabalhos desenvolvidos nos grupos a fim de exibir as respostas provisórias de cada grupo e validá-las. Nesse momento classificamos as questões problemáticas e/ou respostas a essas questões secundárias em conjunto, e, quando necessário, provocamos questões que ainda não tinham surgido no processo a respeito da atividade matemática. Assim, todos entram em consenso no percurso a seguir, de forma a avaliar quais questões e/ou respostas se priorizam, e quais delas requerem maior atenção e ainda, se existem algumas que podem ser deixadas de lado.

Nesse momento pode-se observar a relação das dialéticas citadas por Chevallard durante o desenvolvimento do PEP. Observou-se aqui a dialética “*No tema e fora do tema*”, que acontece quando, na busca de uma resposta à pergunta geratriz ocorreu a explanação e a inserção de diferentes temas nesse processo de construção



de respostas a questão inicial. Por exemplo, durante a pesquisa sobre construções e estruturas foram relacionadas situações não relevantes a resposta inicial, pois o objetivo era que os alunos pudessem relacionar a importância do triângulo, para depois explorar suas características e relações trigonométricas.

Por outro lado, os alunos abordaram situações de estética, praticidade e, em alguns casos, ressaltaram a não presença de triângulos nessas estruturas. Dessa forma, pode-se observar que o caminho percorrido pelos alunos para responder à pergunta proposta saiu não somente do tema, mas também da disciplina. Como afirma Costa et al (2015), “[...] as perguntas geratrizes podem dar lugar a amplos percursos de estudo e investigação, que poucas vezes podem circunscrever-se em um âmbito limitado de uma única disciplina.”

Momento 03 – Nesse momento foi introduzido aos alunos os conceitos básicos das relações trigonométricas no triângulo retângulo. No início da aula, foi criada expectativas sobre o tema proposto através de perguntas do tipo: *O que vocês esperam aprender com esse título: RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO? Sobre o que vocês acham que a aula de hoje vai abordar? O que vem à mente de vocês quando falamos em relações trigonométricas?*... dentre outras perguntas que deram subsídios para a discussão sobre o tema a ser estudado.

A partir daí, foi mostrado aos alunos um triângulo retângulo construído de metalon em tamanho grande, para que todos os alunos tivessem acesso a visualização dele. Dessa forma, foi explorado os conhecimentos prévios dos alunos com questionamentos do tipo: *que tipo de figura é essa? O que vocês já estudaram sobre essa figura? Conhecem alguma relação entre as medidas dos seus lados? ...* e a partir das suas respostas, o professor foi relacionando cada uma delas com os objetivos da aula.

Num segundo momento, ainda usando o triângulo retângulo exposto na sala, foram trabalhados os conceitos básicos e as partes que compõe um triângulo retângulo. Nesse momento, foi revisado a classificação dos triângulos quanto a medida dos seus lados e quanto a medida dos seus ângulos, destacando o porquê do nome do triângulo ser retângulo. Com a participação dos alunos, foram identificados



os catetos e a hipotenusa bem como a abordagem sobre as relações métricas do triângulo retângulo, fazendo sua associação com os conceitos que ainda serão abordados durante essas aulas. Foram usadas letras grandes com ímãs para que, à medida que os alunos identificavam os nomes dos lados, o professor ia colando os nomes no triângulo de metal.

Durante o desenvolvimento da discussão, foi possível abordar a ideia de Teorema de Pitágoras, como ponto central das relações métricas e de que forma, através desse conceito, foi possível ancorar os demais conceitos que se buscava abordar. Nesse instante também se destacou as principais relações métricas no triângulo retângulo, fazendo as associações com o Teorema de Pitágoras e as demais relações existentes.

Em outro momento da aula, foi pedido aos alunos que relacionassem a figura do triângulo retângulo com objetos do dia a dia, pedindo que eles realizassem uma lista com uma relação de objetos e construções que conhecem que se assemelha a um triângulo retângulo. Foi possível aproveitar esse momento para retomar a discussão de momentos anteriores ao PEP, destacando assim o que mais gostam e o que mais chama a atenção dos alunos nessas construções que envolvem triângulos e porque eles são muito utilizados nas construções atualmente.

Após a listagem ser concluída, os alunos apresentaram essas listagens para os demais colegas, fazendo um levantamento das semelhanças e diferenças encontradas nas listas e discutindo o porquê delas. Ainda usando o triângulo de metal, foi apresentada e discutida com os alunos as principais relações trigonométricas existentes em um triângulo retângulo. Os alunos puderam lembrar praxeologias anteriores e participar com a apresentação das relações que eles lembravam.

Após isso, foi passada algumas tarefas que envolve a utilização das relações trigonométricas e das funções trigonométricas seno, cosseno e tangente. Os alunos foram incentivados a resolver as tarefas propostas e registrar em um papel, para posterior discussão. Por fim, a aula foi finalizada associando essas discussões com os conceitos geométricos das relações métricas, deixando claro a retomada das tarefas no próximo momento.



Momento 04 – Nesse momento foi dado a continuidade do momento 03, retomando as discussões sobre relações trigonométricas e apresentando novas tarefas para que os alunos pudessem, em grupos, realizar a discussão sobre elas e apresentar suas respostas.

No início, foi criada expectativas sobre a aula retomando as principais ideias estudadas na aula anterior. A partir daí, foi mostrado aos alunos o mesmo triângulo retângulo usado na aula anterior. Usando o triângulo, foi explorado os conhecimentos prévios dos alunos em relação ao conceito de ângulos, e a utilização deles em situações do cotidiano. Então surgiram novas questões secundárias a questão geratriz, como por exemplo: *essa figura tem algum ângulo? Onde podemos identificá-lo? Para que serve esse conceito matemático? Tem alguma ideia de como aplicá-lo em uma situação real?...* e a partir das suas respostas, o professor foi relacionando com os objetivos da aula.

Aqui foi possível observar o que Chevallard chama de Dialética das perguntas e respostas. Essa dialética acontece justamente quando existe o surgimento de novas perguntas, perguntas essas derivadas a partir da investigação inicial. A busca por respostas a essas perguntas caracteriza a construção de resultados parciais, que fazem parte do percurso. Esses resultados podem ser conceitos matemáticos e expressões ou frases que eram indicadores de uma atividade de estudo e pesquisa.

A codificação dessa dialética pode ser observada dentro das várias propostas debatidas pelos alunos, onde eles deveriam argumentar suas conjecturas e validar cada uma de suas ideias a partir dos questionamentos debatidos. Isto indica que havia entre os alunos, uma troca de ideias, argumentos e propostas. Nesse caso, para iniciar o estudo da questão geratriz, foi possível observar que a codificação dessa dialética também pode ser observada nas questões derivadas citadas: Qual a importância do conceito de ângulos? Como aplicar o conceito de ângulos em situações do cotidiano?

Depois foi retomada a lista das construções produzidas na aula anterior, e a partir da lista, pode-se confrontar os alunos com perguntas do tipo: *Alguma dessas construções da lista é considerada uma construção bastante alta? Como vocês acham que é possível medir a sua altura?...* dentre outras, sempre relacionando as respostas



dos alunos com os objetivos da aula, fazendo a ligação entre os conteúdos que se deseja explorar em cada aula.

A partir de então, buscou se relacionar os conceitos das relações trigonométricas com a medidas das alturas de determinados objetos, e apresentar aos alunos as principais relações trigonométricas, envolvendo as funções seno, cosseno e tangente, e como essas relações podem ser aplicadas no cálculo das alturas de alguns dos objetos listados na relação produzidas por eles.

Após isso, os alunos foram incentivados a resolver mais duas tarefas propostas pelo professor, dessa vez, sem o auxílio de ilustrações para subsidiar as ideias dos alunos. O objetivo é verificar até que ponto as ilustrações presentes nos enunciados das tarefas favorecem a compreensão e resolução delas.

Em outro momento, foi apresentado aos alunos através de imagens um teodolito, e explicado que é um aparelho usado nas construções civis para medir ângulos em diferentes contextos. A partir daí, foi informado aos alunos que na próxima aula eles iriam realizar uma atividade, onde seria possível construir um teodolito e utilizá-lo para medir ângulo, calculando assim a altura de alguns objetos na escola, para que eles pudessem conhecer a sua utilização e saber aplicar os conceitos de trigonometria em situações reais.

Por fim, foi solicitado dos alunos que trouxesse para a próxima aula uma relação de materiais, para que fosse possível realizar essa atividade. A lista de material é:

- 1 copo de requeijão (ou similar) vazio com tampa;
- 1 tubo de aproximadamente 20 cm de comprimento e 1 cm de diâmetro (como sugestão pode se usar um canudinho de milkshake ou tubo de antena);
- 1 pedaço de arame de aproximadamente 20 cm de comprimento;
- 1 xerox de um transferidor (essa será levada pelo professor);
- 1 pedaço de papelão de aproximadamente 15 cm x 15 cm;
- Cola branca e cola quente (levada pelo professor);

Momento 05 – Realização da atividade de construção do teodolito com materiais recicláveis. No início, foi criada expectativas sobre a aula retomando as principais



ideias estudadas na aula anterior. Depois disso, a turma foi dividida em grupos de 04 e 05 alunos para a realização da atividade proposta na aula anterior. Depois de uma breve discussão sobre a lista do material trazido e a garantia de que todos os grupos tinham pelo menos um item de cada material solicitado, foi repassada as instruções de como seria construído o teodolito. Segue o passo a passo da construção do teodolito com materiais recicláveis.

✓ PASSO 1: Os alunos deverão colar (será usada a cola branca) a xerox do transferidor no pedaço de papelão, cortando o excesso da folha da xerox de forma que o papelão fique no formato de um quadrado.

Figura 10- Grupo 01 construindo o teodolito



Fonte: Autor 2024

✓ PASSO 2: Em seguida, cole (usar cola quente) a tampa do copo vazio de cabeça para baixo, no centro da xerox do transferidor já colada no papelão, de tal forma que o centro da tampa coincida com o centro do transferidor. Pode ser usado o arame como guia para alinhar o centro da tampa com o centro do transferidor.



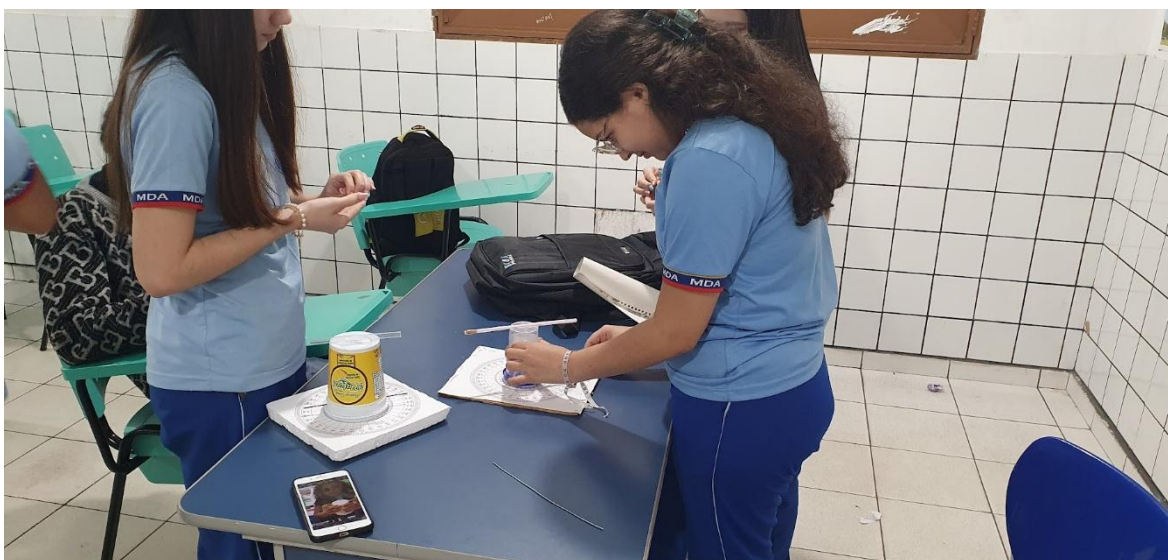
Figura 11-Grupo 02 construindo o teodolito



Fonte: Autor 2024

✓ PASSO 3: No fundo do copo deverá ser colado o tubo (canudo ou tubo de antenna), de forma centralizada, de tal forma que a parte das extremidades do tubo que sobressai do copo fiquem com medidas de tamanho iguais. Esse tubo servirá de mira. Para refinar ainda mais essa mira, cole na extremidade do tubo dois pedaços de linha em forma de cruz.

Figura 12-Grupo 03 construindo o teodolito



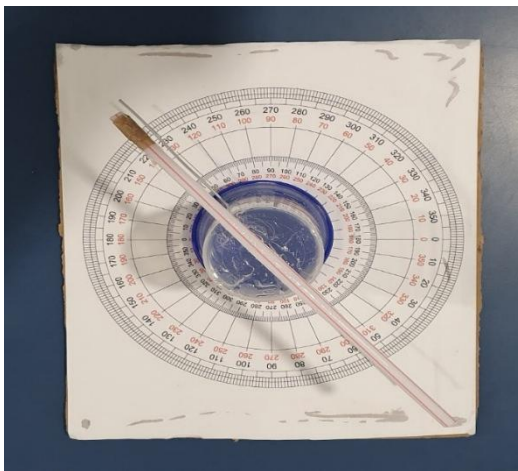
Fonte: Autor 2024

✓ PASSO 4: Atravessar o arame diametralmente o mais próximo possível da borda do copo, tendo o cuidado para que não cubra o furo quando a tampa for encaixada no copo.



✓ PASSO 5: Por fim, encaixe o copo na tampa e está pronto o teodolito.

Figura 13-teodolito construído pelos alunos



Fonte: Autor 2024

As orientações foram passadas aos alunos de forma bem explicativa, garantido que cada grupo pudesse realizar o passo a passo de forma completa, assegurando que todos os grupos pudessem concluir ao mesmo tempo a construção desse material. Por fim, foi solicitado aos alunos que guardassem o material construído em local apropriado para que pudesse ser utilizado na próxima aula.

Momento 06 – Nesse momento os alunos foram realizar a atividade de utilização do teodolito construído na aula anterior, e a partir de sua utilização, calcular as medidas aproximadas de alguns objetos encontrados na escola. No início, foi criada expectativas sobre a aula retomando as principais ideias estudadas na aula anterior.

Depois disso, foi solicitado aos alunos o material construído na aula anterior. Ainda em grupo de 05 alunos (utilizando os grupos já formados na aula anterior), foi orientado aos alunos que saíssem pelas dependências da escola e calculassem a altura de alguns objetos já pré-definidos pelo professor. São eles: *a altura de um poste de iluminação localizado na área externa das salas de aula e a altura de uma torre de telecomunicações localizada na parte de trás do terreno da escola;*



Figura 14-torre de telecomunicações que foi medida pelos alunos

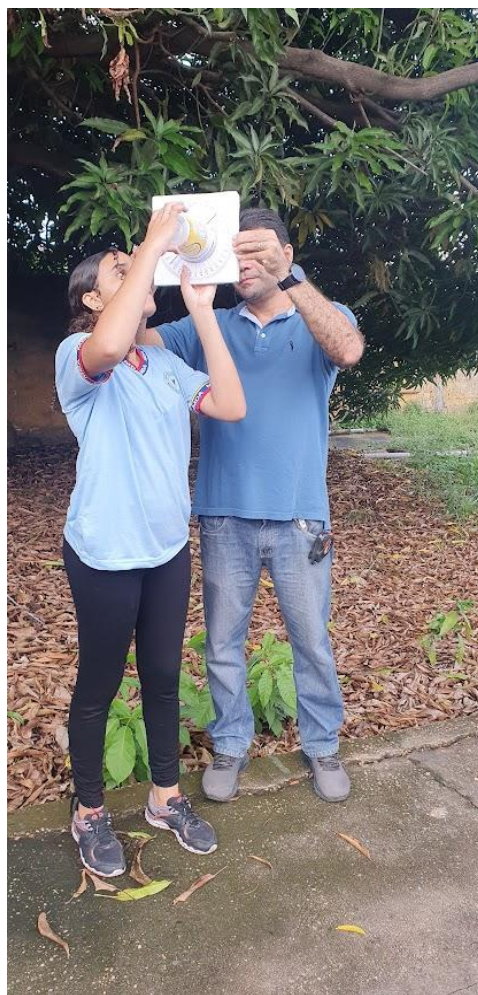


Fonte: Autor 2024

Dessa forma, os alunos foram se organizando de tal forma que, no máximo, 03 grupos, estivessem medindo os objetos simultaneamente, para garantir a eficácia do processo. Cada grupo deveria usar 03 alunos de estaturas diferentes para operar o teodolito, e os demais deveriam registrar os dados obtidos no caderno, incluindo a altura do observador. Esses dados foram de fundamental importância para a retomada dos conceitos trigonométricos em sala de aula.



Figura 15-Grupo 02 operando o teodolito



Fonte: Autor 2024

Assim, foi orientado aos alunos que tivessem uma atenção especial ao coletar e registrar os dados coletados. Nesse momento, a atividade foi acompanhada pelo professor, que realizava os ajustes necessários durante a realização da atividade.



Figura 16-Grupo 02 realizando as medições



Fonte: Autor 2024

No retorno a sala de aula, o professor irá verificar os dados coletados e solicitar aos alunos que organizem esses dados em uma tabela, para melhor análise na próxima aula. Os dados poderão ser organizados conforme o modelo abaixo:

Figura 17-Ficha de coleta de dados

ATIVIDADE PRÁTICA

1. Preencher a tabela abaixo de acordo com as informações encontradas na medição dos objetos.

OBJETO 1: _____

Nº	NOME DO OBSERVADOR	ÂNGULO ENCONTRADO	DISTÂNCIA DO OBJETO ATÉ O OBSERVADOR	ALTURA DO OBSERVADOR
1				
2				
3				
4				

Fonte: Autor 2024

A partir do retorno a sala de aula foi solicitado aos alunos que apresentassem suas tabelas de dados organizadas e coletados. Nesse momento, o professor orientou



os alunos a calcularem a altura dos objetos utilizando as relações trigonométricas já aprendidas em aulas anteriores. Assim, a partir dos dados coletados, cada grupo de alunos deveria calcular a altura dos dois objetos solicitados pelo professor, usando as definições de relações trigonométricas e as funções seno, cosseno e tangente, utilizando sempre a que for mais conveniente.

