



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS
REDE AMAZÔNICA DE EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
DOUTORADO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

SOLANGE ALMEIDA SANTOS

**GEOMETRIA DOS FRACTAIS PARA DESENVOLVER A
CRIATIVIDADE EM MATEMÁTICA DE FUTUROS PROFESSORES
NA TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA**

MANAUS - AM
2025



SOLANGE ALMEIDA SANTOS

**GEOMETRIA DOS FRACTAIS PARA DESENVOLVER A
CRIATIVIDADE EM MATEMÁTICA DE FUTUROS PROFESSORES
NA TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso (UFMT), vinculada à Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática (REAMEC), Polo Universidade do Estado do Amazonas (UEA), na Linha de Pesquisa 2: Fundamentos e Metodologias para a Educação em Ciências e Matemática, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutora em Educação em Ciências e Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Kátia Maria de Medeiros (UEPB)

MANAUS - AM
2025



Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Sistema Integrado de Bibliotecas da Universidade do Estado do Amazonas.

A447g ALMEIDA SANTOS, Solange
GEOMETRIA DOS FRACTAIS PARA DESENVOLVER A CRIATIVIDADE EM MATEMÁTICA DE FUTUROS PROFESSORES NA TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA / Solange ALMEIDA SANTOS. Manaus: [s.n], 2025.
300 f.: il., color.; 21.0 cm.

Tese - Doutorado em Educação em Ciências e Matemática da Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática- Universidade do Estado do Amazonas, Manaus, 2025.
Inclui Bibliografia.
Inclui Apêndice.
Inclui Anexo.
Orientador: Katia Maria de Medeiros.

1. Criatividade em Matemática. 2. Aprendizagem Significativa. 3. Resolução de Problemas. 4. Geometria Fractal. 5. Formação de Professores. I. Katia Maria de Medeiros (Orient.) II. Universidade do Estado do Amazonas. III. Título
CDU(1997)502:51(043.2)



DEDICATÓRIA

À memória do meu querido pai, Mario Alves de Almeida, que sempre sonhou em ver um filho concluir uma graduação. Mal sabia ele que eu chegaria a este nível acadêmico. Sua inspiração e apoio incondicional foram fundamentais para que eu alcançasse este momento.

À minha amada mãe, Maria Landa Leite Pereira de Almeida, por seu amor, dedicação e sacrifícios ao longo de toda a minha jornada. Sua força e sabedoria foram pilares essenciais para que eu pudesse seguir em frente e conquistar este sonho.

A ambos, minha eterna gratidão e amor.



AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus eterno e poderoso pela oportunidade da vida e ao meu Senhor Jesus Cristo, a quem dedico toda honra e glória.

Ao meu esposo, Kleber Cardoso dos Santos, e aos meus filhos, Tiago Almeida dos Santos e Sarah Almeida Santos, por dividirem comigo os momentos da vida acadêmica de tensão, aflição e baixa estima, por me apoiarem incondicionalmente ao longo desta jornada.

À minha orientadora, Profa. Dra. Kátia Maria de Medeiros, por sua dedicação, zelo e compromisso durante esse período. Sua orientação foi fundamental para a realização deste trabalho.

Aos meus colegas professores de Matemática do IFRR, Adnelson Jati Batista, Reginaldo Beltrami, pela colaboração e apoio ao longo do percurso acadêmico.

À Profa. Gladys Maria da UFRR, mais que uma amiga, sempre colaborando com minha vida acadêmica. Nossas histórias têm interseções significativas que enriqueceram minha trajetória.

À Profa. Perolayne Bandeira, minha auxiliadora na coleta de dados, cuja ajuda foi essencial para o desenvolvimento desta pesquisa.

Aos estudantes do curso de Licenciatura em Matemática que participaram voluntariamente da pesquisa.

Ao professor Fabiano Siqueira de Almeida do IFRR por sua contribuição técnica nessa produção.

A professora Antônia Valdirene Rabelo Costa por suas valiosas contribuições na leitura e análise crítica da escrita.

À Profa. Nilra Jane, reitora do IFRR, que esteve sempre no apoio aos doutorandos da REAMEC, proporcionando as condições necessárias para que pudessemos seguir em frente.

Ao Grupo de Pesquisa em Didática da Matemática (GPDM/UEPB).

A todos, minha eterna gratidão.



EPÍGRAFE

“As nuvens não são esferas, as montanhas não são cones,
as linhas costeiras não são círculos e a casca das árvores
não é lisa, nem os raios viajam em linha reta”.
— Benoît B. Mandelbrot



RESUMO

SANTOS, S. A. GEOMETRIA DOS FRACTAIS PARA DESENVOLVER A CRIATIVIDADE EM MATEMÁTICA DE FUTUROS PROFESSORES NA TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA. 2025. 300 f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemática) - Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática, Universidade do Estado do Amazonas, Manaus, 2025.

Esta tese foi desenvolvida no âmbito do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática, polo da Universidade Estadual do Amazonas (UEA). Buscou elucidar o problema, como a resolução de problemas associada à Criatividade em Matemática colabora para que os futuros professores alcancem Aprendizagem Significativa em Geometria dos Fractais? A fundamentação teórica sustenta-se na Teoria da Aprendizagem Significativa (Ausubel, 1980; 2003; Moreira, 2011), para desenvolver a Criatividade em Matemática, tendo como estratégia metodológica a Resolução de Problemas. A pesquisa é de abordagem qualitativa pautada pela técnica da pesquisa-ação (Thiollent, 2011, Ghedin & Franco, 2011), com participantes estudantes do Curso de Licenciatura em Matemática do IFRR, campus Boa Vista, com o objetivo de compreender o desenvolvimento da Criatividade em Matemática por meio de uma estratégia metodológica de resolução de problemas no ensino da Geometria dos Fractais, na Aprendizagem Significativa de futuros(as) professores(as). No aspecto metodológico de análise dos dados, buscou-se compreender o objeto de estudo por meio da Análise de Conteúdo (Bardin, 2011; Franco, 2018), organizada em três polos cronológicos: a) pré-análise; b) exploração do material; e c) tratamento dos resultados, inferência e interpretação. A pesquisa foi aprovada em setembro de 2023 pelo CEP/UFRR, sob CAAE: 74339123.7.0000.5302 e desenvolvida no semestre 2023.2 com uma turma de Licenciandos de Matemática, regularmente matriculados no componente eletivo Aplicações da Geometria dos Fractais na Educação Básica. Por meio da abordagem qualitativa, reuniram-se as concepções de Thiollent (2011), Nacarato (2000) e Ghedin & Franco (2011) para conduzir uma investigação que descreve, desde o ponto de partida, até a observação e a interpretação. A pesquisa teve início com a resolução de problemas utilizando lápis e papel e, posteriormente, com o uso de software, buscando estimular ideias no processo de aprendizagem, à luz dos princípios e estágios da Aprendizagem Significativa e da criatividade em Matemática. Buscou-se uma construção conjunta entre a pesquisadora e os demais participantes. A amostra foi não probabilística e intencional, voltada essencialmente à pesquisa qualitativa de natureza teórica ou conceitual. Nos resultados, procurou-se identificar e compreender os significados atribuídos ao estudo da Geometria dos Fractais para o desenvolvimento da Criatividade em Matemática, no contexto da Aprendizagem Significativa em sala de aula. Os instrumentos de coleta utilizados foram os problemas propostos com o uso de materiais impressos e digitais, o aplicativo GeoGebra e um questionário semiestruturado. Na etapa da pré-análise, os dados coletados foram reunidos para tratamento e organização em quadros, com o objetivo de identificar as unidades de contexto e de registro, realizou-se a transcrição e a classificação das respostas referentes à resolução dos problemas e respostas do questionário. Essas respostas foram agrupadas em três blocos distintos, com a finalidade de compreender o processo de aprendizagem da Geometria Fractal. Na etapa de exploração do material, foram analisadas as respostas descritivas, as construções de modelos algébricos e as representações geométricas elaboradas tanto com lápis e papel quanto com o uso do software GeoGebra. A análise de conteúdo, aplicada na prática, considerou a estrutura da linguagem e a sequência dos acontecimentos, conforme os resultados obtidos nas diferentes fases de resolução dos problemas. E na fase das inferências e interpretações foram examinadas com o objetivo de estabelecer distinções entre os conceitos matemáticos, especialmente no que diz respeito ao significado atribuído à nova aprendizagem. Assim, foram delineados os caminhos para compreender a linguagem construída nos conceitos de fractal pelos(as) futuros(as) professores(as), utilizada na aprendizagem da Geometria Fractal voltada para a Criatividade em Matemática. A partir dessa experiência, buscou-se não apenas identificar a aprendizagem do conceito da estrutura da Geometria Fractal, mas também o conjunto de sentidos que surgiram nesse contexto. Esses sentidos foram atribuídos à pesquisa a partir do olhar dos participantes em suas expressões registradas e comentários espontâneos, considerando sua ativa participação e suas respectivas ideologias. Foi alcançado que a intersecção dos estágios da Criatividade em Matemática com os indicadores da Aprendizagem Significativa revelou um caminho robusto para a construção de conhecimento significativo. Obteve-se nos momentos de esforço e confusão inicial no estágio da preparação, o processamento subconsciente na incubação, os *insight* de compreensão no estágio da iluminação e a consolidação por meio da aplicação e demonstração na verificação, que as habilidades e os indicadores dos estágios trabalham em conjunto para que as ideias novas sejam compreendidas e integradas na estrutura cognitiva dos estudantes, transformando-se em



subsunçores que fazem sentido e que podem ser recuperados ou reaprendidos com mais facilidade devido às suas múltiplas ancoragens, como sustenta a teoria de Ausubel. A investigação confirmou que o Modelo de Ensino Criativo com Significado em Matemática (MECSM) impulsionou o desenvolvimento da Criatividade em Matemática e da Aprendizagem Significativa em futuros professores. A Geometria Fractal, com sua natureza visual e interativa, atuou como um catalisador eficiente, promovendo reestruturação cognitiva e engajamento. Os participantes ampliaram a compreensão de conceitos de maior complexidade e apropriaram-se de estratégias pedagógicas inovadoras voltadas à futura prática docente. Esses resultados orientam o delineamento da tese: o ensino da Geometria dos Fractais por meio de uma estratégia metodológica de resolução de problemas contribui para o desenvolvimento da Criatividade em Matemática, visando a uma Aprendizagem Significativa de futuros(as) professores(as). Evidências empíricas, quantitativas e qualitativas, atestaram o desenvolvimento integrado e a correlação positiva entre criatividade e aprendizagem significativa. O MECSM diagnosticou subsunçores, utilizou o GeoGebra para experimentação dinâmica, transformou predisposições e facilitou a formulação de metaconceitos, formando os futuros professores para adotar uma abordagem transformadora na Educação Matemática.

Palavras-chaves: Criatividade em Matemática, Aprendizagem Significativa, Resolução de Problemas, Geometria Fractal e Formação de Professores.



ABSTRACT

SANTOS, S. A. Fractal Geometry to Develop Creativity in Mathematics in Pre-service Teachers within the Theory of Meaningful Learning. 2025. 300 p. Dissertation (Doctorate in Education in Science and Mathematics) – Amazon Network for Education in Science and Mathematics, State University of Amazonas, Manaus, 2025.

This dissertation was developed within the scope of the Graduate Program in Education in Science and Mathematics of the Amazon Network for Education in Science and Mathematics at the State University of Amazonas (UEA). It sought to elucidate the following research problem: How does problem solving associated with Mathematical Creativity contribute to enabling pre-service teachers to achieve Meaningful Learning in Fractal Geometry? The theoretical framework is grounded in the Theory of Meaningful Learning (Ausubel, 1980, 2003; Moreira, 2011), aiming to foster Mathematical Creativity through Problem Solving as a methodological strategy. The research adopted a qualitative approach, guided by action research techniques (Thiollent, 2011; Ghedin & Franco, 2011), involving undergraduate students enrolled in the Mathematics Teacher Education Program at the Federal Institute of Roraima (IFRR), Boa Vista campus. The objective was to understand the development of Mathematical Creativity through a problem-solving methodological strategy in the teaching of Fractal Geometry, within the context of Meaningful Learning for pre-service teachers. Regarding data analysis, the study sought to understand the object of investigation through Content Analysis (Bardin, 2011; Franco, 2018), organized into three chronological stages: (a) pre-analysis; (b) material exploration; and (c) treatment of results, inference, and interpretation. The research was approved in September 2023 by the Research Ethics Committee of the Federal University of Roraima (CEP/UFRR), under CAAE no. 74339123.7.0000.5302, and was conducted during the 2023.2 academic semester with a group of Mathematics undergraduates regularly enrolled in the elective course “Applications of Fractal Geometry in Basic Education”. Through the qualitative approach, the conceptions of Thiollent (2011), Nacarato (2000), and Ghedin & Franco (2011) were integrated to guide an investigation that describes the process from its starting point through observation and interpretation. The study began with problem-solving activities using pencil and paper and subsequently incorporated software use, aiming to stimulate ideas in the learning process in light of the principles and stages of Meaningful Learning and Mathematical Creativity. A collaborative construction between the researcher and the participants was emphasized. The sample was non-probabilistic and intentional, oriented primarily toward qualitative research of a theoretical or conceptual nature. In the results, the study sought to identify and understand the meanings attributed to the study of Fractal Geometry for the development of Mathematical Creativity within the context of Meaningful Learning in the classroom. Data collection instruments included problem-solving activities using printed and digital materials, the GeoGebra application, and a semi-structured questionnaire. During the pre-analysis stage, the collected data were organized and systematized into tables to identify context and recording units. This involved the transcription and classification of responses related to problem-solving activities and questionnaire answers. These responses were grouped into three distinct blocks to understand the learning process of Fractal Geometry. In the material exploration stage, descriptive responses, algebraic model constructions, and geometric representations developed both with pencil and paper and through GeoGebra software were analyzed. Content analysis, applied in practice, considered language structure and the sequence of events according to the results obtained at different stages of problem solving. In the inference and interpretation stage, the data were examined to establish distinctions among mathematical concepts, particularly regarding the meaning attributed to new learning. Thus, pathways were outlined to understand the language constructed by pre-service teachers regarding fractal concepts used in the learning of Fractal Geometry oriented toward Mathematical Creativity. From this experience, the study sought to identify not only the learning related to the structural concept of Fractal Geometry but also the set of meanings that emerged in this context. These meanings were attributed based on participants’ perspectives, as expressed in their recorded responses and spontaneous comments, considering their active participation and respective ideologies. The findings revealed that the intersection between the stages of Mathematical Creativity and the indicators of Meaningful Learning provided a robust pathway for the construction of knowledge. It was observed that moments of effort and initial confusion in the preparation stage, subconscious processing during incubation, insights of understanding in the illumination stage, and consolidation through application and demonstration in the verification stage collectively enabled new ideas to be integrated into students’ cognitive structures. These ideas were transformed into meaningful subsumers that can be more easily retrieved or relearned due to their multiple anchoring points, as supported by Ausubel’s theory. The investigation confirmed that the Meaningful Creative Teaching Model in Mathematics (MCTMM) fostered the development of Mathematical Creativity and Meaningful Learning in pre-service teachers. Fractal Geometry, with its visual and iterative nature, acted as an effective catalyst, promoting cognitive restructuring and engagement. Participants expanded their understanding of complex



concepts and appropriated innovative pedagogical strategies aimed at future teaching practice. These results guide the thesis framework: teaching Fractal Geometry through a problem-solving methodological strategy contributes to the development of Mathematical Creativity, aiming at Meaningful Learning for pre-service teachers. Empirical quantitative and qualitative evidence demonstrated integrated development and a positive correlation between creativity and meaningful learning. The MCTMM diagnosed subsumers, employed GeoGebra for dynamic experimentation, transformed predispositions, and facilitated the formulation of metaconcepts, preparing future teachers to adopt a transformative approach in Mathematics Education.

Keywords: Problem Solving; Mathematical Creativity; Meaningful Learning; Fractal Geometry; Teacher Education.



LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Mapa Mental da Teoria da Aprendizagem Significativa	57
Figura 2 - Aprendizagem receptiva e aprendizagem por descoberta situam-se em diferentes contínuos que parte da aprendizagem automática ou da aprendizagem significativa	59
Figura 3 - Enlace ilustrativo entre Aprendizagem Significativa Subordinada, Resolução de Problemas e a Criatividade Matemática	65
Figura 4 - Esquema dos Significados denotativos e conotativos da aprendizagem significativa da forma subordinada	69
Figura 5 - Esquema dos significados denotativos e conotativos da Aprendizagem Significativa da forma superordenada.....	73
Figura 6 - Esquema da estratégia metodológica da Resolução de Problemas	76
Figura 7 – Dinâmica de interação dos estágios da Criatividade em Matemática	80
Figura 8 – Dinâmica de interação dos estágios e das habilidades cognitivas na Criatividade em Matemática	85
Figura 9 – Triângulo de Pascal.....	88
Figura 10 - Triângulo de Pascal dos números internos.....	89
Figura 11 - Simetria no Triângulo de Pascal	90
Figura 12 – Algumas sequências	91
Figura 13 - A sequência da soma dos termos das quase diagonais.....	91
Figura 14 - A Sequência de Fibonacci	93
Figura 15 - Construção do Triângulo de Sierpinski.....	93
Figura 16 - O Triângulo de Sierpinski.....	94
Figura 17 - Triângulo de Sierpinski elaborado no Geogebra.....	103
Figura 18 - Curva de Koch elaborada no Geogebra	104
Figura 19 - Fractais Simples: polígono regular de cinco lados.....	104
Figura 20 - Árvore Fractal.....	105
Figura 21 - Fractal de Mandelbrot.....	108
Figura 22 - Problema (1) Triângulo de Pascal.....	116
Figura 23 - Problema (2) Triângulo de Pascal nos coeficientes algébricos	116
Figura 24 - Problema (3) Triângulo de Pascal na técnica de Stiefel.....	117
Figura 25 - Problema (4) Triângulo de Sierpinski.....	118
Figura 26 - Problema (5) A Árvore Fractal	118
Figura 27 - Problema (6) O Conjunto de Cantor	119
Figura 28 - Problema (7) A Curva de Koch	120
Figura 29 - Problema (8) Problemas abertos	121
Figura 30 – Esquema do MECSM.....	134
Figura 31 – Esquema do MECSM (continuação).....	135
Figura 32 - Desenho Básico da Pesquisa-ação	140
Figura 33 – Fases da Pesquisa-Ação Estratégica.....	142
Figura 34 - Fluxo da Pesquisa-ação: principais ações	143
Figura 35 – Faixada ETF-RR (1997) e Cefet-RR (2002)	150
Figura 36 – Faixada principal do Campus Boa Vista	151
Figura 37 – Desenvolvimento da Análise do Conteúdo	153
Figura 38 - Soma das linhas do triângulo numérico	174
Figura 39 – Ilustração das ideias do estudante E5	177
Figura 40 – Identificação da similaridade	179
Figura 41 – Padrão de elementos geométricos	201
Figura 42 – reprodução de fractal.....	202



LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Tendências metodológicas em Educação Matemática	38
Quadro 2 - Desenho Curricular de Geometria nos Projetos Pedagógicos das Licenciatura das IEs de Roraima	40
Quadro 3 - Trabalhos encontrados no catálogo de dissertações e teses da Capes	43
Quadro 4 - Lista dos trabalhos selecionados do banco de teses e dissertações	45
Quadro 5 - Resumo dos resultados das buscas dos periódicos com Qualis de B1 até A1	46
Quadro 6 - Lista artigos selecionados nos periódicos	47
Quadro 7 - Aprendizagem Significativa: da visão clássica à visão crítica	54
Quadro 8 - Tipos de Aprendizagem Significativa Receptiva	60
Quadro 9 - Símbolos para explicar a assimilação da Aprendizagem Significativa Subordinada	69
Quadro 10 - Estágios na aprendizagem e memorização de uma ideia subordinada em relação à sua força dissociada	70
Quadro 11 - Símbolos para explicar a assimilação da Aprendizagem Significativa Superordenada	73
Quadro 12 - Estágios na Aprendizagem e Memorização de uma Ideia Superordenada em Relação à Dissociação	74
Quadro 13 - Modelo do processo criativo em matemática descrito por Hadamard (1954)	80
Quadro 14 - Habilidade Cognitiva do Pensamento Criativo de Guilford (1967)	82
Quadro 15 - Demonstração Algébrica do Triângulo de Pascal	90
Quadro 16 - Símbolos para explicar a assimilação da Geometria dos Fractais	95
Quadro 17 - Aprendizagem Significativa Subordinada com o incremento da Criatividade em Matemática em Relação à Dissociação	96
Quadro 18 - Percurso Metodológico dos Organizadores Prévios	98
Quadro 19 - Símbolos para explicar a assimilação da Aprendizagem Significativa superordenada	100
Quadro 20 - Aprendizagem Significativa Superordenada com o incremento da Criatividade em Matemática em Relação à Dissociação	101
Quadro 21 - Estágios da aprendizagem e memorização de uma ideia superordenada em relação à dissociação	102
Quadro 22 - Estágio da Verificação	127
Quadro 23 - Participantes da Pesquisa	147
Quadro 24 - Caminhos para evitar possíveis questões éticas	148
Quadro 25 - Detalhamento do fluxo do desenvolvimento da análise do conteúdo	154
Quadro 26 - Formulário de análise dos problemas da fase 1	156
Quadro 27 - Dimensões da Criatividade em Matemática	157
Quadro 28 - Dimensões da Aprendizagem Significativa Subordinada	158
Quadro 29 - Formulário de análise dos problemas de Geometria Fractal	159
Quadro 30 - Modelo Categorias das respostas quanto aos significados	160
Quadro 31 - perguntas semiestruturadas desta pesquisa	160
Quadro 32 - Critérios de avaliação por dimensão da Criatividade em Matemática	161
Quadro 33 - Análise descritiva da Criatividade em Matemática	163
Quadro 34 - Definição das dimensões e indicadores da Aprendizagem Significativa	164
Quadro 34 - Critérios de Avaliação por Dimensão da Aprendizagem Significativa	165
Quadro 35 - Definição das dimensões e indicadores da Aprendizagem Significativa	165
Quadro 37 - Análise qualitativa das respostas do Problema (1)	167
Quadro 38 - Análise qualitativa das respostas problema (2)	170
Quadro 39 - Análise qualitativa das respostas problema (3)	173
Quadro 40 - Análise qualitativa das respostas do problema (4)	179
Quadro 41 - imagens das respostas do problema (5)	181
Quadro 42 - Constructos do Triângulo Sierpinski	194
Quadro 43 - Constructos da Curva de Koch	195
Quadro 44 - Construtos de fractais simples	196
Quadro 45 - Resposta das entrevistas destaque com uso do GeoGebra	197



Quadro 46 - Categorias das respostas quanto aos significados	198
Quadro 47 - Ensaio da construção de um fractal – E5	200
Quadro 48 - Categoria (1) Interação e experiência com o GeoGebra e ferramentas digitais	203
Quadro 49 – Subcategorias interação e experiência com o GeoGebra.....	204
Quadro 50 – Subcategorias percepção e compreensão da Geometria Fractal	205
Quadro 51 – Subcategorias metodologias de aprendizagem e Resolução de Problemas	206
Quadro 52 – Subcategorias motivação, dificuldades e aspectos afetivos.....	207
Quadro 53 – Subcategorias aplicabilidade da GF e implicações pedagógicas	208
Quadro 54 – Subcategorias aplicabilidade da GF e implicações pedagógicas	209
Quadro 55 – Subcategorias formação e desenvolvimento profissional.....	210
Quadro 56 - Estágio I: Aquisição do significado sobreordenado (A')	211
Quadro 57 - Estágio II: Aprendizagem posterior e retenção inicial de A'	211
Quadro 58 - Estágio III: Esquecimento de A'	212
Quadro 59 - Estágio IV: Diferenciação posterior de A'	212
Quadro 60 - Estágio V: Retenção posterior de a' e a'	212
Quadro 61 - Estágio VI: Esquecimento de a' e a'	213
Quadro 62 - Estágio da Preparação	213
Quadro 63 - Estágio da Incubação	214
Quadro 64 - Estágio da Iluminação.....	214
Quadro 65 - Estágio da Verificação	214



LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Resultado quantitativo do Problema (1)	169
Tabela 2 – Resultado quantitativo do problema (2).....	171
Tabela 3 - Resultado quantitativo do problema (3)	178
Tabela 4 - Resultado quantitativo do nível do problema (4).....	180
Tabela 5 - Resultado quantitativo do problema (5)	184
Tabela 6 – Frequência relativa dos níveis de habilidades criativas	185
Tabela 7 – Parâmetros descritivos das habilidades criativas	185
Tabela 8 – Análise descritiva das habilidades criativas dos problemas.....	186
Tabela 9 – Frequência relativa dos indicadores da Aprendizagem Significativa	187
Tabela 10 – Parâmetros descritivos da Aprendizagem Significativa.....	187
Tabela 11 – Análise descritiva dos problemas (1 a 5)	188
Tabela 12 – Correlação: Criatividade em Matemática e Aprendizagem Significativa Subordinada	189



LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Volume de dissertações e teses	44
Gráfico 2 - Distribuição normal da Criatividade em Matemática.....	186
Gráfico 3 - Distribuição normal da Aprendizagem Significativa	188
Gráfico 4 - Criatividade em Matemática e Aprendizagem Significativa	189



LISTA DE ABREVIATURAS

BNCC - Base Nacional Comum Curricular

CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

CEFET-RR – Centro Federal de Educação Tecnologia de Roraima

Covid 19 – Coronavírus/SARS-CoV-2.

DCRR - Documento Curricular de Roraima

EAD - Educação a Distância

EAMvRP – Ensino-aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas

ENADE - Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes

ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio

EUA – Estados Unidos da América

INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira

IFAC - Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Acre

IFCE - Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Ceará

IFPI - Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Piauí

IFRR - Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia de Roraima

MECSM - Modelo de Ensino Criativo com Significado em Matemática

OBMEP - Olimpíada Brasileira da Matemática das Escolas Públicas

PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais

PCN+ - Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio

PIBID - Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica à Docência

PPGEduatec - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica

PROINFO - Programa Nacional de Tecnologia Educacional

PUC-SP - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

PUC-Rio - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

RSL - Revisão Sistemática da Literatura

SAEB - Sistema de Avaliação da Educação Básica

SEED - Secretaria Estadual de Educação de Roraima

UERR - Universidade Estadual de Roraima

UFPE - Universidade Federal do Estado de Pernambuco

UFRR - Universidade Federal de Roraima



Sumário

INTRODUÇÃO.....	23
CAPÍTULO 1 - PRINCÍPIOS, PERCURSO INVESTIGATIVO E DEFINIÇÃO DO PONTO DE PARTIDA	34
1.1 A formação inicial de professores de Matemática: breve discussão	34
1.1.1 Metodologias de ensino na formação inicial de professores de Matemática	37
1.2 Projetos Pedagógicos dos Cursos de Licenciatura em Matemática das IEs Públicas de Roraima	40
1.3 A Revisão da Literatura: organização do processo de busca	41
1.3.1 Panorama da literatura e delimitação do escopo temático.....	48
CAPÍTULO 2 - FUNDAMENTOS DA TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA	53
2.1 Aspectos gerais do desenvolvimento da aquisição de conceitos na Aprendizagem Significativa.....	55
2.1.1 Os subsunçores e os organizadores prévios.....	55
2.1.2 Mapa Mental da Teoria da Aprendizagem Significativa.....	56
2.2 Conceito de aprendizagem na Aprendizagem Significativa	58
2.3 Concepções sobre a Criatividade na Aprendizagem Significativa.....	62
2.4 O processo de Assimilação da Aprendizagem Significativa Receptiva	66
2.4.1 A forma da Aprendizagem Significativa Subordinada.....	68
2.4.3 A forma da Aprendizagem Significativa Superordenada	72
CAPÍTULO 3 – A CRIATIVIDADE EM MATEMÁTICA NA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA.....	76
3.1 A Criatividade em Matemática	77
3.2 Organizadores prévios para o ensino de Geometria dos Fractais na Aprendizagem Significativa Subordinada.....	87
3.3 Modelo para o ensino de Geometria dos Fractais na Aprendizagem Significativa Subordinada	95



3.4 Modelo para o ensino de Geometria dos Fractais para Aprendizagem Significativa Sobreordenada	100
CAPÍTULO 4 - A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NA CRIATIVIDADE EM MATEMÁTICA	110
4.1 Resolução de Problema como Metodologia de Ensino de Matemática	110
4.2 Os Tipos de Problemas Matemáticos para o ensino de Geometria Fractal	114
4.3 O GeoGebra como <i>Software</i> Dinâmico para o Ensino de Geometria dos Fractais ..	121
4.4 Modelo de Ensino Criativo com Significado em Matemática: Uma Abordagem para a Geometria Fractal	124
4.4.1 Fundamentos Teóricos da Aprendizagem Significativa	125
4.4.2 Criatividade em Matemática.....	126
4.4.3 Fases do Modelo de Ensino Criativo com Significado em Matemática (MECSM).....	127
4.4.4 Princípios Metodológicos Transversais.....	131
4.4.5 Impactos e resultados esperados.....	132
4.4.6 Considerações para implementação.....	133
4.4.7 Conclusão	133
CAPÍTULO 5 - METODOLOGIA DA PESQUISA	136
5.1 Abordagem da Pesquisa	136
5.1.1 Caracterização da Metodologia	138
5.1.2 Desenho Básico da Pesquisa-ação	140
5.1.3 Procedimentos para a geração de registro dos dados	144
5.2 Critérios de seleção dos participantes	146
5.2.1 O perfil dos estudantes participantes da pesquisa	148
5.2.2 Critério de Exclusão	149
5.3 Descrição do campo da pesquisa	149
5.4 Abordagem Estratégica na Análise de Dados	152
5.4.1 O roteiro da pré-análise	155
5.4.2 Exploração do material: Categorização dos dados	156