A ideia desse momento da aula é que os alunos fossem estimulados a discutir qual a função mais conveniente a ser aplicada e porque, discutindo a diferença entre os dados do próprio grupo, ao alternar o nome do observador no momento dos cálculos. Os alunos deveriam perceber que para calcular a altura de forma mais efetiva, era necessário adicionar a medida da altura do observador ao cálculo encontrado com a função trigonométrica utilizada.

Por fim, houve discussão e debate em relação as medidas das alturas dos objetos encontradas por todos os grupos, comparando os resultados obtidos e levantando hipóteses dos porquês em relação a diferença das informações. Nesse momento, o professor abordou a pouca precisão do objeto construído em relação aos teodolitos originais, frisando aos alunos que é através desse processo que a altura de grandes construções é calculada.

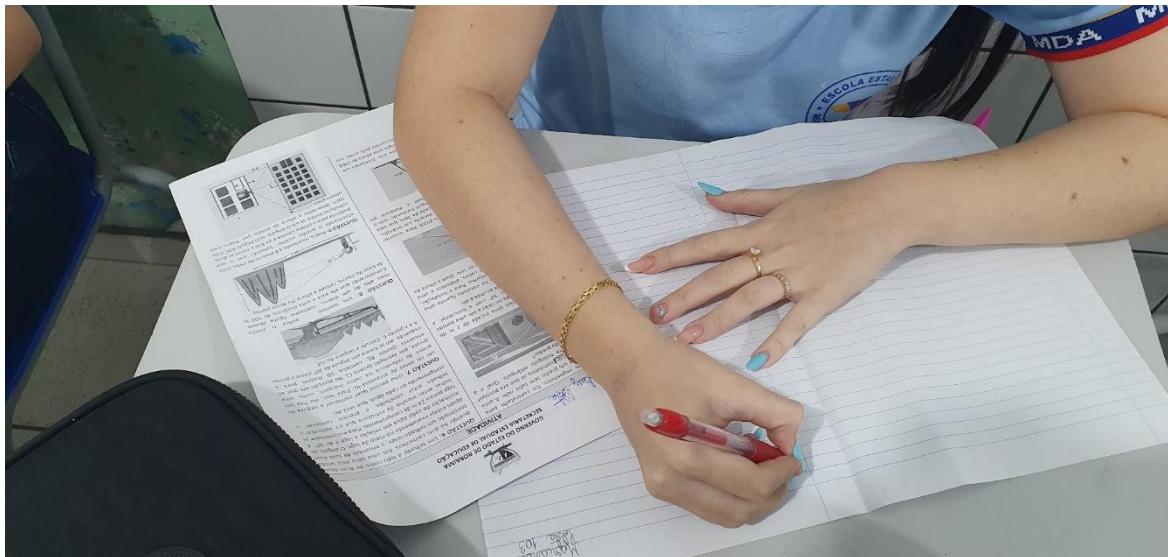
Momento 07 – Nesse momento foram realizadas outras tarefas, semelhante as primeiras apresentadas, onde os alunos deveriam colocar em prática o que aprenderam durante as aulas desenvolvidas. No início, foi criada expectativas sobre a aula retomando as principais ideias estudadas na aula anterior. Foi possível abordar os conceitos já discutidos em momentos anteriores e relacionar esses conceitos com a atividade prática realizada. Assim, os alunos puderam compreender a aplicabilidade dos conceitos discutidos em sala, bem como elaboraram suas próprias conjecturas no intuito de resolver a questão geratriz.

Ao conduzir uma discussão sobre as questões levantadas no início do percurso, os alunos puderam perceber a importância das relações trigonométricas no triângulo retângulo e, a partir de suas variações, se estender a um triângulo qualquer, levando cada aluno a achar sua própria resposta a questão geratriz. No final, foi possível conduzir uma reflexão onde ficou claro para cada um como se dá o processo de medidas inacessíveis, e como isso é realmente feito na prática.



Depois disso foi proposto aos alunos algumas tarefas em forma de situações problemas através de uma lista sobre a aplicação das relações trigonométricas no triângulo retângulo.

Figura 18- aluno 01 realizando a lista de tarefas



Fonte: Autor 2024

Essa tarefa evidencia como as funções didáticas podem ser apropriadas para análise de dados em estudos que envolve um Percurso de Estudo e Pesquisa associados a investigações que contempla o funcionamento dos sistemas didáticos nos diversos níveis de ensino. Ao usar esse dispositivo didático e metodológico baseado na Teoria Antropológica do Didático, foi possível romper o modelo tradicional de ensino em que os conteúdos de aprendizagem são apresentados como se fossem monumentos a partir de uma exposição invariante deles.

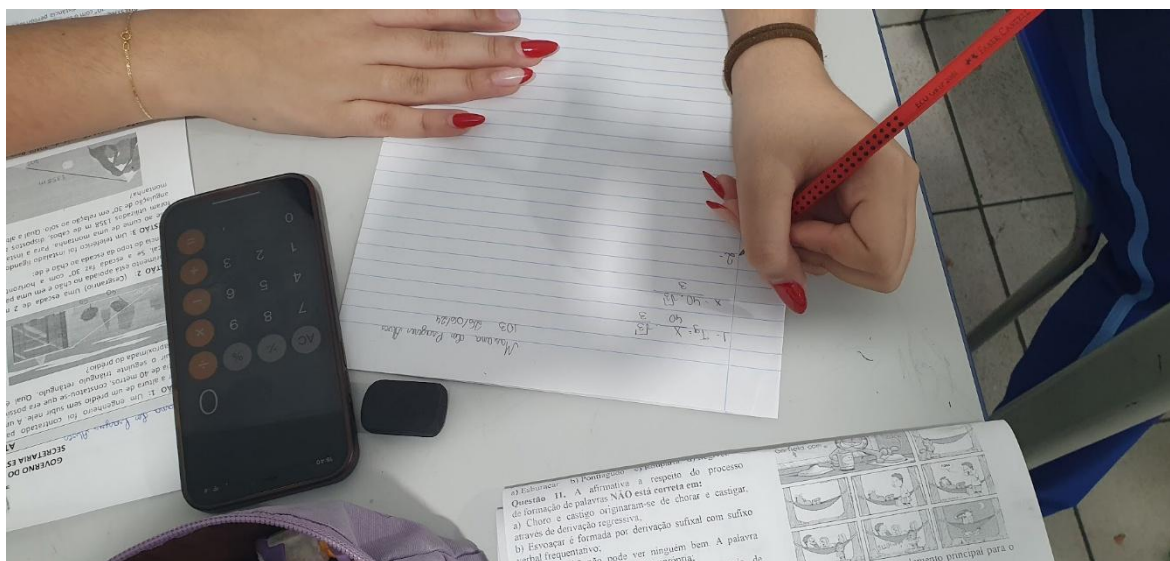
Chevallard chegou a discutir a importância das funções didáticas neste processo, inclusive denominou essas funções como cronogênese, cujo objetivo era desencadear a busca por conhecimento, desenvolvendo o que ele chamou de “gênese do tempo didático, ou seja, o tempo da construção praxeológica” (Chevallard 2009, p. 79).

O percurso desenvolvido foi um momento de aprendizagem e crescimento para todos os envolvidos, não apenas os alunos. Articular diferentes atividades para promover a discussão, identificar o objetivo real e a aplicabilidade dos conceitos do objeto de ensino não foi uma tarefa simples, mas após os encontros e reflexões realizados podemos afirmar que rendeu resultados positivos.



A abordagem dos conteúdos relacionados as relações trigonométricas do triângulo promoveram uma articulação entre as diferentes áreas do conhecimento e até mesmo, diferentes áreas dentro da própria matemática. Além disso, foi possível evidenciar uma possibilidade de que diferentes contextos possibilita a absorção de conceitos que tarefas tradicionais não contemplavam. Tudo isso foi possível por gerar um desafio de elaborar uma sequência de ensino que pudesse contemplar os diferentes estágios de aprendizagem.

Figura 19-aluno 02 realizando a lista de tarefas

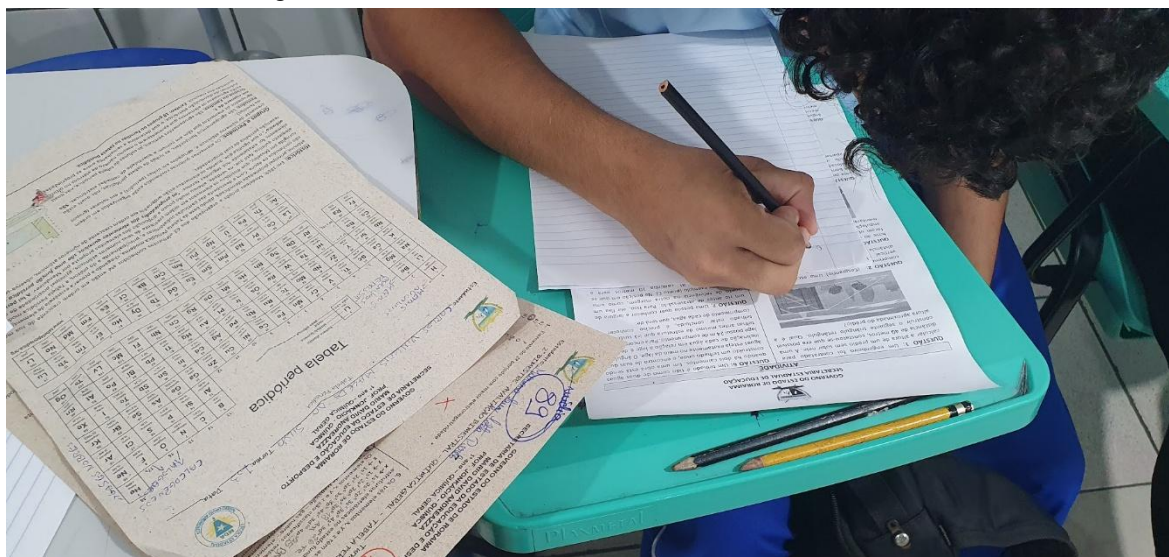


Fonte: Autor 2024

A partir do processo de questionamento do saber é possível relacionar ações didáticas que partiam da nossa questão geratriz, e ao ser apresentada aos alunos foi possível fomentar e direcioná-los há outros questionamentos. Assim, ficou claro que a relação encontrada entre os questionamentos e as respostas despertou nos estudantes e até mesmo na praxeologia do professor a necessidade de acessar diferentes recursos, como material manipulativo, que nesse contexto foi direcionado a partir do processo de discussões coletivas e que levaram a aproximações da resposta esperada a questão norteadora.



Figura 20-aluno 03 realizando a lista de tarefas



Fonte: Autor 2024

Um fator que foi considerado como restrição foi a forma como os alunos receberam a dinâmica das aulas. Os alunos vêm de uma cultura em que toda matéria copiada no quadro e eles reproduzem nos seus cadernos, através de anotações e resolução de exercícios. Ao desenvolver o PEP, os alunos estranharam não ter matéria copiada no quadro para ser copiado no caderno. Ao contrário, todas as aulas foram direcionadas por meio de discussões que envolvia a participação direta dos alunos, o que causou um certo incômodo.

ANÁLISE DOS DADOS COLETADOS

O PEP desenvolvido foi baseado em uma metodologia de ensino voltada para o estudo das relações trigonométricas no triângulo e se baseava em um processo investigativo a partir da construção de um teodolito para aferir as medidas dos ângulos de visão para o cálculo de altura de objetos. A ideia foi fomentar nos alunos a aplicação desses conceitos já estudados no ano anterior de escolaridade, e assim, trazer uma discussão sobre a utilização desses conceitos em situações práticas.

O percurso utilizado tem uma característica de integrar os conceitos de um objeto matemático a sua aplicabilidade em outras áreas do conhecimento, podendo assim ser classificado como um PEP adaptado.

Já em relação ao modelo epistemológico utilizado, podemos classificar como



um modelo alternativo, já que nem todas as atividades do PEP foram elaboradas em conformidade com a questão geratriz, e a discussão realizada foi além das questões secundárias, destacando que algumas dessas questões que levantaram a discussão partiu do próprio pesquisador, de acordo com a expectativa criada e das possíveis questões que os alunos poderiam trazer.

Assim, o percurso foi realizado durante os meses de maio e junho do ano de 2024, em uma turma de 1º ano do Ensino Médio. Esse período deve ser destacado pois é exatamente no segundo bimestre do ano letivo que os conceitos sobre relações trigonométricas no triângulo são inseridos no currículo escolar, de acordo com o Documento Curricular do Estado de Roraima (DCRR). A exploração do percurso se deu através de aulas expositivas e dialogadas e através de tarefas e exploração de atividades.

A experimentação ocorreu na turma 103, turma de 1º ano da Escola Estadual Mário David Andreazza, com 18 alunos matriculados regularmente. A turma foi dividida em grupos de 04 alunos cada, para facilitar a discussão entre os estudantes e os registros dos dados coletados. Os alunos foram orientados a registrar no caderno todas as discussões levantadas, a fim de haver no ambiente papel e lápis para construção de estratégias e pensamentos, além de tecer um diário de campo para registrar todas as ideias relacionadas às atividades desenvolvidas. O PEP foi construído em sete sessões, com duração de uma hora em cada sessão.

Como os alunos foram divididos em grupo, tivemos então dois grupos com quatro alunos e dois grupos com cinco alunos. A assiduidade dos alunos foi considerada uma restrição, pois a cada aula sempre tinha a ausência de alguns alunos. Para melhor coletar os dados, cada grupo foi identificado pelas letras do alfabeto e os alunos por números cardinais, sendo assim tivemos: Grupo A (alunos 1, 2, 3, 4 e 5), Grupo B (alunos 6, 7, 8, 9 e 10), Grupo C (alunos 11, 12, 13 e 14) e Grupo D (alunos 15, 16, 17 e 18). Será relatado de forma mais detalhada o que aconteceu em cada momento do PEP.



4.1.3 Momento 01

A sessão 1 ocorreu no dia 15 de maio de 2024, no horário de 16h30min às 17h30min. A sessão foi iniciada explicando a metodologia e o contexto em que seria realizada esse experimento. Como os alunos não estão habituados em relacionar os conceitos estudados na escola com situações práticas, e questionar o porquê da utilização desses conceitos – o que Chevallard denomina paradigma de questionamento do mundo – os alunos ficaram curiosos para saber como se daria o processo de desenvolvimento das aulas.

Após a explicitação da metodologia de estudo, houve a exposição da organização geral do estudo, onde foi apresentado aos alunos algumas imagens de monumentos conhecidos como Torre Eiffel, Cristo Redentor e Mirante Edileuza Loz. A partir da apresentação desses monumentos foi instigada a participação dos alunos com perguntas do tipo: que monumentos são esses? Onde ficam localizados? O que eles têm em comum? Qual a altura deles? Os alunos foram desafiados a comentar as suas opiniões e registrar no caderno as principais respostas que surgiram.

Depois foi pedido aos alunos que pesquisassem na internet a altura exata desses três monumentos apresentados em sala. A partir desse momento foi apresentado a eles a questão geratriz: Como se calcula com exatidão a medida da altura desses monumentos? E ainda, como se faz para calcular a medida de alturas inacessíveis?

Assim, foi pedido que os alunos anotassem a questão geratriz no caderno e, logo em seguida, começaram a tecer suas próprias opiniões sobre a questão, o que nos levou as questões secundárias, e na busca de respostas para essas questões. Surgiram diferentes indagações a respeito da questão geratriz.

Uma questão que todos os 4 grupos levantaram, a não ser pela ordem das palavras, foi: “O que podemos chamar de medidas inacessíveis?”

Uma outra questão abordada pelos grupo A, C e D foi: “o que a trigonometria tem a ver com o cálculo da altura desses monumentos?” Depois de serem incentivados pelo professor para as possíveis respostas a esse questão secundária, houve algumas variações nas respostas, da qual podemos listar algumas:



R₁: “Acho que não tem nada a ver com a trigonometria, eles medem de uma outra forma.”

R₂: “Acredito que se calcula usando a função seno de x.”

Ainda a partir das discussões levantadas, outra questão secundária surgiu em relação a aplicabilidade da matemática em outras áreas do conhecimento. O aluno 7, do Grupo B perguntou: “A matemática é usado em quase tudo na nossa vida, né professor?” Isso levantou a discussão da importância da matemática para as outras áreas do conhecimento, onde foi possível listar alguns conceitos matemáticos usados. Porém, os conceitos foram restritos a conteúdos simples da matemática como área, volume, capacidade, dentre outros.

Foi possível verificar as diferentes perspectivas e as diferentes formas que cada grupo abordou nas discussões levantadas. Diante das discussões, os alunos criaram suas próprias conjecturas quanto ao objeto matemático trigonometria, argumentaram sobre elas e criaram expectativas para validar cada uma dessas conjecturas.

No momento da socialização, foi possível perceber através dos comentários dos alunos, a surpresa em presenciarem a uniformidade das questões levantadas e a singularidade nas ideias discutidas, o que favoreceu a ampliação da condução do PEP para um entendimento melhor da busca pela resposta a questão norteadora.

Outro fator observado durante a discussão foi a apresentação de indícios de outras praxeologias usadas em anos anteriores, lembrando que outros professores abordaram situações parecidas. O aluno 13 do grupo C falou: “meu professor do ano passado falou alguma coisa sobre isso e de como é calculado a altura dos objetos mas eu não lembro muito bem”

A associação que os alunos fizeram da questão norteadora com a trigonometria nos chamou atenção, uma vez que nos abre o leque para a utilização posterior das organizações matemáticas que serão propostas ao longo do PEP, organizações essas que envolvem o objeto de conhecimento trigonometria. Assim, através dos registros realizados pelos alunos foi possível perceber a menção de ostensivos discursivos que trazem elementos dessas organizações matemáticas.