5.4.3 Tratamento dos Resultados, a Inferência e a Interpretação	161
CAPÍTULO 6 – TRATAMENTO DOS RESULTADOS, INTERPRETAÇÃO E DISCUSSÕES	166
6.1 Criatividade e Aprendizagem Significativa no Desenvolvimento da Compreensão da Geometria Fractal.....	166
6.1.1 Análise temática dos problemas	166
6.1.2 Análise descritiva das respostas dos problemas	185
6.1.3 Análise do ensino criativo em Matemática com significado	190
6.2 Problemas de Geometria Fractal com uso de <i>Software</i>.....	193
6.3 Problemas abertos um ensaio criativo	199
6.4 Da Codificação à Construção de Sentidos: uma Análise de Conteúdo das narrativas em entrevistas.....	203
6.4.1 Análise das unidades de registro estágios da Aprendizagem Significativa.....	210
6.4.2 Análise das unidades de registro estágios da Criatividade em Matemática	213
CONCLUSÃO.....	215
REFERÊNCIAS	223
APÊNDICES	230
APENDICE A – PLANO DE ENSINO	230
APENDICE B – MATERIAL DE ATIVIDADES NO GEOGEBRA	233
APENDICE C – PROBLEMAS ABERTOS	245
APENDICE D – ENTREVISTA.....	245
APENDICE E – RELATÓRIO DE RESULTADO DOS ORGANIZADORES PRÉVIOS..	246
APENDICE F – REGISTRO DE ANÁLISES DESCRITIVA	260
APENDICE G – RELATÓRIO DE RESULTADOS DOS PROBLEMAS DE GEOMETRIA FRACTAL.....	270
APENDICE H – RELATÓRIO DE ANÁLISE DA ENTREVISTA SEMI ESTRUTURADA	285
APENDICE I – DECLARAÇÃO DE COMPROMISSO DA PESQUISADORA	293



APENDICE J – TERMO DE ANUÊNCIA DO GESTOR	294
APENDICE K – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO	296
APENDICE M – TERMO DE AUTORIZAÇÃO DE USO DE IMAGEM, VOZ	297
ANEXOS.....	298



INTRODUÇÃO

Esta pesquisa insere-se no âmbito do Doutorado em Educação em Ciências e Matemática da Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática (REAMEC) e foi desenvolvida no contexto da formação inicial de professores do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Roraima (IFRR), *campus* Boa Vista no semestre letivo de 2023.2.

O estudo teve como objeto a investigação do desenvolvimento da Criatividade em Matemática, articulado à Aprendizagem Significativa, por meio de uma estratégia metodológica de Resolução de Problemas no ensino de Geometria dos Fractais.

Nesse cenário, a pesquisa buscou compreender como essa articulação teórico-metodológica contribui para a construção de conhecimentos matemáticos com significado e para a formação didático-pedagógica de futuros(as) professores(as) de Matemática.

A formação inicial de professores de Matemática contemporâneos exige uma abordagem para além do tradicional, incorporando temas e metodologias que estimulem o pensamento inovador e criativo. Nesse contexto, a temática da Geometria dos Fractais emerge como um campo promissor para fomentar a Criatividade em Matemática e a Aprendizagem Significativa, tornando-se um objeto de estudo fundamental para o desenvolvimento de competências didático-pedagógicas essenciais dos futuros docentes.

Tal perspectiva é especialmente relevante no contexto do IFRR, onde a vivência e a experiência da professora pesquisadora têm evidenciado a necessidade de preparar esses futuros educadores para desafiar o convencional e inspirar uma aprendizagem mais engajadora e criativa em suas práticas docentes.

Abordagens sobre a Criatividade em Matemática que levaram as reflexões sobre o que pode ser tangível e mensurável no desenvolvimento da Criatividade em Matemática:

- a) como mensurar a criatividade em um grupo, para poder afirmar que é possível desenvolver a criatividade matemática?
- b) é possível desenvolver uma criatividade baseada em técnicas?
- c) é possível desenvolver uma reflexão crítica no processo criativo?

Tecendo os questionamentos acima, também surgiram outros de âmbito gerais, como:

- a) a criatividade se desenvolve ou é aprendida?
- b) todas as pessoas são criativas?
- c) como é possível desenvolver a criatividade em sala de aula?
- d) quais são os principais aspectos de uma pessoa criativa?



- e) como desenvolver a criatividade em pessoas adultas?
- f) como a Matemática desenvolve o pensamento criativo?

Parte dessas indagações surgiram em conversas informais, com colegas professores de Matemática do curso de licenciatura do IFRR *campus* Boa Vista e outras pela própria pesquisadora. Ao longo da pesquisa foram sendo delineadas as ideias e as concepções formais sobre a criatividade e a Criatividade em Matemática, que serão encontradas no decorrer da tese.

Neste estudo foi utilizada a Resolução de Problemas fechados e abertos na organização dos conhecimentos prévios para a Geometria dos Fractais, no componente curricular eletivo de Aplicações da Geometria dos Fractais na Educação Básica, do Projeto Político Pedagógico do Curso de Licenciatura em Matemática do IFRR *campus* Boa Vista, na sala de aula.

A título de compreensão do termo sala de aula, foi conceituado como lugar simbólico de um espaço sempre aberto para novas investigações, e como um campo que proporciona uma vasta exploração. Portanto, considerou-se nesta trajetória a sala de aula os diversos espaços físicos do IFRR *campus* Boa Vista, como: laboratório de Matemática, laboratório de Informática e sala de aula convencional.

Diante destes aspectos, formulou-se a questão da pesquisa: Como a resolução de problemas associada à Criatividade em Matemática colabora para que os futuros professores alcancem Aprendizagem Significativa em Geometria dos Fractais?

A questão levou ao delineamento da tese “o ensino da Geometria dos Fractais por meio de uma estratégia metodológica de resolução de problemas contribui com o desenvolvimento da Criatividade em Matemática e para uma Aprendizagem Significativa dos(as) futuros(as) professores(as)”.

Embora estes dois parágrafos, que abordam a questão e a tese, se apresentem tão próximos na escrita, a compreensão do que eles representam desdobrou-se como uma “luz” que, distante no início, gradualmente foi revelando seu sentido à medida que se aproximava. Essa “luz” metafórica, corresponde aos conceitos da Criatividade em Matemática e da Aprendizagem Significativa compreendidos pela pesquisadora no âmbito da pesquisa.

Foi composto como objetivo: compreender o desenvolvimento da Criatividade em Matemática por meio de uma estratégia metodológica de resolução de problemas no ensino da Geometria dos Fractais, para uma Aprendizagem Significativa de futuros(as) professores(as).

O direcionamento percorreu com a sustentação dos objetivos específicos, tais: a) Identificar/diagnosticar os subsunçores que os(as) licenciandos(as) possuem em relação à Resoluções de Problemas de Geometria e Fractais; b) Investigar a potencialidade dos materiais utilizados na Resolução de Problemas de Geometria dos Fractais, com vista ao desenvolvimento



da Criatividade em Matemática; c) Avaliar as predisposições dos/as licenciandos/as para desenvolver a Criatividade em Matemática relacionada com a Aprendizagem Significativa na Resolução dos Problemas de Geometria dos Fractais; e d) Analisar as contribuições da estratégia metodológica nas resoluções dos problemas de Geometria dos Fractais, para desenvolver a Criatividade em Matemática de futuros(as) professores(as) à luz da Teoria da Aprendizagem Significativa.

A pesquisa delineou-se com o propósito de compreender o desenvolvimento da Criatividade em Matemática por meio de uma estratégia metodológica de Resolução de Problemas no ensino da Geometria dos Fractais. A Aprendizagem Significativa aborda e sustenta a pesquisa, como contexto ou o cenário em que o desenvolvimento da Criatividade em Matemática dos futuros(as) professores(as) foi observado para compreender os significados da aprendizagem.

O percurso investigativo foi guiado pelos objetivos específicos que se complementam desde a identificação e o diagnóstico dos subsunçores que os(as) licenciandos(as) possuíam em relação à Resolução de Problemas de Geometria e Fractais, passando pela investigação da potencialidade dos materiais utilizados, e pela avaliação das predisposições dos(as) participantes para desenvolverem a Criatividade em Matemática relacionada à Aprendizagem Significativa.

A análise das contribuições da estratégia metodológica empregada nas resoluções dos problemas de Geometria dos Fractais, à luz da Teoria da Aprendizagem Significativa, para desenvolver a criatividade dos(as) futuros(as) docentes.

Nesta pesquisa, abordou-se a resolução de problemas como uma estratégia essencial na formação de professores de Matemática, tendo em vista os desafios da sala de aula. Essa abordagem veio a contribuir significativamente para o ensino proposto, e percebeu-se que, seja como método ou tendência metodológica, a resolução de problemas deve estar presente na prática docente desde a formação inicial dos professores.

Em 1980, foi publicada a coletânea “A resolução de problemas na matemática escolar”, originalmente desenvolvida pelo *National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)*. Essa obra foi organizada como proposta para contribuir na formação de professores de Matemática no Brasil e desde então, centenas de trabalhos foram publicados em revistas de maior relevância.

A Resolução de Problemas faz parte da composição das normativas curriculares nacionais: Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (Brasil, 1997;1998), nas Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio -



PCN+ (Brasil, 2002), Orientações Curriculares para o Ensino Médio - OCEM (Brasil, 2006) e a Base Nacional Comum Curricular BNCC (Brasil, 2017).

E fazem parte da estrutura os exames e avaliações de sistemas como: o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), tendo como objetivo avaliar a habilidades matemática concentrado na resolução de problemas; o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), considerada a maior prova do Brasil, que além de avaliar o desempenho dos estudantes de nível médio, serve para acessar as universidades no Brasil; o Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE), que avalia o rendimento dos estudantes de graduação e ainda os exames da Olimpíada Brasileira da Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) que apesar de não ser um tipo de avaliação de sistemas, tem o papel de estimular e promover o estudo de Matemática.

As avaliações SAEB, ENEM e ENADE mensuram habilidades matemáticas e acadêmicas em diferentes níveis de ensino, destacando a capacidade de resolver problemas como um critério essencial. Dessa forma, a Resolução de Problemas não apenas contribui para o sucesso na vida estudantil, mas no cotidiano, preparando os estudantes para enfrentar desafios reais, tomar decisões e desenvolver o pensamento crítico. Seja na vida profissional, social ou em questões da rotina diária, fortalece a autonomia, a criatividade, tornando-se indispensável para a formação integral dos indivíduos.

Para Onuchic (2014, p.17) a “resolução de problemas nas aulas de Matemática está para além de apenas uma prática”, o que pressupõe aulas com o envolvimento de professores e estudantes integrados em comunidades de aprendizagem, desempenhando diferentes papéis e responsabilidades. Nesta pesquisa, a Resolução de Problemas, a Criatividade em Matemática e a Aprendizagem Significativa servirão como os pilares essenciais para o ensino e a aprendizagem da Geometria dos Fractais.

Além dos normativos curriculares de âmbito nacional, analisamos o Documento Curricular de Roraima (DCRR, 2018). Nesse documento, os termos "imaginação e criatividade" estão presentes em uma das dez competências da BNCC. No DCRR do Ensino Fundamental, eles constam como uma competência; já no do Ensino Médio, figuram como princípios que refletem uma visão integradora da vida humana. Mais especificamente, no DCRR (2018) do Ensino Fundamental, essa temática se insere no eixo Processos Criativos, Mediação e Intervenção Sociocultural, Empreendedorismo. Para o Ensino Médio, nas competências gerais do DCRR (2018), o eixo correspondente é pensamento científico, crítico e criativo.

O DCRR (2018) tanto para o Ensino Fundamental quanto para o Ensino Médio, aborda a criatividade como elemento essencial para a construção do pensamento crítico na formação



integral dos estudantes da Educação Básica. O que propõe ideias para elaboração de aulas inovadoras, que prepare os estudantes para desafios futuros.

O Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Roraima (IFRR) *Campus Boa Vista*, oferta o curso de Licenciatura em Matemática, destacando-se pelo seu compromisso com um ensino inovador por meio de suas práticas pedagógicas. Desde a implementação do Projeto Pedagógico do Curso em 2017, a instituição demonstrou sua visão progressista ao incorporar o componente curricular de Geometria Fractal voltado para a Educação Básica.

Esta abordagem pioneira reflete o empenho do IFRR em preparar futuros professores com conhecimentos avançados e contemporâneos. A inclusão da Geometria dos Fractais no currículo não apenas enriquece a formação dos licenciandos, mas também os capacita a introduzir conceitos matemáticos complexos de forma acessível aos alunos da educação básica.

Na trajetória acadêmica da pesquisadora foram desenvolvidos trabalhos com a temática da resolução de problemas. E trabalhando em parceria com um colega professor de Matemática que desenvolve trabalhos pedagógicos, projetos e publicações no ensino de Matemática, ocorreu um breve diálogo sobre a criatividade na sala de aula, tanto na Educação Básica quanto na formação inicial de professores de Matemática.

Como resultado deste diálogo, surgiram algumas ideias para os componentes da Prática Pedagógica do Curso de Licenciatura em Matemática do IFRR, embora a criatividade estivesse restrita à perspectiva empírica. A escolha da estratégia de Resolução de Problemas deve-se ao fato de já ser uma linha de pesquisa previamente desenvolvida pela pesquisadora. Quanto à Aprendizagem Significativa, mesmo com um conhecimento superficial da teoria, foi selecionada por sua conexão com a psicologia cognitiva.

A escolha da teoria e das estratégias metodológica, levou a reflexão sobre a sala de aula no campo da formação dos futuros professores de Matemática, diante dos novos desafios causados pela crise na saúde pública e os desafios do ensino público. O que veio a motivar a proposta para ensinar futuros professores de Matemática a pensar de maneira crítica e criativa.

As pesquisas no âmbito da Matemática que envolvem a criatividade têm se utilizado o termo Criatividade em Matemática, explorado desde os tempos de Poincaré e demais cientistas e psicólogos, como: Hadamard (1964), Krutetskii (1976), Haylock (1987), Alencar, (2000), (Siriman, 2005), entre outros. No Brasil temos: Vasconcelos (2002), Gontijo (2007), Pereira (2008), Otaviano (2009), Farias (2015), Carvalho (2015), Fonseca (2015).

Os autores mencionados em seu tempo criaram e inovaram os conceitos da criatividade para o ensino especialmente na Matemática. Neste sentido, a proposta da pesquisa foi realizar um estudo que identificasse as contribuições da estratégia da Resolução de Problemas a partir



do estudo da Geometria dos Fractais, para compreender a Criatividade em Matemática de uma turma de futuros(as) professores(as) de Matemática sob a perspectiva da Teoria da Aprendizagem Significativa.

A decisão de investigar a Criatividade em Matemática foi motivada pela intenção de promover, entre os futuros professores do IFRR, uma aprendizagem significativa de um novo conceito de geometria. Nesse contexto, mais do que a mera superação de um desafio ou de uma dificuldade intelectual, buscou-se a construção de uma estrutura de ideias na resolução de problemas, a qual permitiria integrar os significados observados na fluência, flexibilidade e originalidade evidenciadas pelos graduandos.

A sustentação teórica foi pautada na Teoria da Aprendizagem Significativa, de David Ausubel (1980, 2003), no âmbito da Psicologia da Aprendizagem para a sala de aula. A Aprendizagem Significativa enfatiza uma aprendizagem de conceitos que sejam significativos. Podendo ser identificada quando o conjunto de informações no plano mental do estudante se revela, através da aprendizagem por recepção ou descoberta.

A Teoria da Aprendizagem Significativa se apoia nos organizadores prévios como conceito fundamental. Eles funcionam como estruturas cognitivas que ajudam os estudantes a conectarem novos conhecimentos com informações que conhecem, que facilita a compreensão e a retenção do conteúdo. Desse modo, os organizadores prévios permitem que o aprendizado seja mais profundo e significativo, pois criam pontos de ancoragem para novos conceitos.

Na ausência de organizadores prévios, a aprendizagem tende a ocorrer de forma mecânica, com o aluno recebendo informações isoladas, sem conseguir estabelecer ligações claras com sua estrutura cognitiva já existente; isso pode dificultar a compreensão, reduzir a retenção a longo prazo e aumentar a chance de esquecimento rápido.

Nessa situação, o procedimento didático deve priorizar a construção dessas bases antes da introdução do novo conteúdo, por meio de estratégias como levantamento de conhecimentos prévios, uso de analogias, perguntas problematizadoras, mapas conceituais, esquemas introdutórios e contextualizações iniciais, que funcionam como organizadores substitutos.

Portanto, por meio da resolução de problemas, a Criatividade em Matemática e a Teoria da Aprendizagem Significativa, a pesquisa visou estabelecer uma relação de ensino e aprendizagem para os conceitos de Geometria dos Fractais de uma turma de futuros(as) professores(as) de Matemática do IFRR. Com o objetivo de confirmar a tese de que “o ensino da Geometria dos Fractais por meio de uma estratégia metodológica de resolução de problemas contribui com o desenvolvimento da Criatividade em Matemática e para uma Aprendizagem Significativa dos(as) futuros(as) professores(as)”.



Os parágrafos seguintes a linguagem está descrita em primeira pessoa por trazer a narrativa das vivências profissionais e acadêmicas da pesquisadora, intitulado “Por trás dos livros e artigos”:

E como descrever a mim mesma neste contexto tão formal? Esse pensamento ficou forte em mim, que mexeu com meus sentimentos, eu vi um filme rápido da minha vida pessoal, misturada a minha vida acadêmica. E me inspirei nas aulas do querido prof. Gilberto da REAMEC que, mesmo pelas telas, me encorajou a escrever este relato. Quem está aqui é uma mãe, esposa, mulher, indígena, professora, educadora apaixonada por ensinar Matemática, sonhadora por uma educação mais justa para todos, um ser humano que venceu tantos, tantos desafios para conciliar trabalho, família e estudos. Sei que a minha história é também a de muitas mulheres brasileiras que não se calaram e nem deixaram vencer pelas dificuldades da vida. A minha história com o IFRR *campus* Boa Vista, iniciou em 2015 como professora substituta, mesmo já de posse dos títulos de pós-graduação *stricto sensu*, eu ainda demonstrava insegurança para enfrentar um seletivo para o IFRR, devida a pouca experiência em sala de aula. No entanto, com o apoio dos colegas participei e fui classificada no seletivo e atuei nos semestres de 2015.2, 2016.1 e 2016.2, nas turmas de Ensino Médio e Superior nas Licenciatura em Educação Física, Matemática e nas turmas de Tecnólogo em Análise e Desenvolvimento de Sistemas, turmas de Ensino Médio Integrado e Técnico Subsequente. Esse período também foi substancial na minha carreira profissional como professora de Matemática, vivenciei as formas de aplicação da teoria na prática pedagógica, ampliei a rede de contatos com professores de Matemática, participei de bancas, projetos e ações da instituição. Após as orientações dos colegas do IFRR decidi concorrer ao concurso do IFCE, por apresentar uma proposta voltada para a área da Educação Matemática. Fiquei muito agradada por ser a única participante de Roraima para o cargo e ter alcançado a primeira colocação na prova escrita. Tomei posse em 2017 e minhas atividades no IFCE *campus* Camocim. Camocim é uma pequena cidade litorânea do Estado do Ceará, cuja principal atividade econômica é o turismo e a pesca. Foi a minha primeira experiência como professora efetiva, atuei nos cursos técnicos subsequentes e curso de Licenciatura em Química. No *campus*, pude desenvolver atividades práticas nos laboratórios, atividades de campo, visita técnica em outros *campi* da rede com os estudantes. Foram 09 (nove) componentes curriculares ministrados nos cursos técnicos subsequentes e cursos superiores. Além de orientação de Trabalho de Conclusão de Curso e de pós-graduação *lato sensu*, colegiados dos cursos de licenciatura, entre outras atividades docentes. Porém, minhas expectativas nas vivências docentes, sempre foram contribuir com a educação no meu estado e por meio do IFRR, foi então que entrei com pedido de redistribuição. Cheguei no IFRR em 2018, onde fui muito bem acolhida novamente, fui lotada no Departamento de Ensino de Graduação, na Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática e convidada a Coordenar o Curso de Licenciatura em Matemática a Distância. Compondo o time de professores de Matemática do IFRR *campus* Boa Vista, venho colaborando na formação de professores de Matemática, desenvolvendo os componentes da área da Educação Matemática como: Introdução à Educação Matemática, Práticas Pedagógicas e Estágios Supervisionados. Atuando também na frente de elaboração de projetos de cursos livres de extensão, eventos alusivos a Matemática, compondo comissões diversas e elaboração de projetos pedagógicos. Em toda a minha trajetória acadêmica venho desenvolvendo trabalhos com a temática da resolução de problemas. E quanto à minha curta e intensa trajetória profissional, em especial no IFRR *campus* Boa Vista, venho orientando trabalhos com o tema, participando de bancas, promovendo e organizando eventos e participando de grupo de pesquisa. Neste caminho dialogando com os colegas surgiu o interesse pela criatividade, que para mim, estava apenas no olhar empírico. Porém, comecei a fazer breves pesquisas sobre a temática e quando surgiu a oportunidade do doutorado, então apresentei como ideia no projeto inicial para aprofundar esse conhecimento, visando contribuir com a formação dos professores de Matemática da minha unidade de ensino no IFRR. Quanto a Teoria da Aprendizagem Significativa eu já havia estudado no período do mestrado, lido alguns artigos e parte do livro de autor. E durante a fase de iniciação do doutorado fiquei



confusa ao escolher uma teoria da aprendizagem, então iniciei as leituras na busca de uma teoria que pudesse sustentar a tese em relação a Criatividade em Matemática. Foi quando identifiquei na obra de Ausubel *et. al.* (1980) um capítulo dedicado a criatividade na Aprendizagem Significativa. Escolhi a Teoria da Aprendizagem Significativa por se tratar de uma abordagem amplamente difundida no contexto educacional brasileiro. Além disso, sua fundamentação na psicologia educacional apresenta uma forte sustentação teórica ao estudo. Considero que esta teoria apresenta especial relevância para investigar processos criativos no ensino e aprendizagem da Matemática, o que contribuiu significativamente para o aprofundamento da temática proposta. E quanto ao componente de Aplicações da Geometria dos Fractais na Educação Básica, não cheguei a ministrar antes da pesquisa, mas diante das diversas explorações, foi um desafio como um conhecimento a uma proposta significativa para explorar as habilidades criativas do pensamento Matemático dos futuros professores participantes da pesquisa. A Geometria dos Fractais, agora conhecendo de forma mais profunda, sem dúvida é uma curiosa forma de explorar diversos conceitos da Matemática que seja significativa para o professor em formação. Quanto ao meu currículo acadêmico, sou Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual de Roraima (UERR), Especialista em Ensino de Ciências e Matemática (UERR), Especialista em Tecnologias na Educação (PUC-RIO) e Mestre Profissional em Ensino de Ciências (UERR), Doutoranda da Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática. Desde 2018, professora do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Roraima (IFRR) do Curso de Licenciatura em Matemática do *Campus* Boa Vista, sendo Coordenadora do Curso de Licenciatura em Matemática EaD (2018-2020), em dezembro de 2020 assumindo a gestão da Diretoria de Políticas em Educação a Distância do IFRR, Membro da Diretoria da Sociedade Brasileira de Matemática (SBEM Regional Roraima, mandato 2022-2024; 2025-2028), Membro da Associação Universidade em Rede (Unired) – quadriênio 2022-2026, Membro do Grupo de Pesquisa de Educação Matemática e Tecnologias (GPENT/CNPq), (Solange Santos, 2025).

A seguir, apresenta-se um resumo dos capítulos que compõem esta tese, com o objetivo de oferecer uma visão geral da estrutura e do desenvolvimento da pesquisa. Cada capítulo foi organizado para contribuir progressivamente à construção do problema investigado, articulando os fundamentos teóricos, a metodologia adotada, a análise dos dados e os resultados obtidos ao longo do estudo.

O Capítulo 1 apresenta os princípios norteadores da pesquisa, delineando seu percurso investigativo e definindo o ponto de partida teórico e metodológico. Destaca a relevância do papel do professor como mediador do conhecimento e a importância da escuta sensível e do olhar atento para as necessidades dos estudantes. Com base na Teoria da Aprendizagem Significativa, a pesquisa assume uma postura reflexiva diante do ensino tradicional, propondo práticas que valorizem os conhecimentos prévios dos estudantes e a sua autonomia intelectual.

A pesquisa foi desenvolvida em contexto acadêmico, buscando compreender como a Resolução de Problemas pode ser fortalecida por práticas que promovam o diálogo, a Criatividade em Matemática e a Aprendizagem Significativa. A definição do ponto de partida considera tanto os referenciais teóricos quanto as vivências práticas da autora como professora, o que confere autenticidade e a coerência ao processo investigativo. O capítulo evidencia,



assim, a intenção de articular teoria e prática, de modo a construir alternativas pedagógicas mais significativas para o ensino da Matemática no IFRR *campus* Boa Vista.

O Capítulo 2 aborda os fundamentos da Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS), desenvolvida por David Ausubel (1980, 2000, 2003), destacando a importância do conhecimento prévio do aluno como base para a assimilação de novos saberes. A teoria propõe que a aprendizagem ocorre de forma mais eficaz quando novas informações se conectam, de maneira não arbitrária e substantiva, ao que o estudante já conhece. Conceitos como “subsunçores” e “organizadores prévios” são centrais: os primeiros funcionam como âncoras cognitivas para apoiar o novo conteúdo, enquanto os segundos são recursos pedagógicos que preparam o ambiente para essa conexão. A Aprendizagem Significativa pode se dar por recepção ou descoberta, e se manifesta em formas subordinadas, superordenadas e combinatórias, sendo todas caracterizadas por integração cognitiva e não simplesmente a memorização mecânica.

O capítulo também discute a evolução e ampliação da teoria, incorporando dimensões críticas e criativas. O autor Moreira (2011) introduz a “Aprendizagem Significativa Crítica”, que acrescenta a consciência semântica, o pensamento reflexivo e a mediação dialógica como condições fundamentais. Além disso, a criatividade é explorada como culminância do processo de resolução de problemas, sendo considerada a expressão mais elevada da Aprendizagem Significativa por David Ausubel (1918-2008).

No campo da Matemática, essa criatividade se traduz na capacidade de gerar múltiplas soluções para problemas e é influenciada por fatores como fluência, flexibilidade, originalidade e elaboração. Por fim, o capítulo destaca que a Aprendizagem Significativa não apenas constrói conhecimento, mas tem o potencial para transformar, ao passo que o novo conteúdo modifica os conhecimentos prévios e é por eles modificado.

O capítulo 3 está organizado em três tópicos: *i*) os organizadores prévios para o ensino de Geometria dos Fractais na Aprendizagem Significativa Subordinada; *ii*) o modelo para o ensino de Geometria dos Fractais na Aprendizagem Significativa Subordinada; e *iii*) esquema do ensino de Geometria dos Fractais para Aprendizagem Significativa Sobreordenada.

O capítulo 3 se inicia com um esquema geral da estrutura estratégica da Resolução de Problemas, que impulsionará todo o processo. Que se aplica no ensino da Geometria dos Fractais, o conteúdo matemático específico na qual a abordagem será implementada. A combinação desses dois elementos – Resolução de Problemas e a Geometria dos Fractais – define o “como” e o “onde” ocorre a intervenção para colher os registros de dados.



Em seguida, destaca-se a Criatividade em Matemática, fenômeno central que se busca compreender, sendo este o foco da investigação e diretamente influenciado pela Resolução de Problemas. E por fim, o evento acontece no contexto da Aprendizagem Significativa, que funciona como o “ambiente ou estado” organizado para o desenvolvimento da Criatividade em Matemática.

No capítulo 4, a Criatividade em Matemática é descrita no âmbito da Resolução de Problemas, que visou implementar o desenvolvimento das habilidades dos futuros(as) professores(as) de Matemática, participantes da pesquisa no contexto da Geometria dos Fractais, à luz da Teoria da Aprendizagem Significativa para análise do processo ensino-aprendizagem.

Apresenta o Modelo de Ensino Criativo com Significado em Matemática (MECSM), construído sob os pilares da Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel e das concepções de Criatividade em Matemática de Gontijo, como um guia prático para transformar o cenário educacional.

Foram detalhadas as respostas aos objetivos específicos, desde o diagnóstico de conhecimentos prévios e a potencialidade dos materiais (incluindo o GeoGebra), até a avaliação das predisposições dos docentes e as contribuições da estratégia metodológica. Assim, este capítulo ressalta a relevância do MECSM como uma proposta pedagógica inovadora, com implicações significativas para a formação inicial de professores.