Por fim, foi notório nessa sessão as dialéticas perguntas e respostas e no tema e



fora do tema, o que ficou bastante evidente sua utilização durante a discussão dos alunos, onde em alguns momentos fugiram de fato dos elementos que norteariam a condução para a resposta da questão geradora.

A partir desses relatos e discussões, foi possível planejar o segundo momento com o objetivo de nortear os alunos na condução da busca de respostas a questão geratriz, iniciando com a relação da trigonometria com a questão proposta.

4.1.4 Momento 02

O momento 02 aconteceu no dia 22 de maio de 2024, e teve duração de uma hora, das 16h30min às 17h30min. Nesse, após exploração da questão geratriz, foi apresentado aos alunos uma questão derivada: *qual a importância do triângulo nesse contexto?* Essa questão foi lançada para discussão e participação dos alunos nessa análise. Foi proposto aos alunos uma pesquisa em locais da cidade que se pudessem observar triângulos em construções ou estruturas construídas. A partir dessa pesquisa, se discutiu a importância do triângulo nas construções e sua rigidez e inflexibilidade, daí o uso contínuo em construções.

Algumas respostas dos alunos estão listadas a seguir:

Grupo A: “O triângulo dá sustentação as estruturas construídas.”

Grupo B: “Através de um triângulo podemos calcular a sua altura. Já vi isso no ano passado e era possível calcular as medidas dos lados do triângulo.”

Grupo C: “Não conseguimos associar uma relação direta do triângulo com a altura de objetos. Mas precisa da matemática para calcular.”

Grupo D: “Os triângulos das construções tem dois lados com a mesma medida. Mas não sei se tem relação com a altura.”

Ficou evidente que a pesquisa realizada pelos alunos abordou diferentes contextos envolvendo construções e uso dos triângulos, sendo que a princípio não foi possível associar de imediato a ligação que os triângulos poderiam ter com a resposta da questão geratriz que se estava buscando. Apenas um grupo deixou claro na discussão que seria possível calcular com o uso do triângulo, embora não deixassem evidente como



se realizava o processo.

Vale destacar que nas respostas dos alunos a identificação dos triângulos em todas as construções pesquisadas, inclusive em imagens coletadas da internet ficou bastante clara, o que é interessante pois a ideia da tarefa proposta era instigar a discussão para a inserção dos triângulos no contexto que estava se buscando, ponto crucial da busca pela resposta procurada. Nesse processo, o professor pesquisador sempre aparece como mediador na socialização dos resultados, e os alunos são os principais sujeitos no desenvolvimento do PEP.

4.1.5 Momento 03

O momento 03 aconteceu no dia 29 de maio de 2024, das 16h30min às 17h30min. Nesse momento foi introduzido aos alunos os conceitos básicos das relações trigonométricas no triângulo retângulo. Foi mostrado aos alunos um triângulo retângulo construído de metalon em tamanho grande, para que todos os alunos tivessem acesso a visualização dele. Depois, foram trabalhados os conceitos básicos e as partes que compõem um triângulo retângulo.

Foi verificado que alguns alunos já conheciam as relações trigonométricas no triângulo retângulo e nesse momento, puderam expressar seus conhecimentos sobre o assunto. O grupo C citou as relações que envolviam as funções seno, cosseno e tangente, dizendo que aprenderam no ano anterior.

A tarefa proposta a partir desse momento foi discutir com os alunos a possibilidade de calcular a altura de um prédio usando as informações citadas no enunciado da tarefa. A ideia era relacionar os conceitos discutidos até então com a relação do uso do triângulo e da trigonometria no cálculo de alturas inacessíveis. O enunciado da tarefa proposta se encontra na figura a seguir:



Figura 21-enunciado da tarefa proposta

TAREFA 1: Um engenheiro foi contratado para calcular a altura de um prédio sem subir nele. A uma distância de 40 metros, constatou-se que era possível construir o seguinte triângulo retângulo. Qual é a altura aproximada do prédio?



Fonte: SAEGO (Sistema de Avaliação Educacional do Estado de Goiás), 2018

Todos os grupos chegaram a mesma resposta, sendo que conseguiram realizar o desenvolvimento dos cálculos usando as funções trigonométricas estudadas em sala. Segue abaixo a resposta obtida por um aluno de um dos grupos.

Figura 22-resposta do grupo A a tarefa proposta

$$\begin{aligned} 30^\circ \\ 1 - \text{tg} = \frac{x}{40} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ x = \frac{40 \cdot \sqrt{3}}{3} \quad x = \frac{40 \cdot 1,7}{3} \quad x = \frac{68}{3} = 22,66 \end{aligned}$$

Fonte: Autor 2024

Assim, foi possível perceber que todos os grupos alcançaram o objetivo da questão proposta, que é entender a utilização da função seno em contextos semelhantes. Vale ressaltar que a relação se dá a partir da construção de um triângulo, utilizando as informações do enunciado. Daí surge a utilização das relações trigonométricas no triângulo.

Se considerarmos essa questão como uma tarefa, surge nesse interín uma técnica de resolução que foi utilizada em todos os grupos, baseada em praxeologias anteriores. Segue a respostas dos alunos dos grupos B e C que representam a técnica utilizada.



Figura 23- resposta do grupo B a tarefa proposta

Handwritten work for Figure 23:

$$1 - \text{Tg} = \frac{x}{40} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x = \frac{40 \cdot \sqrt{3}}{3} \quad x = \frac{40 \cdot 1,7}{3} \quad x = \frac{68}{3} = 22,66$$

Fonte: Autor 2024

Uma observação considerada relevante é que todos os grupos utilizaram o recurso de arredondamento de valores, mesmo sem ser mencionado durante as discussões. Ao utilizarem a $\sqrt{3}$ como o valor da função tangente do ângulo de 30° , todos os grupos utilizaram 1,7, embora todos os grupos estivessem a disposição uma tabela com valores trigonométricos dos ângulos de 1° a 89° . Essa tabela foi disponibilizada pelo professor durante a resolução da tarefa. Segue a resposta encontrada pelo grupo C.

Figura 24- posta do grupo C a tarefa proposta

Handwritten work for Figure 24:

$$(1) \text{Tg}(30) = \frac{H}{40}$$

$$4 = 40 \cdot \text{Tg}(30)$$

$$H = 40 \cdot \frac{1,7}{3}$$

$$H = \frac{68}{3}$$

$$H = 22,66$$

Fonte: Autor 2024

Ficou evidente que os alunos conseguiram utilizar a mesma técnica nessa primeira tarefa proposta, levando em consideração os conceitos discutidos em sala e a referência de conceitos de assuntos que ancoravam a aprendizagem nesse contexto, conceitos matemáticos que serviram como pré-requisitos para aquisição de novos conceitos, e que de certa forma, foram adquiridos em anos escolares anteriores. Segue a resposta do grupo D a primeira tarefa proposta.



Figura 25- resposta do grupo D a tarefa proposta

Questão 1

$$\operatorname{tg} 30^{\circ} = \frac{ca}{C.A.A}$$

$$\frac{x}{3} \times 40$$

$$3x = 40 \cdot 1.7$$

$$3x = 68$$

$$x = \frac{68}{3}$$

$$x \approx 22,7m.$$

Fonte: Autor 2024

De acordo com as respostas apresentadas pelos alunos, podemos perceber que há uma análise implícita sobre a utilização de qual função trigonométrica será necessária para determinado tipo de tarefa, como previmos na análise *a priori*. Nos momentos posteriores será possível verificar que em algumas tarefas, existe uma certa confusão na utilização das funções e nos critérios de escolhas estabelecidos pelos alunos para a utilização da técnica de resolução da tarefa.

Uma segunda tarefa foi proposta aos alunos afim de verificar os critérios de escolha da função a ser utilizada. A tarefa proposta não dispunha de uma ilustração que favorecesse a compreensão dos alunos, o que foi considerada uma restrição ao desenvolver a técnica utilizada. Nem todos os grupos conseguiram resolver a tarefa com precisão, alguns deles inclusive apresentaram respostas equivocadas.

Figura 26-segunda tarefa proposta aos alunos

TAREFA 2: (Cesgranrio) Uma escada de 2 m de comprimento está apoiada no chão e em uma parede vertical. Se a escada faz 30° com a horizontal, a distância do topo da escada ao chão é de:

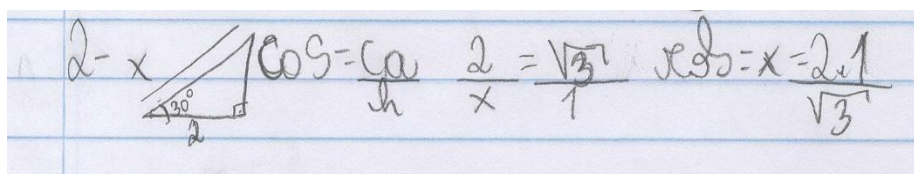
Fonte: Cesgranrio, 2014

Segue abaixo a resposta desenvolvida pelos grupos de alunos, a partir de suas próprias análises e execução da técnica e tecnologia necessária. Foi permitido o uso



da calculadora pra que se obtesse os resultados mais aproximados possíveis.

Figura 27-resposta do grupo A a segunda tarefa proposta

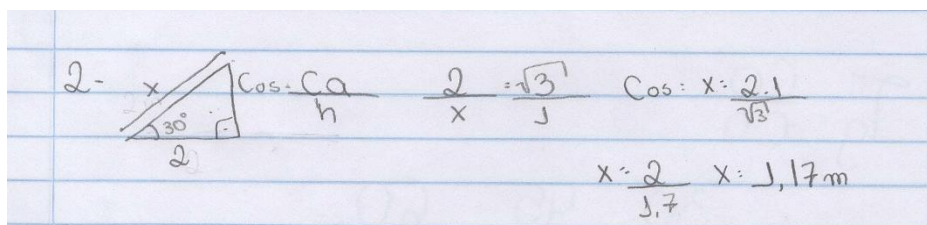


Fonte: Autor 2024

A figura mostra que o grupo A não conseguiu expressar sua resposta de forma clara, havendo inclusive certa confusão em que função utilizar e como construir uma ilustração que pudesse representar a situação da tarefa proposta. Depois, mesmo com o auxílio da calculadora, o grupo não conseguiu apresentar um resultado satisfatório, deixando incerto e demonstrando uma certa dúvida em apresentá-lo.

Em relação ao grupo B, a análise e a técnica utilizada foi a mesma do grupo A, porém o grupo B conseguiu apresentar uma resposta ao final do processo. Porém, a função trigonométrica utilizada também foi equivocada. A função utilizada deveria ser a função seno, porém, foi utilizada a função cosseno. A figura abaixo mostra o resultado encontrado pelo grupo.

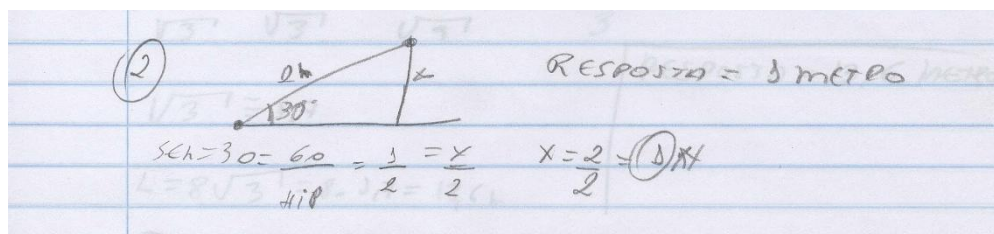
Figura 28-: resposta do grupo B a segunda tarefa proposta



Fonte: Autor 2024

Por outro lado o grupo C apresentou o uso da função trigonométrica corretamente, apresentando o resultado com precisão e registrando todo o procedimento de forma satisfatória. A figura abaixo mostra isso.

Figura 29-resposta do grupo C a segunda tarefa proposta

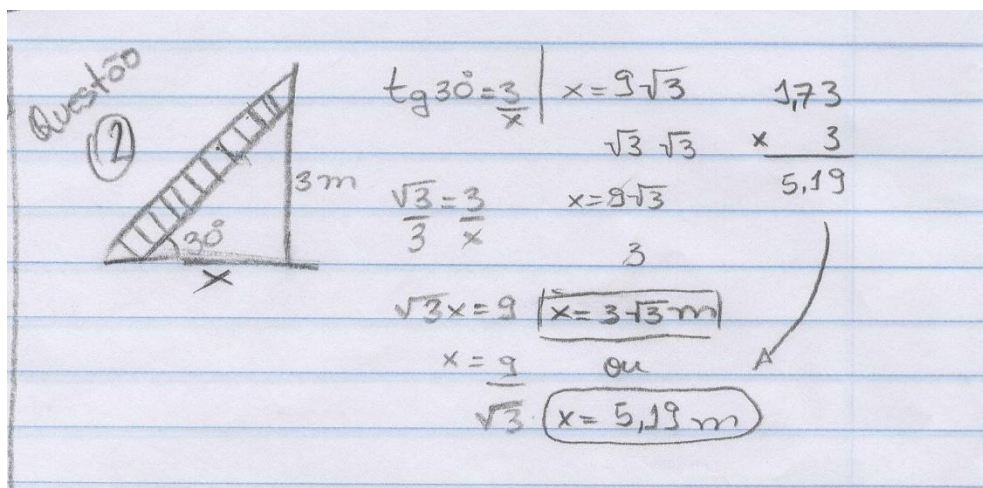


Fonte: Autor 2024



Por fim o grupo D conseguiu construir a ilustração com as informações do enunciado da tarefa de forma correta, da qual demonstrava exatamente a situação proposta, porém ao resolver acabou utilizando a função tangente em vez da função seno. Dessa forma, acabou apresentando um resultado diferente dos demais grupos. Isso pode ser ilustrado na figura abaixo.

Figura 30-resposta do grupo C a segunda tarefa proposta



Fonte: Autor 2024

É fácil verificar que o grupo D utilizou de recursos e conhecimentos adquiridos no 9º ano do Ensino Fundamental, em relação aos números reais e suas diferentes formas de representação. Pode-se observar que os alunos do grupo D ficaram bem a vontade ao simplificar o resultado obtido, utilizando inclusive o recurso de racionalização de denominadores.

Conforme a análise a priori, pode-se avaliar que a melhor resposta não necessariamente é a resposta correta. Pois o processo pelo qual os alunos foram conduzidos até expressar o resultado da tarefa mostrou um aprendizado de diferentes conceitos já adquiridos em anos anteriores. Apesar das diferentes respostas encontradas, isso mostra que os olhares divergentes para a mesma situação dos diferentes grupos de alunos nos leva a uma análise diferente para a mesma situação.

Foi proposta ainda uma terceira tarefa nesse momento 3. A tarefa agora traz uma ilustração da situação e remonta a utilização da função seno, mesma técnica utilizada na tarefa 2. A ideia é apresentar uma situação semelhante, porém com o recurso da ilustração para facilitar o processo de levantamento de hipóteses e



argumentação sobre elas. A figura abaixo traz a tarefa 3 proposta aos alunos.

Figura 31-terceira tarefa proposta aos alunos

TAREFA 3: Um teleférico foi instalado ligando uma base ao cume de uma montanha. Para a instalação, foram utilizados 1358 m de cabos, dispostos a uma angulação de 30° em relação ao solo. Qual a altura da montanha?



Fonte: Corpo de Bombeiros Militar de Santa Catarina - CBM-SC, 2010

Com o auxílio da ilustração, pode-se perceber que todos os grupos tiveram facilidade em apresentar a resposta com precisão e escolher a função trigonométrica mais adequada para a resolução da tarefa. A técnica utilizada por cada grupo acabou sendo a mesma, apresentando assim mesmo resultado. Segue a resposta apresentada pelo grupo A.

Figura 32-resposta do grupo A a terceira tarefa proposta

Fonte: Autor 2024

Como a função correta a ser utilizada foi a função seno e o ângulo apresentado era 30° , temos uma tarefa em que o resultado não precisaria de arredondamento, o que levou alguns grupos, inclusive, a realizar os cálculos manualmente, sem o auxílio da calculadora. Isso pode ser observado na resolução do grupo B, conforme a figura abaixo.



Figura 33-resposta do grupo B a terceira tarefa proposta

$$3 - \text{Sen } 30 = \frac{CO}{h} = \frac{X}{1358} = \frac{1}{2} \quad X = \frac{1 \cdot 1358}{2}$$

$$X = \frac{1358}{2} \quad X = 679$$

Fonte: Autor 2024

O grupo C seguiu a mesma linha de análise da tarefa e realizou os cálculos utilizando a mesma técnica dos grupos anteriores. O resultado foi exatamente o mesmo, conforme podemos observar na figura abaixo.

Figura 34-resposta do grupo C a terceira tarefa proposta

$$3 \text{ Sen } 30 = \frac{CO}{h} \quad H = 679$$

$$\text{Sen } 30 = \frac{4}{1358}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{1358} \quad \text{RESPOSTA} = 679 \text{ metros}$$

Fonte: Autor 2024

Já o grupo D fez uma análise semelhante dos demais grupos, porém, na hora de registrar esse análise, ficou bem mais detalhado e de fácil compreensão, associando cada informação mencionada com os conceitos e termos do triângulo retângulo. Ao associar a Hipotenusa com os compimentos dos cabos do teleférico, fica evidente a associação dos conceitos e compreensão da utilização desses conceitos em situações práticas. Isso pode ser observado na figura abaixo.