No capítulo 5 foram elaborados quatro subtópicos organizados em abordagem da pesquisa, que contextualiza o modelo adotado para realizar a investigação, trazendo os conceitos e característica dos métodos e técnicas utilizadas na construção do processo de desenvolvimento. E tópicos que abordam os critérios de seleção dos participantes, a descrição do campo da pesquisa e a metodologia de análise dos dados e metadados.

O capítulo 6 apresenta a análise detalhada, interpretação e discussão dos resultados obtidos na pesquisa. Nele, são explorados problemas de Geometria Fractal resolvidos pelos estudantes, tanto com métodos tradicionais quanto com o software GeoGebra, visando investigar como essas práticas promovem a compreensão, a criatividade e a aprendizagem significativa. Através de análises temáticas das respostas aos problemas e de entrevistas semiestruturadas, o capítulo examina a articulação de conceitos, estratégias e percepções dos estudantes, complementado por dados quantitativos sobre o desenvolvimento de suas habilidades criativas (fluência, flexibilidade, originalidade e elaboração) e indicadores de aprendizagem significativa (compreensão, integração e dissociação). Assim, busca-se revelar o impacto da estratégia metodológica na formação de futuros(as) professores(as) de Matemática.



A conclusão sintetiza os achados da pesquisa, discutindo a consecução do objetivo geral de compreender o desenvolvimento da Criatividade em Matemática e da Aprendizagem Significativa em futuros(as) professores(as), por meio de uma estratégia metodológica inovadora aplicada ao ensino da Geometria dos Fractais.



CAPÍTULO 1 - PRINCÍPIOS, PERCURSO INVESTIGATIVO E DEFINIÇÃO DO PONTO DE PARTIDA

1.1 A formação inicial de professores de Matemática: breve discussão

Inicia-se essa discussão com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) a qual estabelece que a formação de professores para a Educação Básica, incluindo o professor de Matemática, deve ocorrer em nível superior, em cursos de licenciatura. Para o professor de Matemática, isso significa uma formação que combine sólida base teórica e prática, garantindo o domínio aprofundado do conteúdo específico da disciplina e dos conhecimentos pedagógicos necessários para atuar nas diferentes etapas e modalidades da Educação Básica, promovendo a reflexão sobre a prática e a constante atualização profissional.

A carreira docente do Século XXI vem se tornando um desafio para os professores que já atuam e para os futuros professores, esse desafio vai além do domínio de conteúdos da matemática. Com o avanço do acesso à tecnologia pelos estudantes fora da escola, exige dos profissionais maior capacidade de inovação no ensino, na resolução de problemas e ainda na Criatividade em Matemática. Para Crescenti, (2008, p. 85) “vários países têm visto na criatividade a principal ‘arma’ para reverter esse quadro problemático da busca por profissionais bem formados para a mudança”.

A formação de professores de Matemática tem sido nas últimas décadas objetos de pesquisa na área da Educação Matemática tanto por grupos de pesquisa com sólida constituição, quanto por programas de pós-graduação *stricto sensu* no Brasil. A pesquisa de Mendes *et. al.* (2020) apontou algumas fragilidades quando composta sob a perspectiva da resolução de problemas:

I) dificuldades quanto à falta de conhecimento sobre o conteúdo matemático da educação básica pelos licenciandos; II) dificuldades apresentadas pelos licenciandos em comunicar suas ideias a respeito do conteúdo matemático trabalhado; III) dificuldade no entendimento dos problemas pelos estudantes; e, IV) dificuldades relativas ao tempo, referentes à realização das atividades pelos licenciandos e ao desenvolvimento da abordagem de ensino (Mendes *et. al.* 2020, p.722).

O cenário descrito por Mendes *et. al.* (2020) teve recorte de 2010 a 2020 nos principais repositórios como Capes e Biblioteca Digital de Teses e Dissertações. Tais fragilidades também são desafios enfrentados no curso de Licenciatura em Matemática do IFRR *campus* Boa Vista, o que vem de encontro a esta investigação, visando desenvolver as habilidades cognitivas dos futuros professores de Matemática.



Além das fragilidades apontadas, os autores mencionam a necessidade do estabelecimento da teoria relacionada com a prática, pois as fragilidades impactaram diretamente na sala de aula da Educação Básica.

Na concepção de Nacarato (2000, p. 26) para além dos conceitos da Matemática, do ensino com a Resolução de Problemas, a autora ressalta a importância da história do professor em formação ou em transformação:

O(a)s professor(a)s sempre têm histórias de sala de aula para serem contadas. Essas passaram a ser valorizadas como elementos centrais no processo de formação docente. Trata-se dos relatos de aula de professor(a)s numa modalidade de discurso narrativa (Bruner, 1988 e 1997; Clandinin e Connelly, 1995; e Ponte, 1998). Esse tipo de relato é que estrutura a experiência docente, possibilitando momentos de reflexão e ressignificação da prática (Nacarato, 2000, p.26).

As “histórias de sala de aula” refletem as vivências, a contexto de maneira que aborda a sala de aula nos aspectos metodológicos, papel do estudante e professor, dinâmica, objetivos, entre outros. Sugere que as experiências pessoais, narrativas, tradições ou modelos observados podem moldar a forma como a sala de aula é percebida.

A ressignificação da prática remete a formação de um professor mais consciente e preparado para as situações diárias de atividades de ensino-aprendizagem. Que no olhar de Crescenti (2008), nos traz algumas características que esse professor deve priorizar dentre o seu rol de conhecimento para a sala de aula:

[...] usar metodologias adequadas a cada assunto; ter um bom tom de voz, clareza e objetividade de expressão, ser coerente entre o que diz e o que faz em aula, usar adequadamente materiais e recursos; envolver o aluno na própria aprendizagem, incentivar sua participação, possibilitar a comunicação e a troca de informações entre professor-aluno e aluno-aluno; conhecer seus alunos e a característica de cada sala: pelo menos ter um panorama geral, uma vez que a escola pretende formar cidadãos críticos, reflexivos e com iniciativa para a vida do trabalho e a vida pessoal; ser pesquisador, reflexivo e consciente da necessidade de aprender permanente (Crescenti, 2008, p. 87).

A abordagem da autora, relaciona orientações para que os futuros professores se preparem para os desafios na concepção da prática, reflexiva e consciente da formação continuada como professor pesquisador. Nesse sentido, a Criatividade Matemática, inserida na prática da pesquisa durante a formação inicial e continuada, busca transcender o ensino reprodutivo. Ela promove a problematização e a busca por soluções inovadoras, capacitando os educadores a cultivarem ambientes onde os estudantes construam, conjecturem e comuniquem suas próprias ideias matemáticas de forma original e significativa, refletindo a natureza dinâmica da disciplina.



Crescenti, (2008) segue destacando que o ensino dos conteúdos deve ser adequado as metodologias, que corrobora com Nacarato (2000) no âmbito da história na sala de aula, não somente do professor, mas também do estudante que está ali inserido no contexto da escola, para que possa envolvê-lo no desenvolvimento da sua própria aprendizagem.

Flores e Bianchini (2022) em pesquisa sobre a formação inicial do professor de Matemática no Brasil contemporâneo, abordam um estudo a partir de dados do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira - INEP (2012a, 2016a, 2018a), nos relatórios do ENADE (2014 e 2017), onde obtém-se a autoavaliação dos concluintes dos cursos de Licenciatura em Matemática sobre a formação para o exercício da docência.

As respostas dos estudantes participantes anos 2014 e 2017, segundo os autores Flores e Bianchini (2022), apontou a média de 35,4% que afirmaram acreditar nas suas vocações para a docência em Matemática. Quanto a fundamentação teórica oferecida durante o curso de Licenciatura ter sido suficiente para a compreensão do futuro do professor, sobre a educação escolar e sua preparação para o exercício da docência, a média foi de 31,9% de participantes que informaram ter recebido a formação teórica completa e de 47,5% que afirmaram ter recebido, em parte, essa formação.

Analisando os percentuais, mesmo que aproximadamente 1/3 que se consideram com vocação para ensinar matemática, considera-se um percentual expressivo dos professores. Na análise da fundamentação teórica recebido na academia, apenas 31% afirmaram ter recebido a formação de forma completa, ou seja, se sentem preparados para ensinar Matemática com os conhecimentos recebidos, mas 47% não obtiveram a mesma formação, o que implica em desafios para esses novos profissionais atuarem no mundo do trabalho.

Quanto a experiência pedagógica, obteve-se a média de 25,9% que responderam ter recebido completamente essa formação durante o curso e 45,8% afirmaram ter recebido em parte. Observa-se que, na formação pedagógica o percentual de respostas foi menor, apenas 25%, ou seja, $\frac{1}{4}$ dos entrevistados estão mais seguros para ensinar aplicando as práticas metodológicas para o ensino de Matemática, e 45% afirmaram ter recebido formação pedagógica parcial, o que torna a atuação do professor mais fragilizada para os desafios da sala de aula.

Os resultados da pesquisa de Flores e Bianchini (2022), apontam as fragilidades na formação do futuro professor de Matemática para o exercício na docência. Neste sentido Nacarato (2000), Crescente (2008), Mendes *et. al* (2020), em diferentes momentos teceram teses destacando a necessidade de melhorar a formação de professores de Matemática para a docência entrelaçando a teoria e a prática.



Para Nóvoa (2019, p.6) tornar-se professor no âmbito da configuração organizacional da escola¹ “obriga a refletir sobre as dimensões pessoais, mas também sobre as dimensões coletivas do professorado”, na concepção do autor é impossível aprender a profissão docente sem a presença, e tão pouco sem o apoio e a colaboração dos outros professores. É neste olhar que o autor sustenta sua proposta no campo da formação de professores.

As dimensões de reflexão segundo Nóvoa (2019) não se refere a convocar somente questões práticas ou a preparação profissional, no sentido técnico ou aplicado, mas de compreender a complexidade da profissão docente em todas as suas dimensões (teóricas, experienciais, culturais, políticas, ideológicas, simbólicas, etc.).

Vem de encontro a Resolução CNE/CP nº 4, de 29 de maio de 2024, o perfil do professor de Matemática para a Educação Básica é o de um profissional com sólida formação que integra indissociavelmente teoria e prática, pautado por princípios formativos que garantem uma educação de qualidade, inclusiva e equitativa, reconhecendo e valorizando a diversidade em todas as suas manifestações.

Além disso, deve atuar com ética e compromisso social, promovendo a emancipação dos estudantes, a gestão democrática e a colaboração com a comunidade escolar, sempre em consonância com a legislação vigente e com a liberdade de aprender e ensinar, visando a formação de cidadãos críticos e atuantes em uma sociedade justa e sustentável.

Portanto, a formação de professores de Matemática para atuar na docência precisa percorrer abordagens teóricas, metodológicas, ideológicas, políticas, culturais, afetivas, socioemocionais, entre outras para alcançar uma formação que atenda os desafios da escola. E para fortalecer o uso de metodologias, o tópico seguinte aborda as tendências metodológicas em evidência na Educação Matemática para a formação de professores.

1.1.1 Metodologias de ensino na formação inicial de professores de Matemática

Existem diversas metodologias de ensino que podem ser aplicadas na formação de professores de Matemática. Cada uma com suas próprias características e pode ser mais adequada dependendo do contexto educacional e dos objetivos de aprendizagem. Além das

¹ Configuração da escola até o presente segundo Nóvoa (2019, p.3) i) um edifício próprio, que tem como núcleo estruturante a sala de aula; ii) uma arrumação orgânica do espaço, com os alunos sentados em fileiras, um quadro; iii) uma turma de alunos relativamente homogênea, por idades e nível estabelecido; iv) uma organização dos estudos com base num currículo e em programas de ensino que são lecionados, regularmente, em lições de uma hora.



metodologias as quais são sistemas robustos e estruturados, existem as tendências metodológicas, com propostas mais flexíveis e adaptáveis.

As Tendências Metodológicas em Educação Matemática referem-se a abordagens e estratégias pedagógicas que visam aprimorar o processo de ensino e aprendizagem da Matemática, tendo como objetivo proporcionar aos educadores ferramentas e reflexões sobre como tornar o ensino da Matemática mais significativo, atrativo e eficaz, estimulando o raciocínio e a construção do conhecimento.

Para Dias *et. al.* (2022, p.11) “as tendências metodológicas da Educação Matemática podem ser grandes aliadas no ensino e na aprendizagem de Matemática, pois proporcionam diversas maneiras de abordar os conteúdos”. Segue algumas no Quadro 1:

Quadro 1 - Tendências metodológicas em Educação Matemática

Tendências Metodológicas	Características
Resolução de Problemas	“[...] como provocadora do movimento de aquisição de saberes, requer a seleção de problemas que realmente exijam dos alunos algumas habilidades na busca de estratégias de resolução”. (Silveira e Miola, 2008, p.53)
Modelagem Matemática	“[...] utilizada na matemática aplicada como principal processo para obtenção do modelo que expõe, em uma linguagem matemática, conjunto de símbolos e relações matemáticas”. (Silveira e Miola, 2008, p.58)
História da Matemática	“[...] oferece a importante possibilidade de uma maior compreensão da evolução dos conceitos matemáticos em sala de aula, por meio de estudos da construção histórica deles”. (Silveira e Miola, 2008, p.68).
Uso de Tecnologias Digitais da informação e comunicação	“Uso de equipamentos eletrônicos e digitais com capacidade de armazenar, processar e distribuir informações. Para “[...] facilitar o processo de entendimento do aluno acerca do significado de diversos conteúdos matemáticos”. (Silveira e Miola, 2008, p.72).
Jogos na Educação Matemática	“[...] capacidade de resgatar os aspectos lúdico, abrindo espaço para o aperfeiçoamento e a formação de um sujeito ativo, que tem a capacidade de tomar decisões perante determinadas situações e é capaz de em conjunto com outros colegas, criar regras, aperfeiçoá-las, discuti-las durante o andamento da diversão (Silveira e Miola, 2008, p.72).
Investigação em sala de aula	“investigar auxilia no desenvolvimento de uma série de habilidades que se assemelham àquelas habilidades comuns aos matemáticos, pois os alunos precisam testar suas proposições e provar suas conjecturas”. (Silveira e Miola, 2008, p.75).

Fonte: Silveira e Miola, (2008, pp.53-75) (adaptado).

O quadro acima foi adaptado, retirando a Etnomatemática, pois esta não é uma metodologia, mas um programa de pesquisa, conforme assinala D’Ambrósio (2013). O autor conceitua como sendo a arte ou técnica de explicar, de entender, de lidar com o ambiente natural, social e cultural, utilizando-se modos de pensamento e saberes próprios de um grupo. Trata-se de olhar a Matemática em várias culturas, não apenas as europeias, egípcia e mesopotâmica, que nos foram tradicionalmente legadas e ensinadas.

Em termos teórico-metodológicos, podemos considerar a Etnomodelagem, concebida por Rosa e Orey (2017), como tendência que pode ser explorada em sala de aula e na academia.



De acordo com os autores, a Etnomodelagem é um processo de tradução que permite compreender e explicar as práticas matemáticas desenvolvidas por membros de diferentes grupos culturais, que possuem conhecimento local (êmico), com a utilização de ferramentas da matemática formal, que é o conhecimento global (ético). Isso permite uma visão mais holística e interconectada da Matemática, com o diálogo de saberes. Os autores ainda salientam que a Etnomodelagem propicia uma aplicação prática do Programa Etnomatemática, com a criação dos “etnomodelos”.

Essas tendências são classificadas como metodológicas porque se concentram na questão, como o ensino da Matemática é conduzido e no processo de aprendizagem. Elas oferecem diferentes percursos e técnicas para abordar os conteúdos, engajar os estudantes e facilitar a compreensão. Por outro lado, não são “epistemológicas” porque não se dedicam à natureza do conhecimento matemático em si – ou seja, ao que é a Matemática? Como ela é construída como ciência? ou quais são seus fundamentos filosóficos? Embora possam influenciar a forma como o estudante constrói seu próprio conhecimento matemático (um aspecto da epistemologia do aprendiz), o foco principal dessas tendências é a prática pedagógica e as estratégias didáticas empregadas em sala de aula.

Portanto, considera-se relevante que os futuros professores de Matemática sejam expostos a uma variedade dessas abordagens durante sua formação, para que possam escolher as mais adequadas para suas práticas de ensino. Cada uma dessas tendências metodológicas pode ser aplicada de forma isolada ou combinada, dependendo dos objetivos educacionais e do perfil dos estudantes.

Nesta pesquisa abordou-se a tendência da Resolução de Problemas como estratégia para potencializar a Criatividade em Matemática, para Aprendizagem Significativa ao posicionar o estudante como protagonista ativo na construção do conhecimento.

No âmbito da Criatividade em Matemática, a Resolução de Problemas será utilizada para estimular o pensamento divergente, a exploração de múltiplas abordagens e a formulação de conjecturas, indo além da busca por uma única resposta correta. Problemas que exigem estratégias heurísticas ou que simulam situações do dia a dia encorajam os estudantes a inovarem, a fazer conexões inusitadas e a desenvolver soluções originais, cultivando a flexibilidade cognitiva e a capacidade de propor novas questões.

Como forma de compreender sob a ótica dos Projetos Pedagógicos dos Cursos de Licenciaturas, de como está sendo realizada a formação de professores de Matemática nas três instituições de ensino superior públicas no Estado de Roraima, obteve-se um breve estudo com



o objetivo de identificar conceitos na matriz curricular de geometria e mais precisamente de geometria fractal.

1.2 Projetos Pedagógicos dos Cursos de Licenciatura em Matemática das IEs Públicas de Roraima

No estado de Roraima existem três instituições públicas que ofertam o ensino superior de Licenciatura em Matemática: a Universidade Federal de Roraima (UFRR), com mais de 32 anos ofertando ensino superior; a Universidade Estadual de Roraima (UERR), desde 2005, ou seja, há mais de 16 anos formando professores para atuar na educação básica; e o mais recente Instituto Federal de Ciência e Tecnologia de Roraima (IFRR), que apesar de ter mais de 29 anos de atuação, desde a então Escola Técnica Federal de Roraima, tornou-se instituição de ensino superior pela Lei nº 11.892 em 29 de dezembro 2008 e somente em 2013 lançou o primeiro curso de Licenciatura em Matemática.

Foi realizada análise das matrizes curriculares tendo como eixo a presença de temas na forma ampla das geometrias, delimitando para geometria fractal.

No desenho da matriz curricular dos Projetos Pedagógicos das IEs com a abordagem da geometria na composição dos componentes curriculares de formação específica e eletivo e de acordo com o período de oferta (Quadro 2):

Quadro 2 - Desenho Curricular de Geometria nos Projetos Pedagógicos das Licenciatura das IEs de Roraima

Componentes Curriculares	IFRR	UFRR	UERR
Geometria Euclidiana Plana	60h (Mod* I)	60h (Sem 1)	75h (3º Sem)
Geometria Analítica	90h (Mod II)	60h (Sem** 1)	75h (1º Sem)
Geometria Espacial	60h (Mod II)	60h (Sem 2)	75h (6º Sem)
Eletiva: Geometria Não Euclidiana	60h (Mod. VII ou VIII)	60h (Sem 7 ou 8)	----
Eletiva: Aplicações da geometria dos fractais na educação básica	60h (Mod. VII ou VIII)	---	---
Eletiva: Matemática para Ensinar: Geometria, Grandezas e Medidas.	---	60h (Sem 7 ou 8)	---
Eletiva: Introdução a Geometria Diferencial	---	60h (Sem 7 ou 8)	---

Fonte: Resolução nº 318- Conselho Superior, de 19 de dezembro de 2017. Resolução nº 002/2020-CENS/CEPE/UFRR) (Resolução nº 002/2020-CENS/CEPE/UFRR. Parecer nº. 06/2019 e Resolução *Ad Referendum* nº 059 de 17/12/2018. *Módulo, **Semestre.

Portanto, nas matrizes curriculares dos Projetos Pedagógicos dos Cursos das Instituições públicas obteve-se sucintamente:



a) No Projeto Pedagógico do Curso de Licenciatura em Matemática presencial e EaD do IFRR a partir do VII módulo, consta aplicações da geometria dos fractais na Educação Básica como componente eletivo com 60h, abordando a proposta da Contextualização e aplicações da geometria dos fractais com os conteúdos de Matemática da Educação Básica. Embora o componente seja eletivo a oferta apresenta-se mais constante que os demais componentes (PPC Licenciatura em Matemática IFRR, 2019);

b) No Projeto Pedagógico do Curso de Licenciatura em Matemática, aprovado pela Resolução nº 002/2020-CENS/CEPE/UFRR, não consta componente curricular de geometria dos fractais, e nem mesmo composto em outro componente da geometria;

c) No Projeto Pedagógico do Curso de Licenciatura em Matemática, aprovado pelo Conselho Universitário da UERR, Resolução *Ad Referendum* nº 59/2018 de 17 de dezembro de 2018, não consta componente curricular de geometria dos fractais, e não está composto na ementa de outro componente da geometria.

Observou-se que apenas o IFRR dispõe um componente curricular de Geometria dos Fractais, porém como componente eletivo. A Geometria dos Fractais é tida como um conceito contemporâneo que está presente em diversas aplicações e embora em níveis complexos, no entanto, o estudo desse conceito pode proporcionar vários benefícios na aprendizagem dos estudantes de Matemática, possibilitando diversas relações com a natureza e com a álgebra nas construções das formas básicas.

1.3 A Revisão da Literatura: organização do processo de busca

A abordagem desta revisão baseou-se na Revisão Sistemática de Literatura (RSL), que Costa Jr. (2019) aborda como modelo de método empregado nos procedimentos de pesquisas, que tem por finalidade realizar o levantamento, classificar, selecionar e analisar publicações de trabalhos com a mesma temática ou que se aproxime da proposta da tese em investigação.

A elaboração da RSL teve relevância fundamental ao considerar os trabalhos já desenvolvidos na temática pesquisada, como forma de trazer as evidências as memórias documentais e demonstrar um ato de respeito aos trabalhos dos pesquisadores antecedentes. Para Yin (2016, p.55) as pesquisas são consideradas inéditas se “um novo estudo afirma ser inteiramente exclusivo, uma boa revisão da literatura também pode mostrar o domínio do pesquisador sobre a literatura, além de apresentar o argumento para a lacuna”.

Sampieri (2013, p.73) afirma que por meio da RSL o pesquisador deverá “detectar, obter e consultar a literatura apropriada ao problema de pesquisa, extrair e recompilar a informação



de interesse e construir o marco teórico”. Yin (2016) e Sampieri (2013) corroboram que para realizar uma pesquisa válida é fundamental realizar a RSL.

O objetivo deste protocolo para revisão sistemática da literatura teve o intuito de analisar produção científica no intervalo de 2013 a 2022, sobre a criatividade matemática e aprendizagem significativa com licenciandos de Matemática no estudo da geometria fractal.

Os modelos utilizados para a estratégia de busca, foi inicialmente a composição de perguntas, tendo como fundamento a questão da pesquisa do projeto de tese, os elementos de derivação das perguntas até o desenvolvimento dos descritores. Após a formulação dos “descritores”, “palavras-chave”, “marcadores” ou “termos de busca” iniciou-se a estratégia de busca. As palavras chaves foram escolhidas e interligadas por conectivos, visando minimizar ocorrência de seleção de milhares de trabalhos com enfoques sem sentido.

A formulação dos descritores levou um tempo expressivo devido aos testes nos repositórios, até que pudessem trazer trabalhos com foco na temática. Portanto, foram utilizadas as palavras-chave estritamente relacionadas com o problema da pesquisa do projeto de tese, associadas aos operadores do sistema booleano: *and* (e), *or* (ou), e *not* (não).

Foram elaboradas cinco perguntas que mapearam a RSL construídas para busca de dados que pudessem refletir o cenário das pesquisas no âmbito da Criatividade em Matemática para a sala de aula e da Teoria da Aprendizagem Significativa, nove descritores e seis critérios de exclusão. Neste sentido, considerou-se critérios, no universo da formação inicial de professores de Matemática no território nacional, com foco na formação, com abordagem da Criatividade em Matemática associada a Aprendizagem Significativa.

Os principais descritores localizados foram os que compõe “resolução de problemas” ou “criatividade” ou “criatividade matemática”, poucos trabalhos com os dois ou três temas relacionados.

A coleta de dados foi sistematizada em uma planilha eletrônica, gerada a partir de um formulário do *Google Forms*. Este formulário continha campos detalhados como descritores, tipo do trabalho, título, autor, referência, tema de estudo, resumo, palavras-chaves, problema, objetivo, método de coleta de dados, amostra, principais resultados, conclusões, comentários sobre o estudo e detalhes bibliográficos completos. Os trabalhos eram acessados, os dados preenchidos e os arquivos com potencial de seleção eram baixados. O período de catalogação, realizado em dias alternados, ocorreu de 30 de junho a 07 de agosto de 2022 e em fevereiro e março de 2023, totalizando aproximadamente 60 horas de trabalho.

A planilha foi estruturada com nove tabelas dedicadas a cada descritor e uma tabela geral para consolidar a contagem de trabalhos selecionados e excluídos, e o tratamento desses



dados demandou cerca de 80 horas de estudo. Dos 358 trabalhos localizados no banco de teses e dissertações da Capes, a seleção inicial baseou-se na leitura do título, resumo e palavras-chave para identificar a composição do descritor. Foram excluídos 129 trabalhos, por não conterem os descritores e 221 por falta de arquivo digital para leitura, resultando em 8 trabalhos selecionados. Um sistema de codificação por cores foi empregado para gerenciar o status da seleção: “vermelho” para excluídos, “amarelo” para pré-selecionados e “verde” para os trabalhos finalmente selecionados.

A atividade iniciou com a busca por descritor no repositório da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e foram então encontradas 48 teses e 310 dissertações para análise de acordo com os critérios de exclusão. Os dados do Quadro 3, constituíram-se da relação do volume de trabalhos localizados por descritor, após análises:

Quadro 3 - Trabalhos encontrados no catálogo de dissertações e teses da Capes

N.º	Descritores	0 - Excluído		1- Selecionado		3-Arquivo não-disponível		Total Geral
		T	D	T	D	T	D	
01	Matemática AND Criatividade	20	61	4	4	10	99	198
02	Licenciatura em Matemática AND criatividade	2	1	0	0	0	5	8
03	Educação Matemática AND resolução de problemas AND Criatividade	0	9	0	0	0	12	21
04	Educação Matemática AND resolução de problemas AND professor AND Aluno	1	15	0	0	3	46	65
05	Educação Matemática AND resolução de problemas AND professor AND Estudante	0	0	0	0	0	5	5
06	Resolução de Problemas AND Criatividade AND Estudante	0	0	0	0	2	7	9
07	Licenciatura em Matemática AND Professor AND Criatividade	1	12	0	0	1	29	43
08	Resolução de Problemas OR Criatividade AND Contrato Didático	2	4	0	0	0	0	6
09	Resolução de Problemas AND Criatividade Matemática AND Geometria	1	0	0	0	1	1	3
TOTAIS:		27	102	4	4	17	204	358

Legenda: Tese (T), Dissertação (D). Data da seleção fase 1, amostra, 03/09/2022.

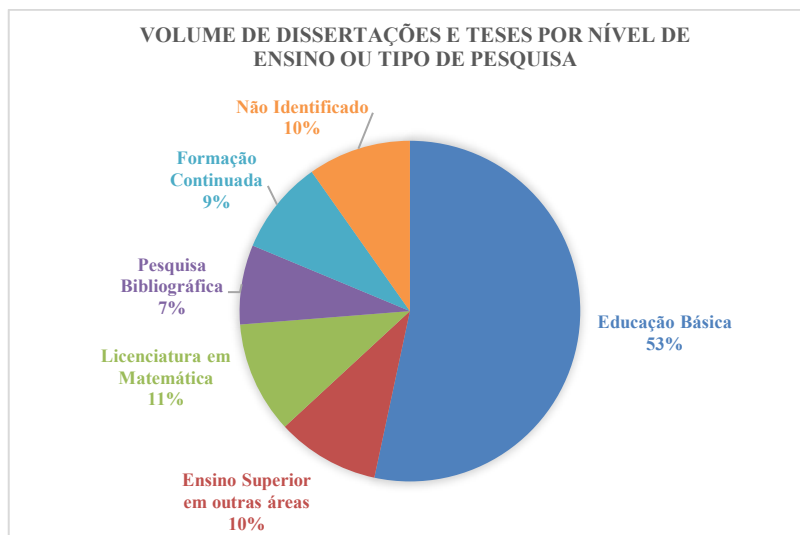
Fonte: Santos e Medeiros (2024)

Em análise geral do volume total de dissertações e teses observou-se que os trabalhos com abordagem da criatividade ficaram concentrados na educação básica, enquanto a resolução de problemas perpassa todos eles. Os trabalhos desenvolvidos no ensino superior dos cursos de



Licenciatura em Matemática, apontaram maior número associando resolução de problemas, modelagem matemática e criatividade matemática, Gráfico 1:

Gráfico 1 - Volume de dissertações e teses



Fonte: autora (2024)

O quantitativo de trabalhos desenvolvidos nos cursos de Licenciatura em Matemática corresponde a 11% do total, que englobaram estudos com estudantes da graduação em sua maioria com a abordagem da temática da resolução de problemas, aplicando conteúdos diversos da Matemática. E mais da metade, sendo 53% na educação básica, uma expressiva quantidade de trabalhos desenvolvidos com a mesma temática.