Figura 35-resposta do grupo D a terceira tarefa proposta

$$\text{Sen } 30 = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{Sen } 30 = \frac{\text{altura do montanha}}{\text{comprimento dos cabos}}$$

$$0,5 = \frac{\text{altura da montanha}}{1358}$$

$$0,5 \cdot 1358 = \text{altura do montanha}$$

$$679 \text{ m} = \text{altura da montanha}$$

Fonte: Autor 2024

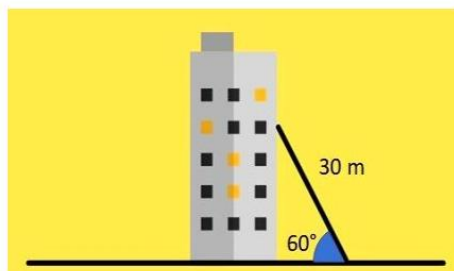


É interessante destacar, que apesar de ter reconhecido dificuldades para representar por meio de uma ilustração a tarefa 2, o que causou uma certa restrição na resolução da tarefa, no caso da tarefa 3, por possuir uma ilustração já representada que ilustrava a situação proposta, facilitou a compreensão da tarefa e proporcionou uma interpretação e resolução igualitária em todos os grupos. Fica evidente que a ilustração ajuda os alunos a traçarem suas próprias conjecturas, mesmo em tarefas diferentes.

Por fim, foi apresentada a quarta e última tarefa nesse momento 03. A tarefa consistia em uma situação semelhante as tarefas anteriores, onde seria necessário a utilização da função seno. Só que nesse caso, o ângulo informado era de 60° , o que levariam os alunos a decidir se utilizariam o recurso de aproximação ou não. A figura abaixo traz a tarefa proposta.

Figura 36-quarta tarefa proposta para os alunos

TAREFA 4: (CBM-SC, soldado-2010) Para socorrer uma pessoa num apartamento durante um incêndio, os bombeiros utilizarão uma escada de 30m, que será colocada conforme a figura a seguir formando com o solo um ângulo de 60° . Qual a distância do apartamento ao chão?



Fonte: Corpo de Bombeiros Militar de Santa Catarina - CBM-SC, 2010

Essa tarefa apresentou uma certa confusão na compreensão dos alunos, pois apenas o grupo D conseguiu apresentar a resposta de forma correta, com argumentos sólidos e utilizando a aplicação da função correta. Os demais grupos, ora utilizaram a função trocada, ora apresentaram valores trocados para a função do ângulo apresentado.

O grupo A utilizou a função seno de forma correta, usando a definição do conceito da relação trigonométrica, cateto oposto dividido pela hipotenusa. Porém,



houve uma troca de valores em relação a função $\sin 60^\circ$, pois o valor é $\frac{\sqrt{3}}{2}$, que nos dá um valor aproximado de 0,8660. Já o grupo A utilizou o valor de $\frac{1}{2}$, e embora tenha utilizado a técnica de forma correta, no momento de organizar suas hipóteses acabou fazendo de forma trocada, resultando assim em um valor de 60m, que de fato não é o valor correto que se buscava.

Apesar de terem disponível uma tabela com todas as informações dos ângulos de 1° a 89° das três funções trigonométricas a serem discutidas (seno, cosseno e tangente), o grupo não utilizou do recurso e acabou usando uma informação equivocada. Segue abaixo a resposta do grupo A.

Figura 37-resposta do grupo A a quarta tarefa proposta

$$4 - \sin 60^\circ = \frac{CO}{h}$$

$$\frac{30}{x} \cdot \frac{1}{2} = \frac{30 \cdot 2}{1} \quad x = 60$$

$$x = 60m$$

Fonte: Autor 2024

O grupo B utilizou a mesma técnica do grupo A e acabou cometendo os mesmos erros de compreensão. A resposta do grupo B mostra que as ideias foram exatamente iguais, encontrando dessa forma o mesmo resultado apresentado pelo grupo anterior. Segue a resposta do grupo B a tarefa proposta.

Figura 38-resposta do grupo B a quarta tarefa proposta

$$4 - \sin 60^\circ = \frac{CO}{h}$$

$$\frac{30}{x} \cdot \frac{1}{2} = \frac{30 \cdot 2}{1} \quad x = 60$$

$$x = 60$$

Fonte: Autor 2024

Por outro lado, o grupo C demonstrou uma certa confusão ao escolher a função



trigonométrica a ser aplicada na resolução da tarefa. Não ficou claro para o grupo qual função seria utilizada, e optaram por usar a função cosseno. Vale ressaltar que todo o processo de busca pela resposta procurada foi realizado de acordo com as propriedades e relações dos conceitos discutidos, ficando evidente que o processo de busca pela solução desejada estava coerente com o que foi discutido no percurso, apenas a escolha da função a ser aplicada é que aconteceu de forma equivocada. Segue abaixo a resolução apresentada pelo grupo C.

Figura 39-resposta apresentada pelo grupo C a quarta tarefa

Handwritten student work for Figure 39. The student has circled the number 4. The calculations shown are:

$$\cos 60^\circ = \frac{x}{30}$$

$$0,50 = \frac{x}{30} \Rightarrow x = 30 \times 0,50$$

$$x = 15 \text{ m}$$

Fonte: Autor 2024

Por fim, o grupo D foi o único que utilizou o processo de forma correta e ainda escolheu a função seno para resolver a tarefa proposta. O grupo ainda utilizou do recurso de aproximação e arredondamento para apresentar sua resposta a tarefa proposta. Na figura abaixo apresentamos a resolução do grupo D.

Figura 40-resposta apresentada pelo grupo D a quarta tarefa

Handwritten student work for Figure 40. The student has written 'Questão 4' and the calculations shown are:

$$\sin 60^\circ = \frac{h}{30}$$

$$h = 30 \cdot \sin 60^\circ$$

$$h = 30 \cdot 0,87$$

$$h = 26,1 \text{ m.}$$

Fonte: Autor 2024

Depois de verificar a participação dos alunos no momento 03 ficou evidente que



a ilustração proposta nas tarefas facilita sua compreensão em organizar as ideias e elaborar estratégias de resolução. Outro fator a se destacar é que alguns alunos ainda apresentaram uma certa dúvida sobre a escolha de qual função utilizar para validar suas hipóteses. Dessa forma, o momento seguinte buscava explorar esse ambiente, de certa forma abstrato, de resolução de tarefas sem o recurso das ilustrações.

4.1.6 Momento 04

O momento 04 aconteceu no dia 05 de junho de 2024, no horário das 16h30min às 17h30min. Nessa sessão demos continuidade a lista de tarefas iniciada na aula anterior. Agora as tarefas apresentadas eram um pouco mais abstratas, para fomentar os questionamentos e a criação de hipóteses por eles elaboradas. Nesse caso, não estaria disponível no enunciado o recurso da ilustração, para que eles pudessem validar suas hipóteses a partir da figura apresentada. Segue abaixo a primeira tarefa apresentada aos alunos durante o momento 04.

Figura 41-tarefa 01 apresentada no momento 04

TAREFA 5: Um avião levantou voo, formando um ângulo de 20° com o solo, e atingiu uma altura de 1368 metros. Qual foi a distância percorrida pelo avião, em metros?

Fonte : SAEGO (Sistema de Avaliação Educacional do Estado de Goiás), 2018

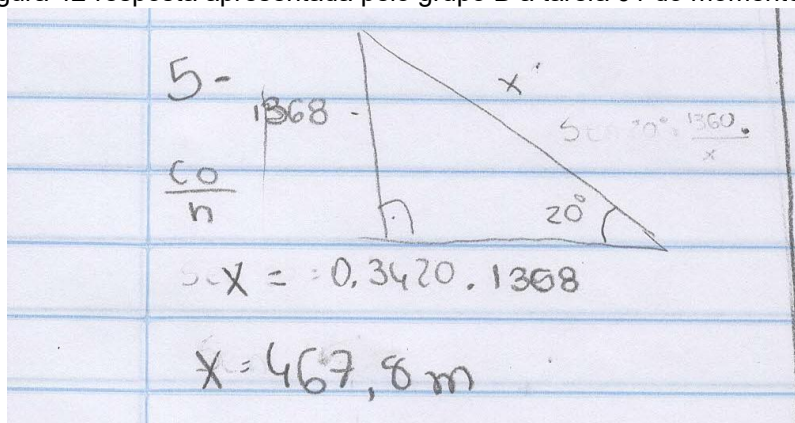
O grupo A foi o único grupo que não conseguiu apresentar nenhuma resposta a tarefa proposta. Foi possível identificar a dúvida em relação a que função utilizar, a que fatores as informações estavam relacionadas e a que os valores apresentados no enunciado se referiam: cateto oposto, cateto adjacente ou hipotenusa. Mesmo depois de incentivados a representar as informações através de uma ilustração, não conseguiram representar isso em um papel.

Já o grupo B apresentou uma resposta condizente com o enunciado, porém se equivocou a representar a relação trigonométrica no papel. Apesar da escolha da função a ser utilizado fosse adequada, no momento de expressar a função $\sin 30^\circ = \frac{\text{CATETO OPOSTO}}{\text{HIPOTENUSA}}$ houve uma leve restrição apresentada. No final, o grupo acabou trocando a operação a ser realizada, e em vez de dividir, acabou multiplicando. Segue



abaixo a resposta apresentada pelo grupo.

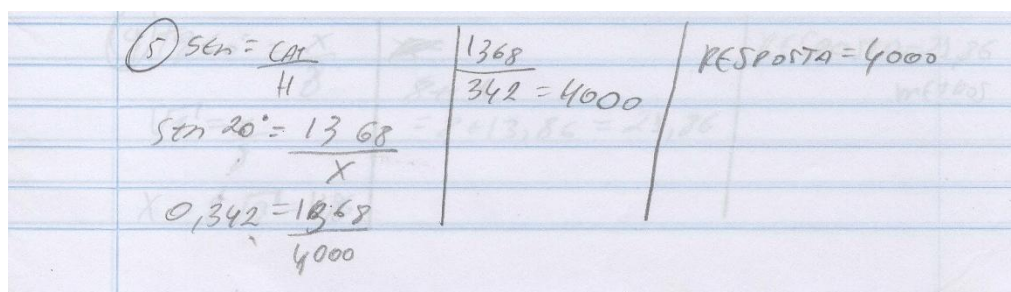
Figura 42-resposta apresentada pelo grupo B a tarefa 01 do momento 04



Fonte: Autor 2024

O grupo C conseguiu organizar suas ideias de forma sistemática, aplicando os conceitos de forma correta, utilizando a função trigonométrica adequada e estabelecendo a relação trigonométrica mais conveniente para esse tipo de situação. Utilizou a tabela trigonométrica apresentada pelo professor e resolveu a tarefa de forma satisfatória, apresentando resultado com precisão. Segue abaixo a resolução apresentada pelo grupo C.

Figura 43-resposta apresentada pelo grupo C a tarefa 01 do momento 04



Fonte: Autor 2024

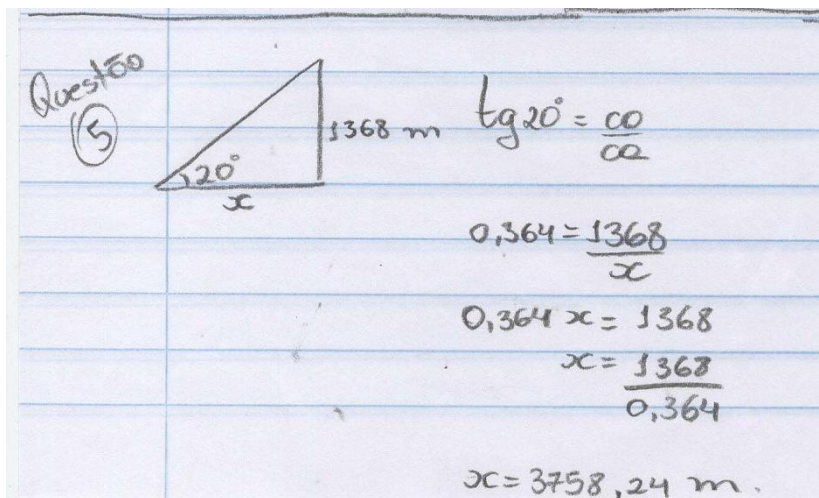
Por fim, o grupo D apresentou uma certa confusão ao estabelecer sua ilustração como referência para resolução da tarefa. A princípio, os dados foram representados de forma equivocada na ilustração por eles representada, o que acarretou em uma resolução contrária ao que se esperava.

Dessa forma, a escolha da relação trigonométrica, e por conseguinte, da função trigonométrica foi errada. Foi possível observar a utilização da tabela trigonométrica como recurso para resolução, mais o grupo acabou por optar utilizar a função tangente, onde o ideal seria função seno. Segue abaixo a resposta apresentada pelo



grupo D.

Figura 44-resposta apresentada pelo grupo D a tarefa 01 do momento 04



Fonte: Autor 2024

A tarefa apresentada comprovou uma restrição já esperada durante o desenvolvimento do percurso. Sem o auxílio de uma ilustração para validar suas hipóteses, os alunos apresentam certa dúvida sobre como organizar os dados, qual relação trigonométrica escolher e como representar isso através de uma regra de três simples. A tarefa seguinte deixou isso ainda mais evidente.

Figura 45 - tarefa 02 apresentada durante o momento 04

TAREFA 6: Um telhado é tido como de duas águas quando há dois caimentos. Em uma obra está sendo construído um telhado onde, o encontro de suas duas águas esteja exatamente no meio da lage. O ângulo de inclinação de cada água em relação a lage é de 30°. A lage possui 24 m de comprimento. Para encomendar as telhas antes mesmo da estrutura que irá sustentar o telhado estar concluída, é preciso conhecer o comprimento de cada água, que será de:

Fonte: ENEN PPL 2020

Todos os quatro grupos não conseguiram resolver a tarefa proposta, e nem conseguiram sequer estabelecer uma ilustração que pudesse representar a situação proposta. Apenas o grupo B registrou que não entendeu o enunciado, e por isso não conseguia fazer o desenho para colocar os dados da questão. Os demais grupos apenas disseram que essa eles não sabiam responder.



As dificuldades apresentadas nesse processo estavam relacionadas com a representação das informações da tarefa com uma ilustração que pudesse facilitar o levantamento de hipóteses, a escolha da relação trigonométrica adequada e o processo de validação de suas hipóteses, o que configuraram uma restrição já prevista no modelo de referência estabelecido.

Desse modo, podemos inferir, por meio dos resultados apresentados, que os alunos já demonstram uma certa compreensão e construção, de uma praxeologia matemática sobre as funções trigonométricas seno, cosseno e tangente, bem como sua aplicação em situações que trazem uma ilustração com ancorador para suas ideias e conjecturas.

Além disso, pode se observar que os momentos e sessões estabelecidos pelo PEP conseguem contemplar os elementos que abordam as organizações matemática propostas para esse percurso: aquelas que trabalham conceitos das funções trigonométricas seno, cosseno e tangente de maneira intuitiva, sem deixar clara a intenção didática por traz delas; as organizações matemáticas que abordam as relações trigonométricas a partir de um triângulo retângulo relacionada a uma situação contextualizada e adaptada a realidade; e as organizações matemáticas de forma exploratória, que busca, a partir da construção e utilização de um teodolito, explorar conceitos para a construção de definições e aplicações matemáticas.

4.1.7 Momento 05

O momento 05 aconteceu no dia 12 de junho de 2024, das 16h30min às 17h30min. Esse momento foi destinado a realização da atividade de construção do teodolito com materiais recicláveis. Depois de uma breve discussão sobre a lista do material trazido e a garantia de que todos os grupos tinham pelo menos um item de cada material solicitado, foi repassada as instruções de como seria construído o teodolito.

Durante a construção do teodolito, foi possível verificar a inquietação dos alunos em relação a sua aplicação, questionando algumas vezes sobre a importância da utilização, e a real eficiência desse objeto no cálculo de distâncias inacessíveis. O objetivo desse momento foi assegurar que todos os grupos construíssem o teodolito de forma correta, sempre sendo acompanhado pelo professor.



Figura 46-grupo de alunos construindo o teodolito



Fonte: Autor 2024

Mesmo durante esse processo, surgiram questionamentos do tipo: “Professor, esse copo realmente ajudar a calcular altura de algum objeto?” e ainda, “Nós vamos usar a matemática também, ou somente isso que estamos fazendo?” Isso deixa claro que a busca pela resposta final a questão geratriz proposta ainda continua bem viva na mente dos alunos. O momento 05 foi encerrado quando todos os grupos tinham concluído a construção do teodolito.

Figura 47-teodolito construído pelos alunos



Fonte: Autor 2024

Após a construção dos teodolitos por todos os grupos e a verificação de que todos foram feitos de acordo com as instruções estabelecidas inicialmente, os grupos de alunos foram incentivados a guardarem seus materiais de forma segura para serem apresentados no momento seguinte, onde seria realizada a utilização deles para



calcular a altura de objetos, mesmo sendo distâncias inacessíveis.

4.1.8 Momento 06

O momento 06 foi realizado no dia 19 de junho de 2024, das 16h30min às 17h30min. Nesse momento os alunos foram realizar a atividade de utilização do teodolito construído na aula anterior, e a partir de sua utilização, calcular as medidas aproximadas de alguns objetos encontrados na escola. Os objetos definidos pelo professor são: *a altura de um poste de iluminação localizado na área externa das salas de aula e a altura de uma torre de telecomunicações localizada na parte de trás do terreno da escola.*

Essa atividade trouxe a relação prática dos conceitos estudados em sala de aula com situações reais, onde de fato os conceitos seriam aplicados de forma que tivessem significado, e os alunos realizariam o questionamento do mundo, e não somente a apreciação de uma obra, como mero espectadores.

Porém, durante o desenvolvimento da atividade foi possível perceber a dúvida em relação a utilização do objeto construído, onde o professor, a cada instante, mediava o desenvolvimento da atividade, esclarecendo a forma correta de usar o aparelho para medir os ângulos de visão de cada aluno observador.