Na etapa de busca dos artigos diretamente nos portais dos periódicos, foi utilizado apenas um descritor, contemplando os principais elementos do problema da pesquisa, composto pelas palavras-chave: “resolução de problemas”, “educação matemática”, “aprendizagem significativa”, “geometria dos fractais”. Obtemos, resolução de problemas AND criatividade matemática AND aprendizagem significativa AND geometria OR fractais NOT fundamental NOT ensino médio.

O recorte temporal foi de 10 anos no período de 2013 a 2022 e *qualis* de B1 até A1. O recorte temporal da busca dos artigos, difere-se do retorno das dissertações e teses, por motivo de ajuste na composição de conceitos da pesquisa.

Foram selecionadas 13 revistas da tabela de *Qualis* de julho de 2019, das publicações dos Periódicos da Capes. Todas as revistas são voltadas para Educação Matemática ou Ensino de Matemática com *qualis* de B1 até A1. A forma de busca foi acessando o sítio eletrônico de cada revista e utilizando o buscador interno.



Somente na categoria de artigos, apresentou um volume equivalente de trabalhos desenvolvidos na educação superior, em relação as publicações desenvolvidas na educação básica. O descritor “Resolução de Problemas” esteve evidenciado em todas as buscas, seguido da “Criatividade em Matemática” e “Geometria”. Ressalta-se a Criatividade em Matemática, como uma temática que vem sendo estudada no Brasil com mais ênfase nos últimos 20 anos, com o crescimento do número de programas de pós-graduação no Século XXI, aos poucos vem ganhando espaço. Mas, o volume de trabalhos localizados envolvendo a criatividade e Criatividade em Matemática foi bem tímido em relação ao volume de trabalhos sobre a resolução de problemas.

É importante notar que, embora duas dessas produções contemplem o estudo da Geometria dos Fractais, nenhuma delas aborda conjuntamente a Resolução de Problemas e a Criatividade em Matemática. Segue o resultado das análises conforme a disposição dos trabalhos em ordem decrescente ao ano de publicação, Quadro 4:

Quadro 4 - Lista dos trabalhos selecionados do banco de teses e dissertações

Autor	Título	Tipo
Neto, (2022), UnB	Concepções e Práticas Acerca da Criatividade em Matemática: Movimentos na Formação de um Grupo de Estudantes de Licenciatura em Matemática.	Tese
Pinho, (2021), UFSC	Aprender a formular para aprender a resolver: registros de representação semiótica e a criatividade na aprendizagem da geometria	Tese
Lutz, (2020), Universidade Franciscana de Santa Maria.	Possibilidade de Inserção da Geometria Fractal na Licenciatura em Matemática do IFFAR	Tese
Pasquale Junior, (2019) Universidade Estadual do Oeste do Paraná.	Criatividade e Geração de Ideias em Atividades de Modelagem Matemática	Dissertação
Silva, (2018), UFPA	Condições favorecedoras da criatividade no ensino e aprendizagem de professores estagiários no Clube de Ciências da UFPA	Dissertação
Batista, (2017), Universidade Franciscana	Sequências numéricas a partir da geometria fractal para licenciados em Matemática	Dissertação
Lopes, (2017), UFRN	A Criatividade Matemática de John Wallis na Obra <i>Arithmetica Infinitorum</i> : contribuições para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral na Licenciatura em Matemática	Tese
Ramos, (2016), UEL	O raciocínio abduutivo em atividades de Modelagem Matemática	Dissertação

Fonte: Santos e Medeiros (2024)



Dos 14 periódicos selecionados para fazer as buscas foram localizados 308 artigos. E fazem parte do acervo das revistas abaixo, conforme gráfico do volume de trabalhos localizados em cada periódico, Quadro 5:

Quadro 5 - Resumo dos resultados das buscas dos periódicos com *Qualis* de B1 até A1

ISSN	TÍTULO	Localizados	Selecionado
2317-5125	Amazônia - Revista de Educação em Ciências e Matemáticas	12	0
1980-4415	Bolema: Boletim De Educação Matemática (<i>on-line</i>)	70	1
1517-3941	Educação Matemática em Revista (São Paulo)	0	0
1983-3156	Educação Matemática Pesquisa (<i>on-line</i>)	57	2
2177-9309	Em Teia - Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana	16	0
2358-4122	Ensino da Matemática em Debate	15	1
2359-2842	Perspectivas da Educação Matemática	26	3
2447-2689	Remat: Revista Eletrônica da Matemática	23	1
1981-1322	Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática	40	1
2595-7376	Revista Brasileira de Ensino de Ciências e Matemática	8	0
1676-8868	Revista de Educação Matemática	0	0
2238-2380	Revista de Educação, Ciências e Matemática	0	0
2238-5800	Revista Paranaense de Educação Matemática	37	2
2525-5444	Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática	4	0
TOTAL		308	11

Fonte: Santos e Medeiros (2024)

Os trabalhos excluídos tiveram as seguintes características, 140 trabalhos no contexto da educação superior, sendo 108 desenvolvidos em cursos de Licenciatura em Matemática abordando somente a resolução de problemas em outros conceitos da matemática e 32 em outras licenciaturas e cursos de bacharelado. Em seguida foram excluídos 99 artigos de estudos teóricos de resolução de problemas e alguns conceitos de criatividade.

Após as análises, aplicando os critérios de exclusão, foi possível identificar um conjunto relevante das produções. Na formação inicial de professores de Matemática, obteve-se um total de 11 trabalhos. Estes estudos se destacam por envolverem a resolução de problemas, e, em diversos casos, a criatividade.

Todos os 11 trabalhos foram criteriosamente selecionados para compor o corpo da RSL, conferindo à pesquisa uma base mais sólida e direcionada aos temas centrais, no Quadro 6:



Quadro 6 - Lista artigos selecionados nos periódicos

Autor(es)	Título	Revista
Brolezzi, Antônio Carmos (2015).	Criatividade, empatia e imaginação em vigotski e a resolução de problemas em matemática.	Educação Matemática Pesquisa
Onuchic, Lourdes de La Rosa; Morais, Rosilda dos Santos (2013).	Resolução de problemas na formação inicial de professores de Matemática.	Educação Matemática Pesquisa
Mendes, Luiz Otavio Rodrigues; Pereira, Ana Lucia; Proença, Marcelo Carlos de (2020).	O que dizem as pesquisas sobre a resolução de problemas na formação inicial de professores de matemática: um olhar sobre as fragilidades metodológicas	Educação Matemática Pesquisa
Mendes, Luiz Otavio Rodrigues; Proença, Marcelo Carlos de; Moreira, Marco Antonio (2022).	Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas: reflexões sob o enfoque da aprendizagem significativa crítica	Ensino da Matemática em Debate
Nunes, Célia Barros; Santana, Eurivalda Ribeiro dos Santos (2017).	Resolução de problemas: um caminho para fazer e aprender matemática.	Acta Scientiae Canoas
Kripka, Rosana Maria; et. al. (2017)	Aprendizagem de Álgebra Linear: explorando recursos do GeoGebra no cálculo de esforços em estruturas.	Acta Scientiae Canoas
Pereira, Tiago; Borges, Fábio Alexandre (2017)	A geometria dos fractais no ensino de Matemática: uma revisão bibliográfica categorizada das pesquisas brasileiras dos últimos dez anos.	Acta Scientiae Canoas
Carpes, P; Carpes, C. (2020).	Criar e resolver problemas: habilidades para serem mobilizadas com licenciandos em Matemática.	REMAT
Reis Filho, Mário Willian; Marin, Douglas (2022).	Trabalhando a Formulação de Problemas na Forma/Ação Inicial do Professor de Matemática.	REVEMAT
Zanella, Delmar; Franco, André Valdeni Soliani; Canavarro, Ana Paula (2018).	Realizar Construções Geométricas com o Geogebra: A Contribuição do Ambiente de Geometria Dinâmica para o Futuro Professor de Matemática.	RPEM
Costa, André Pereira (2020).	Pensamento Geométrico: em busca de uma caracterização à luz de Fischbein, Duval e Pais.	RPEM

Fonte: Santos e Medeiros (2024)

O resultado final da busca criteriosamente elaborada para esta RSL, foram selecionadas um total de 19 produções: 4 dissertações, 4 teses e 11 artigos. Nesse contexto, o que torna este estudo particularmente relevante e inovador é a integração da Geometria dos Fractais, da Criatividade em Matemática e da Teoria da Aprendizagem Significativa. Essa combinação de elementos representa uma abordagem genuinamente nova e fundamental no âmbito da formação inicial de professores, prometendo enriquecer significativamente o repertório pedagógico e teórico dos futuros educadores.



1.3.1 Panorama da literatura e delimitação do escopo temático

Nas análises das teses e dissertações dos 133 trabalhos analisados por seus resumos, observou-se um volume expressivo de pesquisas envolvendo as temáticas Resolução de Problemas ou Criatividade ou Criatividade em Matemática desenvolvidos predominantemente na Educação Básica, mais precisamente no Ensino Fundamental, dos anos escolares de 5º a 8º ano. Em segundo lugar foram as pesquisas desenvolvidas com estudantes do ensino médio regular no ensino de Matemática. A nível de ensino técnico profissionalizante o volume foi tímido, como também as pesquisas envolvendo a Educação de Jovens e Adultos. No resultado, do ensino superior, encontrou-se pesquisas nas mais diversas áreas de formação, no entanto, com maior concentração na área das ciências e engenharias.

Quanto as pesquisas envolvendo diretamente a Resolução de Problemas e a Criatividade Matemática, no ensino de Matemática em sala de aula, observou-se que foram mais intensas na última década, ou seja, no âmbito do recorte temporal desta pesquisa, porém e um número muito reduzido de pesquisas com a temática da Criatividade em Matemática e nenhuma associada com a Aprendizagem Significativa no ensino superior no âmbito das licenciaturas. Nas dissertações e teses selecionadas apresentaram como principais ideias, que podemos utilizar como direcionamento para a construção desta pesquisa.

A pesquisa de Neto (2022), aborda um cenário do estado da arte voltado para investigação da Criatividade Matemática. O autor faz um estudo profundo sobre o ensino de Matemática no Brasil e o desempenho dos estudantes em avaliações de larga escala, na qual fundamenta suas ideias para melhorar a prática dos professores de Matemática para o desenvolvimento de uma prática criativa, foco de estudo. A pesquisa explora muito bem os instrumentos normativos e regulamentações brasileiras que regem a educação básica.

Quanto a criatividade suas abordagens teóricas se fundamentam nos estudos dos autores (Csikszentmihalyi, 1988a, 1998b, 1996, 1999; Amabile, 1983, 1989, 1996, 2012; Alencar, 2001; Alencar; Fleith, 2009). E para a Criatividade em Matemática, traz os fundamentos nos autores (Hadamard, 1945; Krutetskii, 1976; Polya, 2006; Gontijo, 2007b; Sak; Ayvaz; Bal-Sezerel; Özdemir, 2017; Gontijo; Fonseca; Carvalho; Bezerra, 2021).

Pinho (2021) traz abordagem com foco específico na formação de professores de Matemática para o desenvolvimento do pensamento matemático criativo e densa experiência do autor no estudo das Geometrias e *Softwares* dinâmicos para explorar o tema. Apresenta um refinado texto sobre a criatividade em geometria, além da abordagem da Resolução de Problemas com a proposta para aprender a formular e resolver. Destaca-se as principais



referências que fundamentam suas ideias (Poincaré, 1908; Hadamard, 1944, Wallas, 2014). Lutz (2020), trabalhou a Geometria dos Fractais com uso de *Softwares* dinâmicos como proposta para compor o currículo de cursos de Licenciatura em Matemática. No entanto, sua abordagem não tem foco na criatividade, mas aborda o tema no âmbito das competências do papel do educador na educação básica, como relevante na formação inicial do docente.

Pasquale Junior (2019), apresenta uma pesquisa desenvolvida com estudantes da Licenciatura em Matemática, envolvendo o tema da Criatividade em Matemática, com foco na modelagem de problemas na perspectiva de desenvolver o pensamento criativo. Ramos (2016), também abordou o tema Modelagem Matemática, com foco na resolução de problemas para desenvolver a criatividade Matemática e no sentido inverso, a criatividade para resolver problemas e desenvolver habilidades criativas mediadas pelo raciocínio abduutivo em atividades de modelagem Matemática. Os participantes da pesquisa foram estudantes de Licenciatura em Matemática integrantes do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica à Docência (PIBID).

Batista (2017), apresenta a Geometria dos Fractais, abordando os conceitos e desenvolvendo estratégias para o ensino deste conteúdo para professores em formação. O tema da matemática está relacionado com as sequências numéricas, no entanto, não traz vinculação com a criatividade e nem com a Aprendizagem Significativa. Lopes (2017) compôs um estado da arte, por uma ideia diferenciada para o ensino de Cálculo Diferencial sob a investigação da Criatividade Matemática e apresentação da fundamentação teórica pautada nos livros de Csikszentmihalyi, no contexto da sala de aula para a formação de professores de Matemática.

Silva (2018), investigou as condições da preparação do espaço “sala de aula” para promover a criatividade no ensino de estudantes da formação inicial de cursos de licenciatura. A pesquisa chamou atenção por trazer uma abordagem sobre a criatividade do professor no processo de aprendizagem no período do estágio supervisionado. Referências que apoiam suas ideias (Martínez, 2003, 2004, 2012, 2014, 2017).

Neste sentido, compõe-se o cenário das pesquisas de teses e dissertações voltadas para a temática da Resolução de Problemas, Criatividade Matemática e formação inicial de Professores de Matemática, desenvolvidas na sala de aula. Não foram localizados trabalhos que integrassem nas pesquisas, as temáticas criatividade relacionada com a Aprendizagem Significativa no ensino superior em Licenciatura em Matemática.

A relação encontrada foi apenas para Resolução de Problemas, portanto, observa-se que existe ampla possibilidade de explorar. Os principais objetivos compostos nas pesquisas foram analisar resultados das tarefas de estímulo ao pensamento divergente nas categorias fluência,



flexibilidade e originalidade, por meio da Resolução de Problemas ou atividades propostas, elaborados para desenvolver o pensamento criativo dos participantes.