Figura 48-grupo de alunos utilizando o teodolito construído



Fonte: Autor 2024



Após a medidas dos ângulos de visão de todos os objetos propostos, por pelo menos três alunos de cada grupo, eles foram orientados a medir a distância, usando uma trena, do local de observação do objeto, até o ponto inicial do objeto observado. Nesse contexto, os próprios alunos foram orientados a medir a distância, sempre com a orientação do professor.

Após a medida das distâncias propostas, os alunos foram orientados a registrar em uma ficha cada informação encontrada, para discussões posteriores. Essas discussões ocorreriam no momento 07.

4.1.9 Momento 07

O momento 06 foi realizado no dia 26 de junho de 2024, das 16h30min às 17h30min. Nesse momento foram realizadas outras tarefas, semelhante as primeiras apresentadas, onde os alunos deveriam colocar em prática o que aprenderam durante as aulas desenvolvidas. Assim, os alunos puderam compreender a aplicabilidade dos conceitos discutidos em sala, bem como elaboraram suas próprias conjecturas no intuito de resolver a questão geratriz.

Por meio da utilização do teodolito pelos alunos, foi possível perceber que o modelo didático alternativo de nosso PEP, integrado a atividade prática, permitiu a construção das praxeologias matemáticas sobre as funções seno, cosseno e tangente, integradas as organizações matemáticas associadas as relações trigonométricas. Observamos no quadro abaixo, as praxeologias matemáticas levantadas no MER que foram construídas pelos alunos durante as explorações e participações em todas as sessões do PEP.

Quadro 06 – Praxeologias Matemáticas construídas sobre as relações trigonométricas.

TAREFA	TÉCNICA	TECNOLOGIA/TEORIA
Associar a relação trigonométrica mais adequada em uma situação de cálculo de altura	Escolher a relação trigonométrica mais adequada e efetuar os cálculos usando a proporcionalidade	Definição das relações trigonométricas no triângulo retângulo
Aplicar a função trigonométrica seno,	Escolher a relação trigonométrica mais	Definição das relações trigonométricas no triângulo



cosseno ou tangente numa situação de medidas inacessíveis	adequada e efetuar os cálculos usando a proporcionalidade	retângulo
Determinar a distância, largura ou altura de determinados objetos	Representar através de uma ilustração as informações descritas na tarefa	Definição das relações trigonométricas no triângulo retângulo
Utilizar o teodolito para aferir o ângulo de visão de determinado objeto	Uso do teodolito de forma correta	Tabela trigonométrica das funções seno, cosseno e tangente e seus respectivos ângulos

Fonte: Autor 2024

Salientamos, que para o alcance dessas praxeologias matemáticas, a utilização do teodolito foi de grande relevância. Pois o mesmo proporcionou a partir das medidas coletadas, que os alunos representassem os dados coletados, de modo a compreender o estudo das relações trigonométricas. Além disso, a utilização do teodolito na prática, permitiu que os alunos pudessem criar suas próprias ilustrações em situações semelhantes, o que de certa forma, tinha sido verificado como principal restrição na resolução das tarefas. Isso permitiu aos alunos construir seus próprios modelos matemáticos para a resolução de tarefas semelhantes, considerando as praxeologias matemáticas que favorecem esse contexto.

Assim, ficou evidente que durante os 07 momentos do desenvolvimento do PEP, os alunos estabeleceram suas conjecturas de forma argumentativa, na tentativa de responder a questão geratriz, aproximando-se assim da resposta esperada. Após a finalização das discussões sobre a atividade desenvolvida com o uso do teodolito, retomamos a nossa questão norteadora: *“Como calcular a medidas de distâncias inacessíveis?”*

Ao retomar essa discussão, os alunos escreveram em seus cadernos suas opiniões, agora fundamentada em conceitos pré-estabelecidos e práticas construídas ao longo de sete sessões. Acompanhamos agora as respostas dos quatro grupos.

Grupo A: Basta usar um teodolito para medir o ângulo de visão, em seguida, através das relações trigonométricas, efetua-se o cálculo para descobrir, Só precisa ter cuidado na hora de escolher a função correta, se é seno, cosseno ou tangente;



Grupo B: Tem que saber trigonometria. Mas hoje fica fácil, basta utilizar a tabela de valores que se acha na internet. Ah, precisa também de um teodolito para medir o ângulo, pois sem o ângulo não se consegue calcular;

Grupo C: Basta usar as funções da matemática que são seno, cosseno e tangente. Também tem que ter o ângulo, mas tem um aparelho que mede, só não lembro o nome agora;

Grupo D: No início falamos que tinha que saber matemática, mas a gente não sabia muito bem como fazer. Depois dessas aulas ficou mais claro para a gente que é usando a trigonometria. Usando as funções seno, cosseno e tangente e aquela tabela que o senhor deu pra gente, é possível calcular qualquer medida. Mas ainda precisa do ângulo, sem ele não dá pra calcular. Se mede o ângulo com um teodolito, que é um aparelho usado para medir ângulos. Acho que é isso.

Baseado nas respostas acima, podemos afirmar que todos os grupos de alunos conseguiram chegar ao contexto intra-matemático. O PEP desenvolvido permitiu que as organizações matemáticas trabalhadas, integradas com a utilização prática do teodolito, consolidasse os conceitos das relações trigonométricas bem como sua utilização em situações práticas.

Diante desse contexto, vale ressaltar que, apesar dos alunos das escolas públicas estarem inseridos em metodologias de ensino que diferem do paradigma do questionamento do mundo e do PEP, como foi mostrado no MED, os mesmos conseguiram estudar as relações trigonométricas por meio de uma questão geratriz.

Outro fator que merece destaque é a presença de dialéticas durante todo o processo de desenvolvimento do PEP. Durante a construção do conhecimento matemático em relações as funções trigonométricas e suas relações dentro de um triângulo retângulo, foi possível notar a presença da dialética dos ostensivos e não ostensivos.

Para Chevallard (1999) e Bosh (2001), ostensivos são objetos, materiais do tipo escrito, gráfico, gestual, ilustrações e outros, perceptíveis aos seres humanos; já os não ostensivos são objetos que podem ser mobilizados por objetos ostensivos, como conceitos, definições, conjecturas, intuições, ideias próprias, dentre outros. Nesse



sentido, nosso modelo didático alternativo se baseava na utilização de um material manipulativo (teodolito) para reformular as conjecturas e subsidiar as ideias dos alunos durante o processo de compreensão e consolidação dos conceitos estudados.

Portanto, nesse interín pode se perceber a utilização de um contrato didático baseado no protagonismo do aluno, onde eles tem o papel principal enquanto que o professor desempenha um papel de mediador no processo investigativo da construção de conceitos do objeto de conhecimento pesquisado. Assim, concluímos que um estudo das relações trigonométricas integrado ao repertório de praxeologias matemáticas, levando em consideração a dialética do ostensivo e não ostensivo é capaz de minimizar restrições relacionadas a este conceito matemático (funções trigonométricas) utilizando um dispositivo prático de estudo, pesquisa como mecanismo investigativo.



5 CONCLUSÃO

O presente trabalho visa trazer a ideia de que a abordagem do objeto de ensino Relações Trigonométricas no Triângulo tem propriedades muito relevantes em outras áreas do conhecimento e sua aplicação em diferentes contextos perpassa pela mobilização de praxeologias desenvolvidas por distintos professores em diferentes instituições de ensino, sendo assim o confronto de praxeologias alcançado durante a realização do PEP com os professores se mostrou potente ao reconhecer que o trabalho colaborativo levando em consideração o cotidiano do aluno favorece tanto ao ensino quanto a aprendizagem.

Nossa discussão é sobre um dispositivo didático chamado de Percurso de Estudo de Pesquisa (PEP), que está fundamentado teoricamente no campo da Didática da Matemática e tem com a Teoria Antropológica do Didático a sua base conceitual. Contudo, a noção de contrato didático tem um papel importante no auxílio da compreensão dos fenômenos que um PEP poderá proporcionar, tanto nas mudanças desse contrato, bem como em suas rupturas.

O PEP apresenta uma proposta metodológica diferente, indicando “novos” caminhos para o professor buscar o ensino dos conceitos previstos durante o ensino de trigonometria, o que poderá promover uma compreensão mais significativa desses conceitos pelos alunos. Durante a realização do percurso, existe a possibilidade de aplicação para resolver problemas relacionados à realidade do aluno ou à sociedade na qual ele está inserido, buscando apresentar-se como uma resposta aos problemas relacionados a epistemologia escolar monumentalista.

As reflexões que emergiram da pesquisa deixam evidente que utilização do PEP requer mudanças na prática docente e, conseqüentemente, nas ações dos alunos em sala. Essas mudanças tendem a promover rupturas no processo didático que envolve professor-alunos-saber. O papel do professor em incluir tipos de tarefas diferentes que envolvam técnicas diferentes, partindo de uma organização pontual para uma local; local para regional e regional para global, pode favorecer uma ampliação do conceito trabalhado, mobilizando mais de uma técnica e mais de uma tecnologia.

Para a nossa proposta de aplicação do PEP observando atentamente a relação com o saber trigonometria no triângulo na rede estadual de ensino com



professores que lecionam no 1º ano do Ensino Médio, possibilitou emergir um modelo epistemológico de referência que servirá de base para elaboração e aplicação do dispositivo, no qual estará principalmente baseado na modelização matemática e na modelização trigonométrica prática. Durante a aplicação do PEP, as atividades de estudo nos possibilitarão observar e analisar qual o comportamento dos alunos frente ao conceito de trigonometria, observando suas rupturas, as mudanças de praxeologias e os tipos de organizações matemáticas que emergem nos momentos didáticos.

Por outro lado, o uso do Percurso de Estudo e Pesquisa como teoria e metodologia de pesquisa traz a ideia da construção de um percurso matemático de tarefas a partir de um modelo epistemológico de referência, com o intuito de identificar os caminhos percorridos pelos professores no desenvolvimento de sua prática em sala de aula, para que possam buscar garantir uma aprendizagem mais efetiva dos alunos.

Sobre a Teoria Antropológica do Didático (TAD), espera-se que esta pesquisa forneça subsídios teóricos e práticos para uma discussão mais aprofundada dessa teoria, e que fomente outros pesquisadores a buscar a abordagem desse tema, que tem surgido nos últimos anos como abordagem alternativa para o enfrentamento das condições e restrições que se impõem aos professores que ensinam matemática.

Além dos resultados alcançados, é importante reconhecer alguns limites e dificuldades encontrados ao longo do desenvolvimento desta pesquisa. Um primeiro limite refere-se ao número de sujeitos envolvidos, tanto no PEP com os professores quanto na aplicação com os alunos, o que, embora não comprometa a profundidade das análises realizadas, restringe a possibilidade de generalizações mais amplas. Outro aspecto limitador diz respeito ao tempo disponível para o desenvolvimento do PEP em sala de aula, uma vez que o calendário escolar, as demandas institucionais e a organização curricular impuseram restrições ao aprofundamento de algumas tarefas e discussões que emergiram durante o percurso.

No que se refere às dificuldades enfrentadas, destaca-se o processo de ruptura com práticas docentes historicamente cristalizadas, tanto por parte dos professores quanto dos alunos. A transição de um paradigma de visita às obras para o paradigma do questionamento do mundo, conforme discutido à luz da Teoria Antropológica do Didático, mostrou-se um movimento complexo, que exige tempo, acompanhamento e



um investimento contínuo na formação docente. Em alguns momentos do percurso, foi possível observar resistências iniciais, inseguranças e a necessidade de mediações mais frequentes por parte do pesquisador, especialmente no que tange à condução das tarefas investigativas e ao uso de recursos práticos, como o teodolito.

Durante o desenvolvimento da pesquisa, algumas questões permaneceram em aberto e não puderam ser plenamente respondidas no escopo deste trabalho. Entre elas, destaca-se a necessidade de investigar como o PEP se comportaria em contextos institucionais distintos, com turmas mais numerosas ou em escolas com diferentes condições de infraestrutura. Além disso, emerge como questão relevante a análise longitudinal dos efeitos do PEP, buscando compreender se as mudanças observadas nas praxeologias dos professores e nas organizações matemáticas dos alunos se mantêm ao longo do tempo ou se demandam intervenções formativas contínuas.

Esses aspectos apontam para possíveis desdobramentos futuros da pesquisa, tais como a ampliação do PEP para outros objetos matemáticos, a investigação de micro percursos de estudo e pesquisa em diferentes níveis de ensino, bem como a articulação do PEP com processos de formação continuada de professores em larga escala. Tais desdobramentos podem contribuir para aprofundar a compreensão das potencialidades e restrições do PEP enquanto dispositivo didático e metodológico no campo da Educação Matemática.

Por fim, é possível afirmar que a tese defendida neste trabalho foi alcançada, uma vez que os resultados evidenciam que o uso do Percurso de Estudo e Pesquisa, sob as lentes da Teoria Antropológica do Didático, contribui significativamente para o confronto das praxeologias dos professores que ensinam matemática no Ensino Médio, favorecendo rupturas com modos de ensinar cristalizados. Esse movimento possibilita a construção de um ensino mais investigativo, contextualizado e alinhado ao paradigma do questionamento do mundo, promovendo um olhar mais crítico, holístico e reflexivo sobre os processos de ensino e aprendizagem da trigonometria no triângulo.



6 REFERÊNCIAS

ABBOT, P. Trigonometria. 2ª ed. São Paulo: Hemus, 2004.

ALBUQUERQUE, W. M. **Praxeologias da educação estatística na formação de professores dos anos iniciais: o caso do pensamento transnumerativo**. Tese de doutorado. Universidade Federal do Pará. Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática. Belém – PA. 2021.

ALMOULOUD, S. A., NUNES, J. M. V., PEREIRA, J. C. S., FIGUEROA, T. P. Percurso de estudo e pesquisa como metodologia de pesquisa e de formação. Revista de Educação da Universidade Federal do Vale do São Francisco – REVASF, Petrolina – Pernambuco. Vol. 11, n.24, p. 427-467. Janeiro, 2021

ALMOULOUD, S. A. FARIAS, L. M. S., HENRIQUES, A Teoria Antropológica do Didático; princípios e fundamentos. Curitiba – PR. Editora CRV, 2018

ALMOULOUD, S. A. FARIAS, L. M. S., HENRIQUES, NUNES, A. Percurso de estudo e pesquisa a luz da teoria antropológica do didático.: fundamentos teóricos metodológicos para a formação. Volume 1. Curitiba – PR. Editora CRV, 2022

ALMOULOUD, S. A. FARIAS, L. M. S., HENRIQUES, NUNES, A. Percurso de estudo e pesquisa a luz da teoria antropológica do didático.: fundamentos teóricos metodológicos para a formação. Volume 2. Curitiba – PR. Editora CRV, 2022

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos de didática da matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

ARTIGUE M. **Epistémologie et Didactique. Recherche en Didactique des Mathématiques**, vol. 10 (2/3), p. 138-170, 1991.

BENITO, R. N. Construção de um Percurso de estudo e Pesquisa para formação de professores: o ensino de cônicas. PUC - São Paulo, 2019 (Tese de Doutorado)

BORBA, Marcelo de Carvalho. PENTEADO, Mirian Godoy. **Informática e educação matemática**. Belo Horizonte. Autêntica Editora, 2019. (Coleção Tendências em Educação Matemática)

BOSCH, M. Os modelos praxeológicos de referência: reflexões metodológicas desde a TAD. Actes du seminaire de didactique des mathematiques de ARDM – 2019.

BOSCH, M.; GASCÓN, J. Fundamentación antropológica de las organizaciones didácticas: de los “talleres de prácticas matemáticas” a los “recorridos de estudio e investigación”. In: BOSCH, M.; GASCÓN, J. Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action. Montpellier: Université de Montpellier, 2010. p. 55-91.

BOSCH, M.; CHEVALLARD, Y. **La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs Objet d'étude et problematique**. Recherches en Didactique des Mathématiques. vol 19, no 1, p.77-124, 1999.



BOSCH, M. e GASCÓN, J. **25 años de transposición didáctica. Actas del I Congreso internacional sobre la Teoría Antropológica de lo Didáctico**. Baeza. 2006.

BOSCH, M. e GASCÓN, J. **Las Prácticas Docentes Del Profesor de Matemáticas**. Xèleme École d'Été de Didactique des Mathématiques, Barcelona, 2001.

BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria**. En M.J. González,

M.T. González & J. Murillo (Eds.), Investigación em Educação Matemática XIII, p. 89-113, Santander: SEIEM, 2009.

BOSCH, M. GARCIA, j. GASCÓN, j. e RUIZ HIGUERAS. L. **La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar**. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico *Revista Latinoamericana de Investigaciones Matemática Educativa (RELIME)*, Vol. 18 nº 2, México, 2006, P. 37-74.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. São Paulo. Editora Edgard Blucher, 1974.

BRACONNE-MICHOUX, A. (2014) Les niveaux de pensée em géométrie de van Hiele: de la théorie à l'épreuve de la classe. Bulletin AMQ, v. 54, n.1, p.24-51.

BRANCA, N. A. **Resolução de Problemas como meta, processo e habilidade básica**. In: STEPHEN, R. R. E.A Resolução de problemas na Matemática escolar. São Paulo, SP: Atual, 1997. p. 4-12.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio. Brasília: MEC/SEF, 2000.

BROUSSEAU, G. **Theory of didactical situations in mathematics**. Dordrencht. Kluwer, 1997.

BROUSSEAU, G. **Theory des situations didactiques: Didactiques das mathématiques 1970-1990**. (Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield, Eds. & Trad.). Grenoble: La pensée Sauvage 1998.

BROUSSEAU, G. **Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques**, Recherches en Didactique des Mathématiques, v. 7.2, p. 33-115, 1986.



BROUSSEAU, G. **Utilidad e interés de la didáctica para um professor**, Suma, v. 4, p. 5-12, 1989.

BROUSSEAU, G. “**¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de las matemáticas? (Primera parte)**”. Revista Enseñanza de las Ciencias. España, Institut de Ciències de l'Educació de la Universitat Autònoma de Barcelona: vol: 8,3, pag: 259-267. Traducción al español de Luis Puig, 1990.

BROUSSEAU, G. **Problèmes et résultats de Didactique des Mathématiques**, ICMI, Study 94, Washington, 1994.

BROUSSEAU, G. **Os diferentes papéis do professor**. In: PARRA, C.S.I (Org). Didática da Matemática – Reflexões pedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

BROUSSEAU, G. **Theory of didactical situations in mathematics**. Dordrecht: Kluwer, 1997.

BROUSSEAU, G. **Théorie des situations didactiques**, Grenoble: La Pensée Sauvage - Éditions, coll. Recherches en Didactique des Mathématiques, 1998.

BROUSSEAU, G. **Les différents univers de la mesure et leurs situations fondamentales**. Um exemplo d'utilização de la théorie des situations pour l'ingénierie. Quaderni di Riberca in Didattica, v. 9, 2000. Disponível em: <http://dipmat.unipa.it/~grim/quaderno9.htm>, acessado em 12 de abril de 2024.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino**. São Paulo: Ática, 2008.

BURGER, W. F.; SHAUGHNESSY, J. M. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. Journal for research in mathematics education, p. 31-48

CARVALHO, Dierson Gonçalves de. SANTOS, Marilene Rosa dos. O Paradigma do questionamento do mundo entre o didata Yves Chevallard e o pedagogo Paulo Freire. Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC. Belém – PA, 2023

CHEVALLARD, Y. *La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder*; ClermontFerrand, 16-23 août 2009. Disponível em <http://yves.chevallard.free.fr>. Acesso em junho de 2022.

CHEVALLARD, Y. La TAD face au professeur de mathématiques. 2009. Disponível em: Acesso em: agosto. 2022.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Estudar matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem**. Tradução: Daisy Vaz de Moraes, Porto Alegre: Artmed, 2001.

CHEVALLARD, Y. **Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel**. Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique, Université Joseph Fourier, Grenoble 1, 26 juin, Document interne n° 108, 1989.



CHEVALLARD, Y. **Didactique, anthropologie, mathématiques, Postfacio a la 2ª edición de La transposition didactique**. Du savoir savant au savoir enseigné, La pensée Sauvage: Grenoble, 1991.

CHEVALLARD, Y. **l'analyse des pratiques enseignantes em théorie anthropologique du didactique**. Recherches em didactique des Mathématiques. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v. 19.2, p 221-265, 1999.

CHEVALLARD, Y. **Aspectos problemáticos de la formación docente**. *XVI Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de lās Matemáticas*, Huesca, 2001. Disponível em: <http://www.ugr.es/local/jgodino/siidm.htm>.

CHEVALLARD, Y. **Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques**. In S. Maury et M. Caillot (Ed.), *Rapport au savoir et didactiques*. Paris: Faber, p. 81-104, 2003.

CHEVALLARD, Y. **Vers une didactique de la codisciplinarité**. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire, 2004. <http://yves.chevallard.free.fr>. Acessado em 04 de setembro de 2023.

CHEVALLARD, Y. **La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire: transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire**. Conferência dada en la 3ª «Université d'été Animath», Saint-Flour, 22-27 de Agosto de 2004. Publicado en *La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire*, APMEP, pp. 239-263, 2005.

CHEVALLARD, Y. **Steps towards a new epistemology in mathematics education**. In BOSCH, M. (ed.) *Proceedings of the 4th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4)*, (pp. 21-30), 2006.

CHEVALLARD, Yves. **La TAD face au professeur de mathématiques**, Toulouse, 29 de abril, 2009a, < http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=161>. Acessado em 8 de out. 2024.

CHEVALLARD, Y. **La transposición didáctica: Del saber sábio al saber ensenado**. Buenos Aires, Aique Grupo, 2009b.

CHEVALLARD, Yves. **Didactique et formation des enseignants**, Poitiers, 13 de maio, 2009c, Disponível em < http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=161>. Acessado em 8 de out. 2024.

CHEVALLARD, Yves. **La notion de PER : problèmes et avancées**. Toulouse, 2009d, Disponível em < http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=161>. Acessado em 8 de out. 2024.

CHEVALLARD, Y. **La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponses à partir de la TAD**. in Margolinas et all.(org.) : *En amont et en aval des ingénieries didactiques*, XVª École d'Été de Didactique des Mathématiques – Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme). *Recherches em Didactique des Mathématiques* . Grenoble : La Pensée Sauvage, , v. 1, p. 81-108, 2009e.



CHEVALLARD, Y. **Notas do Curso de Altos Estudos : Iniciação a Teoria Antropológica do Didático**. São Paulo: UNIBAN, 2011.

COSTA, Viviane Angélica; ARLEGO, Marcelo; OTERO, Maria Rita. Las dialécticas em um recorrido de estudio e investigación para la enseñanza del cálculo vectorial em la universidad. *Revista de Formación e Innovación Educativa Universitaria*. Vol. 8, Nº 3, 146-161 (2015).

COSTA, N. M. L. Funções seno e cosseno: uma sequência de ensino a partir dos contextos do “Mundo Experimental” e do computador. 1997. 174 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Católica de São Paulo, São Paulo: PUC, 1997.

COSTA, B. P.; LIMA, R. M. Modelagem e trigonometria: desafios e possibilidades no ensino médio. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, v. 10, n. 3, p. 45-62, 2019.

D’AMORE, Bruno. **Elementos de didática da matemática**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

FERNANDES, M. A. Funções trigonométricas e aprendizagem significativa: um estudo de caso. *Educação Matemática em Revista*, v. 24, n. 2, p. 70-88, 2018.

FERREIRA, J. L. et al. Trigonometria: conhecimento de conteúdo e de ensino – uma revisão sistemática. *Bolema*, v. 36, n. 64, p. 421-440, 2022.

GASCÓN, J. **El problema de la Educación Matemática y la doble ruptura de La Didáctica de las Matemáticas**. *La Gaceta Real Sociedad Matemática Española*, 5 (3), 673-698, 2002.

GASCÓN, J. **Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes**. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa [On-line]* 2001, 4 (julio) : [Data de consulta: 02 /01 / 2024] Disponível

em:<<http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33540202>> ISSN 1665-2436

GASCÓN, J. **¿Por qué lo matemático es “denso” en lo didáctico? Respuesta provisional a las sugerencias de T. Recio**. *La Gaceta Real Sociedad Matemática Española*, 6 (1), 151-159, 2003.

GASCÓN, J. **Del Problem Solving a los Recorridos de Estudio e Investigación**. Crónica del viaje colectivo de una comunidad científica. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática (UNIÓN)*, Nº 22, 2010, p. 9-35.

GOMES, S. C. Ensino de trigonometria numa abordagem histórica. *Bolema*, v. 27, n. 46, p. 203-223, 2013.

IEZZI, G. et al. **Matemática: ciência e aplicações**, volume 2. São Paulo, Atual Editora, 2004.

JOSÉ, A. R. Análise do ensino de trigonometria em livros didáticos do ensino médio. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – UNESP, Rio Claro, 2019.



KHUN, Thomas. A estrutura das revoluções científicas. Editora Perspectiva. São Paulo, 1983.

MENDES, I. A. O uso da história no ensino da Matemática: reflexões teóricas e experiências. Belém: EDUEPA, 2001.

OLIVEIRA, Guilherme Saramago. **Metodologia do ensino da matemática: fundamentos teóricos e práticos**. Uberlândia: FUMCAMP, 2020

PAIS, L. C. **Didática da matemática: uma análise da influência francesa**. Belo Horizonte. Autêntica Editora, 2019.

PAIS, L. C. **Didática da matemática: uma análise da influência francesa**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002a.

PAIS, L. C. **Introdução**. In: MACHADO, Silvia Dias A. Educação Matemática: uma introdução. 2ª ed. São Paulo: EDUC, 2002b, 9-12.

PASSOS, Arilda Maria; DE GÓES, Luiz Amilton. O ensino da matemática na perspectiva das metodologias propostas nas diretrizes curriculares do Paraná. Dia a dia Educação do Paraná, Guarapuava, PR, 2008.

PEREIRA, C. S. Aprendizagem em trigonometria no ensino médio: contribuições da teoria da aprendizagem significativa. São Paulo: Paco Editorial, 2012.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PONTE, J. P. **Educação matemática: Temas de investigação** Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, p. 185-239, 1992.

RODRIGUES, R. F., MENEZES, M. B. de, SANTOS, M. C. dos. Licenciatura em matemática e o percurso de estudo e pesquisa: uma proposta do modelo epistemológico de referência para o ensino e aprendizagem do conceito de função. Amazonia, Revista de educação em ciências e matemática, 2017.

RODRIGUES, R. F. Percurso de estudo e Pesquisa no conceito de função: analisando o processo de ensino e aprendizagem e as influências na formação do professor de matemática. Recife, 2019 (Tese de Doutorado)

SHULMAN, L. **Those who understand: Knowledge growth in teaching**. Educational Researcher, 15, 4-14, 1986.

SIERRA, T. A. **Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas. Los sistemas de numeración y la medida de magnitudes**. Tesis Doctoral. UCM. Madrid, 2006.

SILVA, I. M. A relação do professor com o saber matemático e os conhecimentos mobilizados em sua prática. Belém – PA, 2014. (Tese de Doutorado)

SILVA, M. F. Saberes docentes e ensino da trigonometria. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – UFRN, Natal, 2019.



SILVA, C. de Q., GOULART, A. **As organizações didáticas e matemáticas nos livros didáticos de matemática utilizados na escola básica brasileira.** Revista Educação Matemática Pesquisa. São Paulo, v.23, n.4, pp. 171-192, 2021.

SOUSA, A. M. Currículo de trigonometria no ensino médio: uma análise documental. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – IFSP, São Paulo, 2020.

SOUZA, R. L. Sequências didáticas problematizadoras em trigonometria. Anais do ENEM, 2017.

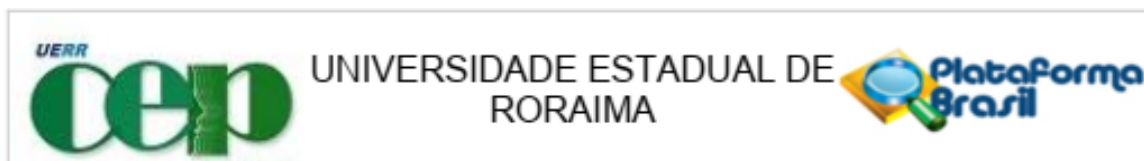
TOLEDO, M .E. R. de O. **Tendências em educação matemática.** Porto Alegre. Sagah 2021.

WILSON, S. M., SHULMAN, L. S., & RICHERT, A. E. **'150 different ways' of knowing: Representation of knowledge in teaching.** In J. Calderhead (Ed.). Exploring teachers' thinking (pp. 104-124). London: Cassell, 1987.



7 ANEXOS

PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP



PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

DADOS DO PROJETO DE PESQUISA

Título da Pesquisa: O ENSINO DAS RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO À LUZ DO PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA

Pesquisador: Osmilcy Lima Feitosa

Área Temática:

Versão: 3

CAAE: 67565423.5.0000.5621

Instituição Proponente: UNIVERSIDADE ESTADUAL DE RORAIMA

Patrocinador Principal: Financiamento Próprio

DADOS DO PARECER

Número do Parecer: 6.212.060

Apresentação do Projeto:

O pesquisador aponta que "... estudar a matemática com seus teoremas e conceitos, tende a desafiar a intelectualidade tanto do professor, quanto do aluno, o que de certa forma desperta seu interesse e favorece o aprendizado. Porém, os professores têm demonstrado dificuldade em compreender os fundamentos teóricos da matemática e sua importância na realidade cotidiana, ou seja, as limitações em determinados conceitos e propriedades relacionados ao assunto de trigonometria podem contribuir para o desenvolvimento de metodologias de ensino restritas a aquisição de conhecimentos sem aplicações práticas, e a prática docente exige a articulação entre teoria e a aplicabilidade prática na sala de aula. De acordo com PASSOS e DE GOÊS: "O ensino da disciplina deve levar o aluno a gostar de estudar matemática. Um professor, desde que bem-preparado, munido de algumas estratégias e muito motivado, poderia atingir esse objetivo. Afinal, estudar a matemática com seus cálculos e seus conceitos, tende a desafiar a intelectualidade do jovem, o que em muito já favorece o interesse dos alunos." (PASSOS; DE GOÊS, 2008, p. 02). Diante disso, surgiu a ideia de explorar esse assunto através de uma metodologia fundamentada na Teoria Antropológica do Didático, usando um dispositivo didático para a evolução de paradigmas conhecido como Percurso de Estudo e Pesquisa. Sendo assim, assumimos o PEP como uma proposta metodológica-teórica que propicia processos de produção coletiva, conduzindo o professor a uma reflexão, por meio de pesquisas das suas praxeologias em torno de um determinado saber matemático. A noção de praxeologia é extremamente fundamental para a

Endereço: Rua Sete de Setembro, 231 - Sala 201
Bairro: Canarinho **CEP:** 69.306-530
UF: RR **Município:** BOA VISTA
Telefone: (95)2121-0953 **Fax:** (95)2121-0949 **E-mail:** cep@uerr.edu.br

Página 01 de 05





UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
RORAIMA



Continuação do Parecer: 6.212.060

construção de um PEP em conformidade com Teoria Antropológica do Didático. (...) Texto extraído do documento PB_Informações_Básicas – página 2-3.

Metodologia – quanto aos aspectos metodológicos o pesquisador destaca que “Essa pesquisa é de natureza qualitativa e os caminhos metodológicos utilizados serão fonte bibliográfica, pesquisa documental e pesquisa de campo com realização de entrevistas com os sujeitos das escolas estaduais do Ensino Médio do município de Boa Vista/RR. (...) Optou-se em realizar a pesquisa nas turmas do 1º ano do Ensino Médio nas escolas públicas da rede estadual do município de Boa Vista/RR, onde serão pesquisados os professores através de um Percurso de estudo e Pesquisa - PEP, apresentando a ideia do PEP todos os professores de matemática que lecionam nas turmas de 1º ano do Ensino Médio, destacando a importância dessa metodologia na aprendizagem dos alunos. Serão selecionados todos os professores das escolas que funcionam com turmas de 1º ano do Ensino Médio (um total de 60 professores), onde será feita uma formação com esses professores, destacando o percurso que eles deverão seguir em sala de aula durante a pesquisa (...)” Texto extraído do documento PB_Informações_Básicas – página 3.

Com relação aos critérios de inclusão o pesquisador escreve que “Os participantes da pesquisa serão os professores de matemática que lecionam nas turmas de 1º ano do Ensino Médio. O Percurso de Estudo e Pesquisa é uma ferramenta metodológica que contribui para a análise e investigação das metodologias de ensino utilizadas e como a prática pedagógica pode influenciar de forma relevante para o processo de ensino e de aprendizagem. O Percurso de Estudo e Pesquisa – PEP, corresponde a um ensino centrado na pesquisa de um sistema didático afim de procurar respostas que satisfaçam as questões pré-estabelecidas no processo investigativo. Dessa forma, é extremamente necessário que os participantes queiram aplicar as ideias do percurso para que se tenha uma abordagem real do que se pretende investigar. Assim, participarão da pesquisa todos os professores de matemática da rede estadual de ensino que lecionam nas turmas de 1º ano do Ensino Médio e queira participar de forma efetiva da pesquisa, seguindo o percurso de forma aplicada e fidedigna. Os professores que não sentirem o desejo de participar serão excluídos da amostra”.

Quanto aos critérios de exclusão destaca que “Os professores que não sentirem o desejo de participar serão excluídos da amostra”. (Texto extraído do documento PB_Informações_Básicas – página 4).

Endereço: Rua Sete de Setembro, 231 - Sala 201
Bairro: Canarinho CEP: 69.306-530
UF: RR Município: BOA VISTA
Telefone: (95)2121-0953 Fax: (95)2121-0949 E-mail: cep@uerr.edu.br

Página 02 de 05





UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
RORAIMA



Continuação do Parecer: 6.212.060

Objetivo da Pesquisa:

Como objetivos da pesquisa o pesquisador elenca:

Objetivo Primário:

- Analisar as implicações do uso de construtos da Teoria Antropológica do Didático - TAD quando utilizados no ensino de matemática com professores ao mobilizarem suas praxeologias em função do objeto relações trigonométricas, particularmente à luz do Percurso de Estudo e Pesquisa.

Objetivo Secundário:

- Explorar os conceitos da trigonometria para as diversas áreas do conhecimento e como esses conceitos evoluíram ao longo do tempo através de sua relação com o cotidiano.
- Investigar as organizações matemáticas e didáticas dos professores durante a aplicação do Percurso de Estudo e Pesquisa frente aos conteúdos de relações trigonométricas no triângulo.
- Analisar o desenvolvimento do percurso matemático proposto, tomando por base o sistema didático proposto pela Teoria Antropológica do Didático.

Avaliação dos Riscos e Benefícios:

Em relação a avaliação dos riscos e benefícios da pesquisa o pesquisador pondera que:

Riscos: Possibilidade de constrangimento ou desconforto ao responder o questionário. Quebra de sigilo/anônato/confidencialidade Estresse ou dano Cansaço ao responder às perguntas. Benefícios: Por outro lado, acredita-se que essa pesquisa trará benefícios imensuráveis para o ensino no estado de Roraima. Entre eles, estão: • Valorização da metodologia dos professores; • Melhor aprendizagem dos alunos; • Integração do Percurso de Estudo e Pesquisa no Documento Curricular de Roraima – DCR; • Ampliação da aplicação do PEP para outros objetos de conhecimento matemático (Texto extraído do documento Projeto Básico, página 4).

Comentários e Considerações sobre a Pesquisa:

A pesquisa intitulada O ENSINO DAS RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO À LUZ DO PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA é parte dos estudos do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática – PPGECEM da Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática – REAMEC.

Considerações sobre os Termos de apresentação obrigatória:

Em relação aos termos apresentados juntos ao projeto básico considera-se que:

- Folha de rosto – ok

Endereço: Rua Sete de Setembro, 231 - Sala 201
Bairro: Canarinho CEP: 69.306-530
UF: RR Município: BOA VISTA
Telefone: (95)2121-0953 Fax: (95)2121-0949 E-mail: cep@uerr.edu.br

Página 03 de 05





UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
RORAIMA



Continuação do Parecer: 6.212.060

- Declaração de compromisso - ok
- Carta de Anuência – ok
- RCLE – Registro de Consentimento Livre Esclarecido - ok
- Termo de Confidencialidade – Pesquisadora informa a forma que será mantido o sigilo por cinco anos.
- Projeto_Básico devidamente inserido.
- Projeto de Pesquisa devidamente inserido.
- Cronograma – ok
- Consta orçamento para a realização da pesquisa.

Recomendações:

não há

Conclusões ou Pendências e Lista de Inadequações:

não há pendências, o pesquisador atendeu ao que foi solicitado.

Considerações Finais a critério do CEP:

APROVADO AD REFERENDUM.

Este parecer foi elaborado baseado nos documentos abaixo relacionados:

Tipo Documento	Arquivo	Postagem	Autor	Situação
Informações Básicas do Projeto	PB_INFORMACOES_BASICAS_DO_PROJETO_2092251.pdf	20/07/2023 17:32:30		Aceito
Outros	Questionario.pdf	20/07/2023 17:32:18	Osmilcy Lima Feitosa	Aceito
Outros	Anuencia28022023.pdf	06/07/2023 11:12:37	Osmilcy Lima Feitosa	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	RCLE.pdf	06/07/2023 11:08:26	Osmilcy Lima Feitosa	Aceito
Solicitação registrada pelo CEP	RESPOSTACEP.pdf	05/07/2023 09:33:45	Osmilcy Lima Feitosa	Aceito
Projeto Detalhado / Brochura Investigador	ProjetoOSMILCY.pdf	29/06/2023 09:09:29	Osmilcy Lima Feitosa	Aceito
Outros	RESPOSTAdePENDENCIA.pdf	08/03/2023 16:13:38	Osmilcy Lima Feitosa	Aceito

Endereço: Rua Sete de Setembro, 231 - Sala 201
Bairro: Canarlho CEP: 69.306-530
UF: RR Município: BOA VISTA
Telefone: (95)2121-0953 Fax: (95)2121-0949 E-mail: cep@uerr.edu.br

Página 04 de 05



REGISTRO DE CONSENTIMENTO DO PROFESSOR 1



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE RORAIMA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
Comitê de Ética em Pesquisa



REGISTRO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (Resolução 510/16)

PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA NO ENSINO DAS RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO

Você está sendo convidado a participar de uma pesquisa, cujo pesquisador responsável é OSMILCY IMA FEITOSA da UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS – UEA, sob a orientação do professor Dr. ITAMAR MIRANDA DA SILVA. Este documento, chamado Registro de Consentimento Livre e Esclarecido, visa assegurar seus direitos como participante da pesquisa, sendo elaborado em duas vias, assinadas e rubricadas pelo pesquisador e pelo participante, sendo que uma via deverá ficar guardada com você.

Por favor, leia com atenção e calma, aproveitando para esclarecer suas dúvidas. Se houver perguntas antes ou mesmo depois de assiná-lo, você poderá esclarecê-las com o pesquisador. Se preferir, pode levar este Registro para casa e consultar seus familiares ou outras pessoas antes de decidir participar. Não haverá nenhum tipo de penalização ou prejuízo se você não aceitar participar ou retirar sua autorização em qualquer momento.

Justificativa e objetivos:

A pesquisa justifica-se, pois, considera-se relevante a ideia de investigar o ensino da trigonometria desenvolvido nas escolas públicas da cidade de Boa Vista, e procurar identificar a real dificuldade dos alunos em aprender os conceitos básicos da trigonometria e aplicá-los em situações do mundo. De acordo com Fonseca, Bosch e Gascón (2007), os conceitos matemáticos são estudados e abordados de uma única maneira, de forma pontual e sem muita articulação com outras áreas do conhecimento. Segundo eles, essa forma de abordar o ensino da matemática traz essa dificuldade de forma reflexiva nos diferentes níveis de ensino.

Procedimentos:

Após a aprovação pelo CEP/UERR, você será convidado a responder um questionário com algumas perguntas sobre sua metodologia de ensino, prática e pedagógica e experiências vivenciadas ao longo de sua carreira como professor.

Desconfortos e riscos:

Rubrica do pesquisador

Rubrica do participante de pesquisa



Possibilidade de constrangimento ou desconforto ao responder o questionário.
Quebra de sigilo/anonimato/ confidenciabilidade
Estresse ou dano
Cansaço ao responder às perguntas

A pesquisa terá riscos mínimos, conforme a Resolução 510/16, podendo haver risco de constrangimento, cansaço ou estresse ao responder alguma pergunta, no entanto, o participante terá o direito de não responder tal pergunta ou interromper a resolução do questionário até que se sinta à vontade e confortável para continuar, também a quebra de sigilo dos participantes, no entanto para resguardar o sigilo, os dados serão mantidos em um computador com acesso restrito através de senha pelos pesquisadores.

Benefícios:

Acredita-se que essa pesquisa trará benefícios imensuráveis para o ensino no estado de Roraima. Entre eles, estão:

- Valorização da metodologia dos professores;
- Melhor aprendizagem dos alunos;
- Integração do Percurso de Estudo e Pesquisa no Documento Curricular de Roraima – DCR;
- Ampliação da aplicação do PEP para outros objetos de conhecimento matemático.

Sigilo e privacidade:

Garantia do sigilo que assegure a privacidade e o anonimato dos/as participante/s. Do contrário, caso seja do interesse da pesquisa a identificação do participante, faz-se imprescindível esclarecer a ele/ela que também haverá a divulgação do seu nome quando for de interesse do/a mesmo/a ou não houver objeção. Neste caso, incluir, antes das assinaturas, um box com as opções:

☒ Permito a minha identificação através de uso de meu nome nos resultados publicados da pesquisa;

☐ Não permito a minha identificação através de uso de meu nome nos resultados publicados da pesquisa.

Você tem a garantia de que sua identidade será mantida em sigilo e nenhuma informação será dada a outras pessoas que não façam parte da equipe de pesquisadores. Na divulgação dos resultados desse estudo, seu nome não será citado.

Acompanhamento e assistência:

A qualquer momento, antes, durante ou até o término da pesquisa, os participantes poderão entrar em contato com os pesquisadores para esclarecimentos e assistência sobre qualquer aspecto da pesquisa em danos decorrentes da pesquisa.

Contato:

Em caso de dúvidas sobre a pesquisa, você poderá entrar em contato com o/a pesquisador (a) OSMILCY LIMA FEITOSA, residente a rua Engenheiro Carlos Geraldo, 733, bairro

Rubrica do pesquisador



Rubrica do participante de pesquisa



Centenário – Boa Vista – RR com telefone para contato (95) 99111-4793 e e-mail: icililima@gmail.com

Em caso de denúncias ou reclamações sobre sua participação e sobre questões éticas do estudo, você poderá entrar em contato com a secretaria do Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Estadual de Roraima, endereço Rua Sete de Setembro, 231, sala 201, TELEFONE: 2121-0953, Horário de atendimento: Segunda a Sexta das 08 às 12 horas, e-mail cep@uer.edu.br.

Consentimento livre e esclarecido:

Após ter recebido esclarecimentos sobre a natureza da pesquisa, seus objetivos, métodos, benefícios previstos, potenciais riscos e o incômodo que esta possa acarretar, aceito participar:

Nome do(a) participante: **JOSÉ NUNES FERREIRA**

Data: 22 / 05 / 2024.

Responsabilidade do Pesquisador:

Asseguro ter cumprido as exigências da Resolução CNS nº 510 de 2016, Artigo 2º, item V, na elaboração do protocolo e na obtenção deste Registro de Consentimento Livre e Esclarecido. Asseguro, também, ter explicado e fornecido uma via deste documento ao participante. Informo que o estudo foi aprovado pelo CEP CAAE 67565423.5.0000.5621. Comprometo-me a utilizar o material e os dados que serão obtidos nesta pesquisa exclusivamente para as finalidades previstas neste documento ou conforme o consentimento dado pelo participante.

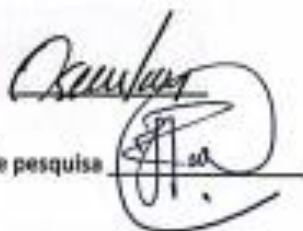
Assinatura do Pesquisador Responsável:



Data: 22 / 05 / 2024.

OSMILCY LIMA FEITOSA
22 de maio de 2024

Rubrica do pesquisador



Rubrica do participante de pesquisa






UNIVERSIDADE ESTADUAL DE RORAIMA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
Comitê de Ética em Pesquisa



REGISTRO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (Resolução 510/16)

PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA NO ENSINO DAS RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO

Você está sendo convidado a participar de uma pesquisa, cujo pesquisador responsável é OSMILCY LIMA FEITOSA da UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAPÁ – UEA, sob a orientação do professor Dr. ITAMAR MIRANDA DA SILVA. Este documento, chamado Registro de Consentimento Livre e Esclarecido, visa assegurar seus direitos como participante da pesquisa, sendo elaborado em duas vias, assinadas e rubricadas pelo pesquisador e pelo participante, sendo que uma via deverá ficar guardada com você.

Por favor, leia com atenção e calma, aproveitando para esclarecer suas dúvidas. Se houver perguntas antes ou mesmo depois de assiná-lo, você poderá esclarecê-las com o pesquisador. Se preferir, pode levar este Registro para casa e consultar seus familiares ou outras pessoas antes de decidir participar. Não haverá nenhum tipo de penalização ou prejuízo se você não aceitar participar ou retirar sua autorização em qualquer momento.

Justificativa e objetivos:

A pesquisa justifica-se, pois, considera-se relevante a ideia de investigar o ensino da trigonometria desenvolvido nas escolas públicas da cidade de Boa Vista, e procurar identificar a real dificuldade dos alunos em aprender os conceitos básicos da trigonometria e aplicá-los em situações do mundo. De acordo com Fonseca, Bosch e Gascón (2007), os conceitos matemáticos são estudados e abordados de uma única maneira, de forma pontual e sem muita articulação com outras áreas do conhecimento. Segundo eles, essa forma de abordar o ensino da matemática traz essa dificuldade de forma reflexiva nos diferentes níveis de ensino.

Procedimentos:

Após a aprovação pelo CEP/UEA, você será convidado a responder um questionário com algumas perguntas sobre sua metodologia de ensino, prática e pedagógica e experiências vivenciadas ao longo de sua carreira como professor.

Desconfortos e riscos:

Rubrica do pesquisador

Rubrica do participante de pesquisa



Documento assinado digitalmente
LUCAS MATEUS DE OLIVEIRA LIMA
Data: 26/03/2025 13:33:26 -0100
Verifique em <https://validar.ufg.gov.br>



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site
<https://edoc.amazonas.am.gov.br/8D0B.2CA3.169E.DC6B/9813F31D>
Código verificador: **8D0B.2CA3.169E.DC6B** CRC: **9813F31D**

Centenário – Boa Vista – RR com telefone para contato (95) 99111-4793 e e-mail: icililima@gmail.com

Em caso de denúncias ou reclamações sobre sua participação e sobre questões éticas do estudo, você poderá entrar em contato com a secretaria do Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Estadual de Roraima, endereço Rua Sete de Setembro, 231, sala 201, TELEFONE: 2121-0953, Horário de atendimento: Segunda a Sexta das 08 às 12 horas, e-mail cep@uesrr.edu.br.

Consentimento livre e esclarecido:

Após ter recebido esclarecimentos sobre a natureza da pesquisa, seus objetivos, métodos, benefícios previstos, potenciais riscos e o incômodo que esta possa acarretar, aceito participar:

Nome do(a) participante: **LUCAS MATEUS DE OLIVEIRA LIMA**

Data: 22 / 05 / 2024.

Responsabilidade do Pesquisador:

Asseguro ter cumprido as exigências da Resolução CNS nº 510 de 2016, Artigo 2º, item V, na elaboração do protocolo e na obtenção deste Registro de Consentimento Livre e Esclarecido. Asseguro, também, ter explicado e fornecido uma via deste documento ao participante. Informo que o estudo foi aprovado pelo CEP CAAE 67565423.5.0000.5621. Comprometo-me a utilizar o material e os dados que serão obtidos nesta pesquisa exclusivamente para as finalidades previstas neste documento ou conforme o consentimento dado pelo participante.

Assinatura do Pesquisador Responsável:



Data: 22 / 05 / 2024.

OSMILCY LIMA FEITOSA

22 de maio de 2024

Rubrica do pesquisador



Rubrica do participante de pesquisa _____



documento assinado digitalmente
LUCAS MATEUS DE OLIVEIRA LIMA
Data: 26/05/2025 12:30:51 -0300
Verifique em <https://validar.rii.gov.br>



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site
<https://edoc.amazonas.am.gov.br/8D0B.2CA3.169E.DC6B/9813F31D>
Código verificador: **8D0B.2CA3.169E.DC6B** CRC: **9813F31D**

QUESTIONÁRIO DO PROFESSOR 1

	UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ ESTADUAL DO AMAZÔNAS PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA REDE AMAZÔNICA DE EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	 
---	--	---

QUESTIONÁRIO

Você/Sr./Sra. está sendo convidado(a) a participar, como voluntário(a), da pesquisa intitulada **O ENSINO DAS RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO À LUZ DO PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA**. Meu nome é OSMILCY LIMA FEITOSA, sou o pesquisador responsável e minha área de atuação é **EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**. Esse questionário é necessário para coleta e análise de dados. Não existem respostas erradas e não será necessária sua identificação. Desde já agradeço a colaboração.

1. Qual a sua faixa etária de idade?

- () 18 a 25 anos
() 26 a 35 anos
() 36 a 45 anos
(X) Acima de 45 anos

2. Quantos anos de experiência em sala de aula você tem?

- () 0 a 2 anos
() 2 a 5 anos
() 6 a 10 anos
() 10 a 15 anos
(X) Acima de 15 anos

3. Em relação aos conteúdos/conceitos matemáticos estudados, qual das áreas abaixo você apresentou maior dificuldade em compreender. **OBS.: Pode marcar mais de uma questão**

- () Álgebra
(X) Geometria
() Aritmética
(X) Trigonometria
() Números e funções reais

3. Em relação as teorias de aprendizagens estudadas, qual das listadas abaixo você considera como parte integrante da sua prática pedagógica. **OBS.: Pode marcar mais de uma questão.**





PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA REDE AMAZÔNICA DE EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA

- () Teoria Sócio Cultural
(X) Teoria da Aprendizagem Significativa
() Teoria Antropológica do Didático
() Teoria das Etapas Mentais
(X) Teoria dos Campos Conceituais

4. Em relação aos cursos de formação de professores, qual a importância ou impacto que causam na sua prática pedagógica.

- () Totalmente relevante
() Relevante
(X) Pouco relevante
() indiferente
() Irrelevante
() Totalmente irrelevante

5. Qual o seu grau de conhecimento em uma metodologia chamada de Percurso de Estudo e Pesquisa?

- () Conheço totalmente
(X) Conheço parcialmente
() Desconheço

Nas questões de 6 a 10 considere as seguintes informações: Numa escala de 0 a 10, onde 0 seria totalmente irrelevante e 10 seria totalmente relevante, marque a opção que você acredita ser mais adequada a sua opinião.

6. Qual a importância de uma metodologia de ensino bem construída para a aprendizagem dos alunos?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	~~10~~
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---------------

7. Qual o grau de dificuldade de aprendizagem dos alunos em trigonometria que você observa em sala?

1	2	3	4	5	6	7	~~8~~	9	10
---	---	---	---	---	---	---	--------------	---	----





PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA REDE AMAZÔNICA DE EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA

8. Você teria interesse em conhecer uma metodologia de ensino chamada de Percurso de Estudo e Pesquisa para o ensino de trigonometria?

1	2	3	4	5	6	7	~~8~~	9	10
---	---	---	---	---	---	---	--------------	---	----

9. Você se considera um profissional que está aberto a experimentar novas ideias em sala de aula para favorecer a aprendizagem dos alunos?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	~~10~~
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---------------

10. Como você avalia o desempenho dos alunos nas aulas de matemática em relação a aprendizagem?

1	2	3	4	5	~~6~~	7	8	9	10
---	---	---	---	---	--------------	---	---	---	----

11. Você utiliza o livro didática como parte integrante de sua metodologia?

1	2	3	4	5	6	~~7~~	8	9	10
---	---	---	---	---	---	--------------	---	---	----

12. Como você avalia a influência do livro didático na aprendizagem dos alunos?

1	2	3	4	5	6	7	~~8~~	9	10
---	---	---	---	---	---	---	--------------	---	----



QUESTIONÁRIO DO PROFESSOR 2

	UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ UNIVERSIDADE ESTADUAL DO AMAZONAS PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA REDE AMAZÔNICA DE EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	
---	---	---

QUESTIONÁRIO

Você/Sr./Sra. está sendo convidado(a) a participar, como voluntário(a), da pesquisa intitulada **O ENSINO DAS RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO À LUZ DO PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA**. Meu nome é **OSMILCY LIMA FEITOSA**, sou o pesquisador responsável e minha área de atuação é **EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**. Esse questionário é necessário para coleta e análise de dados. Não existem respostas erradas e não será necessária sua identificação. Desde já agradeço a colaboração.

1. Qual a sua faixa etária de idade?

☒ 18 a 25 anos

☐ 26 a 35 anos

☐ 36 a 45 anos

☐ Acima de 45 anos

2. Quantos anos de experiência em sala de aula você tem?

☐ 0 a 2 anos

☒ 2 a 5 anos

☐ 6 a 10 anos

☐ 10 a 15 anos

☐ Acima de 15 anos

3. Em relação aos conteúdos/conceitos matemáticos estudados, qual das áreas abaixo você apresentou maior dificuldade em compreender. **OBS.: Pode marcar mais de uma questão**

☐ Álgebra

☒ Geometria

☐ Aritmética

☐ Trigonometria

☐ Números e funções reais

3. Em relação as teorias de aprendizagens estudadas, qual das listadas abaixo você considera como parte integrante da sua prática pedagógica. **OBS.: Pode marcar mais de uma questão.**





UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
UNIVERSIDADE
ESTADUAL DO AMAZÔNAS



PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA
REDE AMAZÔNICA DE EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA

- () Teoria Histórico Cultural
(X) Teoria da Aprendizagem Significativa
() Teoria Antropológica do Didático
() Teoria das Etapas Mentais
() Teoria dos Campos Conceituais

4. Em relação aos cursos de formação de professores, qual a importância ou impacto que causam na sua prática pedagógica.

- () Totalmente relevante
(X) Relevante
() Pouco relevante
() indiferente
() Irrelevante
() Totalmente irrelevante

5. Qual o seu grau de conhecimento em uma metodologia chamada de Percurso de Estudo e Pesquisa?

- () Conheço totalmente
(X) Conheço parcialmente
() Desconheço

Nas questões de 6 a 10 considere as seguintes informações: Numa escala de 0 a 10, onde 0 seria totalmente irrelevante e 10 seria totalmente relevante, marque a opção que você acredita ser mais adequada a sua opinião.

6. Qual a importância de uma metodologia de ensino bem construída para a aprendizagem dos alunos?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

7. Qual o grau de dificuldade de aprendizagem dos alunos em trigonometria que você observa em sala?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----



8. Você teria interesse em conhecer uma metodologia de ensino chamada de Percurso de Estudo e Pesquisa para o ensino de trigonometria?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

9. Você se considera um profissional que está aberto a experimentar novas ideias em sala de aula para favorecer a aprendizagem dos alunos?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

10. Como você avalia o desempenho dos alunos nas aulas de matemática em relação a aprendizagem?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

11. Você utiliza o livro didática como parte integrante de sua metodologia?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

12. Como você avalia a influência do livro didático na aprendizagem dos alunos?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----



TERMO DE ANUÊNCIA



UNIVERSIDADE FEDERAL DE
MATO GROSSO UNIVERSIDADE
FEDERAL DO PARÁ UNIVERSIDADE
ESTADUAL DO AMAZONAS



PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA REDE AMAZÔNICA DE EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA

TERMO DE ANUÊNCIA

Ilmo. Sr. Secretário de Educação

Solicitamos autorização institucional para realização da pesquisa intitulada **O ENSINO DAS RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO À LUZ DO PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA**, a ser realizada com os professores de Licenciatura em Matemática que lecionam nas escolas estaduais do município de Boa Vista – RR, nas turmas de 1º ano do Ensino Médio, pelo acadêmico de pós-graduação do curso de Doutorado, **OSMILCY LIMA FEITOSA**, sob orientação do Prof. Dr. **ITAMAR MIRANDA DA SILVA**, com o(s) seguinte(s) **objetivo(s): Geral**: Analisar as implicações do uso de construtos da Teoria Antropológica do Didático - TAD quando utilizados no ensino de matemática com professores ao mobilizarem suas praxeologias em função do objeto relações trigonométricas, particularmente à luz do Percurso de Estudo e Pesquisa. **Objetivos específicos**: Explorar os conceitos da trigonometria para as diversas áreas do conhecimento e como esses conceitos evoluíram ao longo do tempo através de sua relação com o cotidiano. investigar as organizações matemáticas e didáticas dos professores durante a aplicação do Percurso de Estudo e Pesquisa frente aos conteúdos de relações trigonométricas no triângulo. Analisar o desenvolvimento do percurso matemático proposto, tomando por base o sistema didático apoiado pela Teoria Antropológica do Didático. Ao mesmo tempo, pedimos autorização para que o nome desta secretaria bem como das instituições onde os professores lecionam possa constar no relatório final e em futuras publicações na forma de artigo científico.

Ressaltamos que os dados coletados serão mantidos em absoluto sigilo de acordo com a Resolução do Conselho Nacional de Saúde (CNS/MS) 510/16 que trata da Pesquisa envolvendo Seres Humanos. Salientamos ainda que tais dados serão utilizados somente para realização deste estudo.

Na certeza de contarmos com a colaboração e empenho desta secretaria, agradecemos antecipadamente a atenção, ficando à disposição para quaisquer esclarecimentos que se fizerem necessários.

Boa Vista – RR, 28 de fevereiro de 2023

Prof. mestre Osmilcy Lima Feitosa
Pesquisador Responsável do Projeto

☒ Concordamos com a solicitação ☐ Não concordamos com a solicitação

Prof. Raimundo Nonato Carneiro de Mesquita.
Secretário Estadual de Educação
(CARIMBO)

Raimundo Nonato C. de Mesquita
Secretário de Estado da Educação
e Desporto - SEED/RR
Decreto n.º 1142-P de 16/05/2011



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site
<https://edoc.amazonas.am.gov.br/8D0B.2CA3.169E.DC6B/9813F31D>
Código verificador: **8D0B.2CA3.169E.DC6B** CRC: **9813F31D**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE
MATO GROSSO
UNIVERSIDADE
FEDERAL DO PARÁ
UNIVERSIDADE
ESTADUAL DO AMAZONAS



PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA
REDE AMAZÔNICA DE EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA

TERMO DE ANUÊNCIA

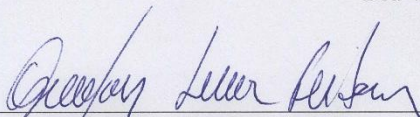
Ilmo. Sr. Diretor (a) da Escola Estadual Mário David Andreazza

Solicitamos autorização institucional para realização da pesquisa intitulada **O ENSINO DAS RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO À LUZ DO PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA**, a ser realizada com os professores de Licenciatura em Matemática que lecionam nas escolas estaduais do município de Boa Vista – RR, nas turmas de 1º ano do Ensino Médio, pelo acadêmico de pós-graduação do curso de Doutorado, **OSMILCY LIMA FEITOSA**, sob orientação do Prof. Dr. **ITAMAR MIRANDA DA SILVA**, com o(s) seguinte(s) **objetivo(s): Geral**: Analisar as implicações do uso de construtos da Teoria Antropológica do Didático - TAD quando utilizados no ensino de matemática com professores ao mobilizarem suas praxeologias em função do objeto relações trigonométricas, particularmente à luz do Percurso de Estudo e Pesquisa. **Objetivos específicos**: Explorar os conceitos da trigonometria para as diversas áreas do conhecimento e como esses conceitos evoluíram ao longo do tempo através de sua relação com o cotidiano. investigar as organizações matemáticas e didáticas dos professores durante a aplicação do Percurso de Estudo e Pesquisa frente aos conteúdos de relações trigonométricas no triângulo. Analisar o desenvolvimento do percurso matemático proposto, tomando por base o sistema didático apoiado pela Teoria Antropológica do Didático. Ao mesmo tempo, pedimos autorização para que o nome desta secretaria bem como das instituições onde os professores lecionam possa constar no relatório final e em futuras publicações na forma de artigo científico.

Ressaltamos que os dados coletados serão mantidos em absoluto sigilo de acordo com a Resolução do Conselho Nacional de Saúde (CNS/MS) 510/16 que trata da Pesquisa envolvendo Seres Humanos. Salientamos ainda que tais dados serão utilizados somente para realização deste estudo.

Na certeza de contarmos com a colaboração e empenho desta secretaria, agradecemos antecipadamente a atenção, ficando à disposição para quaisquer esclarecimentos que se fizerem necessários.

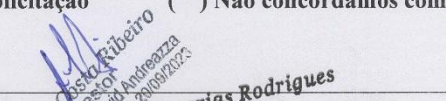
Boa Vista – RR, 15 de maio de 2024


Prof. mestre Osmilcy Lima Feitosa
Pesquisador Responsável do Projeto

☒ Concordamos com a solicitação

☐ Não concordamos com a solicitação

Diretor (a) da Escola Estadual Mário David Andreazza

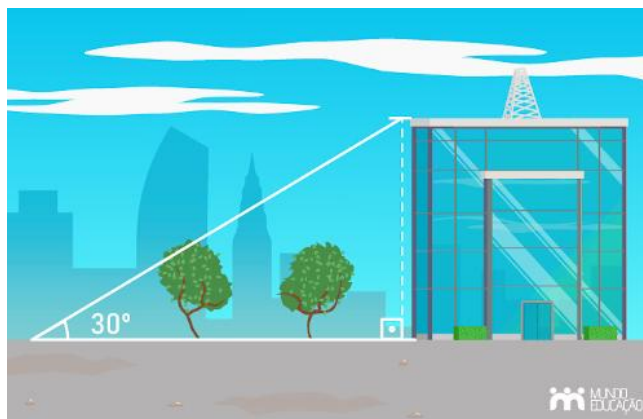

Zacarias Rodrigues
Esc. Est. Mário David Andreazza
Dec. 1595-P de 18/12/2020



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site
<https://edoc.amazonas.am.gov.br/8D0B.2CA3.169E.DC6B/9813F31D>
Código verificador: **8D0B.2CA3.169E.DC6B** CRC: **9813F31D**

LISTA DE TAREFAS

Tarefa 1: Um engenheiro foi contratado para calcular a altura de um prédio sem subir nele. A uma distância de 40 metros, constatou-se que era possível construir o seguinte triângulo retângulo. Qual é a altura aproximada do prédio? (Dados: use $\sqrt{3} = 1,7$)



Tarefa 2: Um avião levantou voo, formando um ângulo de 20° com o solo, e atingiu uma altura de 1368 metros. Qual foi a distância percorrida pelo avião, em metros? (Use: $\sin 20^\circ = 0,342$; $\cos 20^\circ = 0,94$; $\tan 20^\circ = 0,364$)

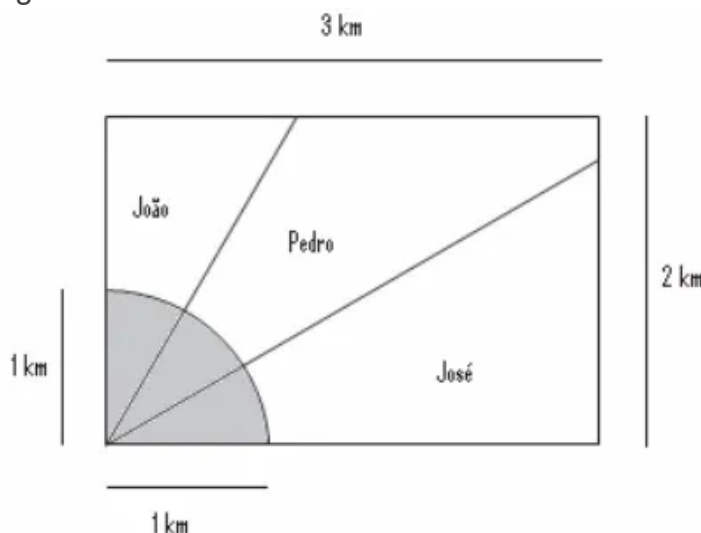
Tarefa 3: As torres Puerta de Europa, construídas numa avenida de Madri, na Espanha, são inclinadas uma contra a outra. A inclinação das torres é de 15° com a vertical, e elas têm, cada uma, altura de 114 m (a altura é indicada na figura como o segmento AB). Essas torres são um bom exemplo de um prisma oblíquo de base quadrada, e uma delas pode ser observada na imagem.



Utilizando 0,26 como valor aproximado para a tangente de 15° e duas casas decimais nas operações, descubra qual a área que a base desse prédio ocupa na avenida.



Tarefa 4: (Enem) Ao morrer, o pai de João, Pedro e José deixou como herança um terreno retangular de 3 km x 2 km que contém uma área de extração de ouro delimitada por um quarto de círculo de raio 1 km a partir do canto inferior esquerdo da propriedade. Dado o maior valor da área de extração de ouro, os irmãos acordaram em repartir a propriedade de modo que cada um ficasse com a terça parte da área de extração, conforme mostra a figura.



Em relação à partilha proposta, qual a porcentagem aproximada da área do terreno que coube a João? (Considere $\sqrt{3}/3 = 0,58$)

Tarefa 5: (Cesgranrio) Uma escada de 2 m de comprimento está apoiada no chão e em uma parede vertical. Se a escada faz 30° com a horizontal, a distância do topo da escada ao chão é de:

Tarefa 6: Um teleférico foi instalado ligando uma base ao cume de uma montanha. Para a instalação, foram utilizados 1358 m de cabos, dispostos a uma angulação de 30° em relação ao solo. Qual a altura da montanha?

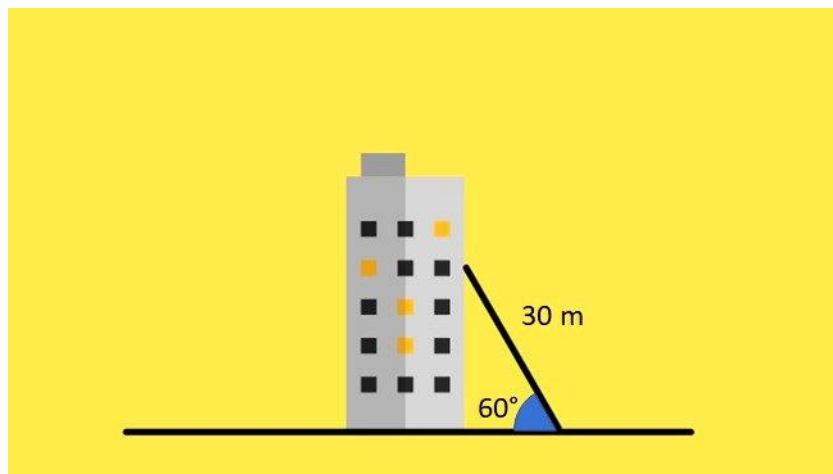


Tarefa 7: Um telhado é tido como de duas águas quando há dois caimentos. Em uma obra está sendo construído um telhado onde, o encontro de suas duas

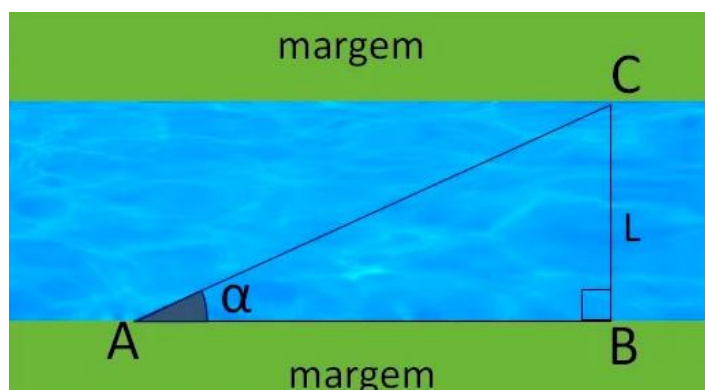


águas esteja exatamente no meio da lage. O ângulo de inclinação de cada água em relação a lage é de 30° . A lage possui 24 m de comprimento. Para encomendar as telhas antes mesmo da estrutura que irá sustentar o telhado estar concluída, é preciso conhecer o comprimento de cada água, que será de:

Tarefa 8: (CBM-SC, soldado-2010) Para socorrer uma pessoa num apartamento durante um incêndio, os bombeiros utilizarão uma escada de 30m, que será colocada conforme a figura a seguir formando com o solo um ângulo de 60° . Qual a distância do apartamento ao chão? (Utilize $\sin 60^\circ = 0,87$; $\cos 60^\circ = 0,5$ e $\tan 60^\circ = 1,73$)



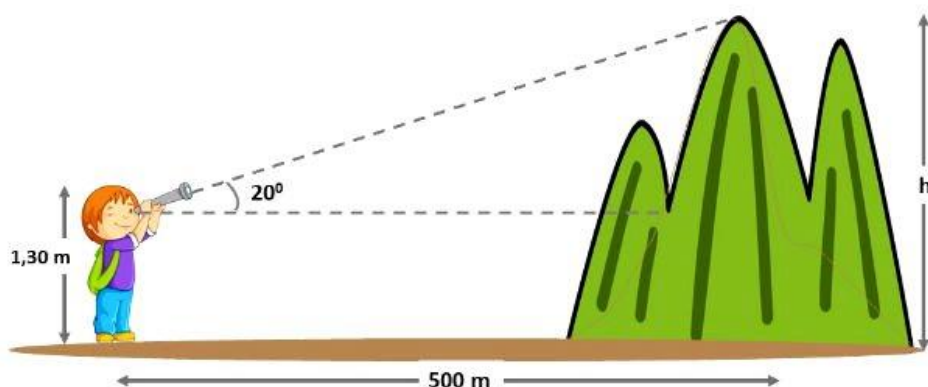
Tarefa 9: Uma pessoa quer conhecer a largura de um rio antes de atravessá-lo. Para isso, ela fixa um ponto de referência na outra margem, como uma árvore, por exemplo (ponto C). Na posição em que se encontra (ponto B), caminha 10 metros para a esquerda, até se forme um ângulo de 30° entre o ponto A e o ponto C. Calcule a largura do rio. Considere $\sqrt{3} = 1,73$.



Tarefa 10: Um menino avista o ponto mais alto de um morro, conforme figura abaixo. Considerando que ele está a uma distância de 500 m da base do morro,



calcule a altura (h) deste ponto. Considere: $\sin 20^\circ = 0,34$; $\cos 20^\circ = 0,93$; $\tan 20^\circ = 0,36$



Tarefa 11: Pedro, localizado a 8 metros do chão, está observando o prédio vizinho. Sabendo que a sua distância para o prédio vizinho é de 8 m e entre as duas estruturas forma-se um triângulo, cujo ângulo ABC é de 105° , determine a altura do prédio que Pedro está observando.