Quanto aos artigos, apresenta-se breve análise. Nunes e Santana (2017) descreveram a Resolução de Problemas como uma das principais estratégias para ensino de Matemática, de forma que o estudante possa aprender por meio da compreensão dos significados, os conceitos, que pode aguçar a mente a realizar criações. Suas concepções são fundamentadas nos autores: Val de Walle (2001; 2009); Onuchic (2014); Nacarato (2009) e Nunes (2010; 2011). Logo, Onuchi e Moraes (2013) abordam a Resolução de Problemas na formação inicial de professores de Matemática, com foco no desenvolvimento de uma formação com possibilidade de aplicação na prática docente.

O estudo de Brolezzi (2015) objetivou enriquecer a relação entre criatividade e resolução de problemas em educação Matemática, referenciado por uma pesquisa bibliográfica sobre os temas da empatia e da imaginação em Vygotsky. A composição metodológica de resolução de problemas para trabalhar com a criatividade nas aulas de Matemática, visou a construção do conhecimento matemático a partir da proposição e resolução de problemas.

Mendes, Pereira, Proença (2020) realizaram uma pesquisa bibliográfica com a temática da resolução de problemas de trabalhos desenvolvido no ensino superior, com apontamento sobre as possíveis fragilidades. O trabalho busca desvelar as fragilidades que se evidenciam a partir do desenvolvimento da “abordagem de resolução de problemas, em que se tem o problema como ponto de partida na formação inicial de professores de Matemática, apresentadas em teses e dissertações”.

Kripka *et. al.* (2017) trabalharam na identificação e análise das influências do uso de tecnologias digitais interativas em sala de aula, na Aprendizagem Significativa de conceitos de Álgebra Linear por meio de atividades potencialmente significativas para estudantes do ensino superior. A pesquisa usa como estratégia metodológica a resolução de problema e o *software* de Matemática dinâmica *GeoGebra* para propiciar a (re)significação de conceitos de resolução de Sistemas Lineares.

Jesus *et. al.* (2018) desenvolveram sua pesquisa com foco na formação de professores de Matemática, propondo tarefas cognitivamente desafiadoras, na perspectiva do ensino exploratório. Este estudo é relevante no âmbito da abordagem do público-alvo, os tipos de tarefas que embora as autoras não utilizem o termo aprendizagem significativa, mas considera-se potencialmente significativas.

Pereira e Borges (2017) desenvolveram uma pesquisa bibliográfica com abordagem em Geometria dos Fractais no ensino de Matemática no recorte temporal de 2006 a 2015, esse



trabalho aborda discussões acerca da formação de professores e os conteúdos da Geometria não Euclidiana e a exploração da Geometria dos Fractais no ensino de Matemática. O trabalho de Mendes, Proença, Moreira (2022) traz evidências dos princípios da Aprendizagem Significativa Crítica no Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas (EAMvRP) voltada à construção do conteúdo/conceito/assunto que se deseja ensinar com fundamentação na Teoria da Aprendizagem Significativa para a sala de aula.

Reis Filho e Marin (2022) desenvolveram uma proposta de articulação entre a teoria e a prática por meio da formulação de problemas na formação inicial do professor de Matemática. O diferencial deste trabalho para os outros com a mesma temática é o tipo de atividade que aborda um projeto integrado de prática educativa, onde os autores desenvolveram a Resolução de Problemas, com foco na formulação de problemas. Neste mesmo foco da Resolução de Problemas Carpes e Carpes (2020) abordam as habilidades de criação e Resolução de Problemas com licenciandos em Matemática, com resultados do desenvolvimento de algumas habilidades, em sala de aula. Esta pesquisa, compõe-se de relatos com a possibilidade de desenvolver a fluência, flexibilidade e a originalidade no processo de criação de problemas.

Costa (2020) desenvolveu um trabalho com o intuito de construir uma caracterização de pensamento geométrico com uma caracterização elaborada tendo por base as discussões teóricas de Efraim Fischbein, Raymond Duval e Luiz Carlos Pais, autores que realizaram as principais pesquisas nesse contexto. Esta pesquisa aborda o pensamento geométrico e a capacidade mental de construir conhecimentos geométricos por meio da Resolução de Problemas. E por fim, Zanella, Franco, Canavarro (2018) identificaram as contribuições do *GeoGebra* numa intervenção com futuros professores de Matemática a partir da resolução de uma tarefa centrada na realização de construções geométricas. O trabalho vem para contribuir com a temática do uso de *software* de geometria dinâmica para o ensino de geometria.

Quanto as pesquisas envolvendo diretamente a Resolução de Problemas e a Criatividade em Matemática, no ensino de Matemática em sala de aula, observou-se que foram mais intensas na última década. Ou seja, no âmbito do recorte temporal desta pesquisa, porém em um número muito reduzido de pesquisas com a temática da Criatividade em Matemática e nenhuma associada com a Aprendizagem Significativa no ensino superior no âmbito das licenciaturas.

Diante do estudo realizado, observou-se que, embora as pesquisas envolvendo Resolução de Problemas e Criatividade em Matemática tenham se intensificado na última década, especialmente no contexto da Educação Básica, ainda são escassos os estudos que articulam essas temáticas no ensino superior, mais especificamente na formação de professores de Matemática.



Além disso, não foram identificadas pesquisas que integrem a Criatividade em Matemática à Teoria da Aprendizagem Significativa no âmbito das licenciaturas. Nesse cenário, esta tese apresenta-se como inédita e relevante, ao propor uma abordagem que entrelaça a Geometria dos Fractais, a Resolução de Problemas e os princípios da Aprendizagem Significativa com o desenvolvimento da Criatividade em Matemática, contribuindo de forma original para a formação inicial de professores e para o avanço das discussões pedagógicas no ensino de Matemática.



CAPÍTULO 2 - FUNDAMENTOS DA TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

David Paul Ausubel (1918 - 2008) foi um psicólogo educacional americano que fez contribuições de muita relevância para a teoria da aprendizagem. Seu trabalho é amplamente reconhecido e respeitado na área da educação, principalmente por sua teoria da aprendizagem significativa. Ausubel *et. al.* (1980) explora os fundamentos teóricos da aprendizagem no contexto educacional, focando especialmente em como os estudantes adquirem e retêm novas informações de maneira significativa.

A Teoria de Ausubel enfatiza a importância de considerar a estrutura cognitiva pré-existente dos estudantes no planejamento de atividades de ensino e destaca a necessidade de métodos de ensino que promovam a aprendizagem significativa. Além disso, sugere que a educação deve ser organizada de maneira que facilite a assimilação e acomodação do conhecimento de forma eficaz e duradoura.

No ano de 2000, Ausubel, teceu novas concepções do processo de assimilação da Aprendizagem Significativa. Para Ausubel (2003, p. 41), a “elaboração dos principais princípios da aprendizagem por recepção e da retenção significativas, i.e., da Teoria da Assimilação e da aplicação da mesma na aquisição e na retenção de conhecimentos em situações semelhantes às de sala de aula”.

A concepção de Ausubel (2003) nesta citação, descreve o desenvolvimento e a aplicação da Teoria da Aprendizagem Significativa, focando em como o conhecimento é recebido, assimilado e retido de forma significativa pelos estudantes. Ele enfatiza que a teoria não é apenas um construto teórico, mas tem implicações diretas para a prática educacional na sala de aula. Dessa forma, busca explicar como os estudantes podem adquirir e reter conhecimentos de maneira que sejam compreendidos e integrados à sua estrutura cognitiva, em oposição à mera memorização mecânica.

Para Moreira (2011) a Aprendizagem Significativa numa perspectiva mais atual, constitui sua definição:

[...] é aquela em que ideias expressas simbolicamente interagem de maneira substantiva e não-arbitrária com aquilo que o aprendiz já sabe. Substantiva quer dizer não-literal, não ao pé da letra, e não-arbitrária significa que a interação não é com qualquer ideia prévia, mas sim com algum conhecimento especificamente relevante já existente na estrutura cognitiva do sujeito que aprende (Moreira, 2011, p. 13).

Ao longo de aproximadamente quatro décadas, o conceito fundamental da Aprendizagem Significativa, conforme proposto por Ausubel, manteve o cerne. Os estudos de



Moreira (2011), demonstram que o conceito foi enriquecido e ampliado composto de novas perspectivas trazidas por diversos autores em diversos continentes. Essas contribuições, embora ampliando o escopo da teoria, permaneceram alinhadas com os princípios originais estabelecidos por Ausubel, conforme (Quadro 7):

Quadro 7 - Aprendizagem Significativa: da visão clássica à visão crítica

Perspectiva	Autores Principais	Período Aproximado	Conceitos-Chave	Resumo
Visão Clássica	David Ausubel	1960-1980	<i>Subsunçores</i> , Organizadores Prévios, Diferenciação Progressiva	Foca na interação cognitiva não-arbitrária e não-literaL entre o novo conhecimento, potencialmente significativo, e algum conhecimento prévio, especificamente relevante, o chamado <i>subsunçor</i> , existente na estrutura cognitiva do aprendiz (p.157).
Humanística	Joseph D. Novak	1980-1990	Mapas Conceituais, Aprendizagem Ativa, Integração entre Pensamento, Sentimento e Ação	Incorpora a integração construtiva, positiva, entre pensamentos, sentimentos e ações que conduz ao engrandecimento humano (p.160).
Interacionista Social	D.B. Gowin, Lev Vygotsky	1990-2000	Negociação de Significados, Interação Social, Mediação	Abordagem triádica (aluno ↔ professor ↔ materiais educativos do currículo), [...] o processo ensino-aprendizagem é visto como uma negociação de significados cujo objetivo é compartilhar significados a respeito dos materiais educativos do currículo (p.161).
Cognitiva Contemporânea	Gérard Vergnaud	1990-2010	Campos Conceituais, Situações, Esquemas	Aborda as representações mentais construídas pelo sujeito, [...] a construção de um modelo mental pode ser vista como o primeiro passo para uma aprendizagem significativa (p.161).
Da Complexidade e Progressividade	Gérard Vergnaud, da Marco A. Moreira	2000-presente	Complexidade, Progressividade, Campos Conceituais	[...] o conhecimento está organizado em campos conceituais cujo domínio, por parte do sujeito que aprende, ocorre ao longo de um extenso período de tempo (p.166).
Visão Autopoiética	Humberto Maturana, Francisco Varela	1990-presente	Autopoiese, Acoplamento Estrutural, Deriva Natural	[...] é necessário conhecer o conhecedor que é o ser humano, um sistema autopoiético. [...] o material e o professor são agentes perturbadores (p.166).
Visão Computacional	James McClelland, David Rumelhart	1980-presente	Redes Neurais, Processamento Paralelo Distribuído	[...] a mente humana é vista como um sistema computacional representacional. A mente recebe informações sensoriais do mundo, processa tais informações, i.e., computa, e gere representações de estados de coisas do mundo (p. 171).
Visão Crítica	Marco Antonio Moreira	2000-presente	Aprendizagem Significativa Crítica, Princípios Facilitadores, Questionamento	[...] o significado está nas pessoas, não nas palavras. O processo ensino-aprendizagem envolve apresentação, recepção, negociação e compartilhamento de significados [...] (p.175)

Fonte: Moreira (2011, pp. 157-177)



2.1 Aspectos gerais do desenvolvimento da aquisição de conceitos na Aprendizagem Significativa

2.1.1 Os subsunçores e os organizadores prévios

Uma das citações mais comuns em pesquisas na TAS é a que Ausubel *et. al.* (1980, p.137) afirmam que se tivessem que reduzir a psicologia educacional em um único princípio diriam “o fator singular mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já conhece. Descubra isto e ensine de acordo”.

Para esta clássica citação, Silva (2021, p.102) fez uma contribuição interessante para explicar “aquilo que o aprendiz já conhece” ressaltando “que é oportuno que o professor de Matemática reconheça a importância dos organizadores prévios, e promova situações em que possa aplicá-los como materiais introdutórios úteis, que atuam como “pontes cognitivas” para facilitar a aprendizagem”. Neste sentido os organizadores prévios são os conhecimentos que irão realizar as conexões e ajudar no processo de ensino-aprendizagem e estabelecem uma ligação entre aquilo que o estudante já sabe e o que precisa conhecer.

A assimilação de novos conhecimentos na Aprendizagem Significativa necessita dessa estrutura cognitiva. A “estrutura cognitiva” é toda a estrutura de conhecimento existente nas memórias do estudante na ocasião da aprendizagem de um novo conceito, considerada por Ausubel *et. al.* (1980, p.137) como a mais importante ação antes de ensinar, pois envolve toda a experiência prévia de conhecimentos, que vai desde a “própria natureza dos incrementos à estrutura psicológica do conhecimento ao processo de assimilação”.

Na abordagem da “estrutura cognitiva”, também está o termo “subsunçor”, que é definido por Moreira (2011):

[...] subsunçor é o nome que se dá a um conhecimento específico, existente na estrutura de conhecimentos do indivíduo, que permite dar significado a um novo conhecimento que lhe é apresentado ou por ele descoberto. Tanto por recepção como por descobrimento, a atribuição de significados a novos conhecimentos depende da existência de conhecimentos prévios especificamente relevantes e da interação com eles. O subsunçor pode ter maior ou menor estabilidade cognitiva, pode estar mais ou menos diferenciado, ou seja, mais ou menos elaborado em termos de significados. Contudo, como o processo é interativo, quando serve de ideia-âncora para um novo conhecimento, ele próprio se modifica adquirindo novos significados, corroborando significados já existentes (Moreira, 2021, p.14).

Seguindo essa mesma linha de pensamento Silva (2021) faz a seguinte abordagem sobre o termo subsunçor e a sua fundamental importância:

Na Teoria ausubeliana, essa assimilação que é processual, vai permitir que essa nova informação ou novo conceito se relacione de modo não arbitrário e não literal (substantiva), com um aspecto relevante da estrutura cognitiva nomeado de



subsunçor, e este, por sua vez é uma estrutura de conhecimento específica existente no cognitivo do aprendiz, podendo ser um conceito, uma ideia, ou outra proposição que já existe, que desta feita servirá de ancoradouro para dar significado ao novo conhecimento (Silva, 2021, p. 112).

Na citação de Moreira (2011) podemos usar os exemplos dos subsunçores necessário para aprender o conceito de Geometria Fractal, como: as sequências numéricas e a geometria euclidiana, como conhecimentos específicos. Que na citação de Silva (2021) o subsunçor é um aspecto relevante da estrutura cognitiva, indo mais além de conceitos da matemática acadêmica, mas um modelo de conceito, ideia ou proposição que irá gerar novo significado.

Quanto aos “Organizadores Prévios funcionarão como uma espécie de ‘ponte cognitiva’, que serão definidos pelo professor” (Silva, 2021, p. 102). Parafraseando Ausubel (2003) a autora, destaca que os organizadores prévios “deverão auxiliar e conduzir os aprendizes para a identificação de subsunçores”. E ainda, de acordo com Silva (2021, p.102) “é oportuno que o professor de Matemática reconheça a importância dos organizadores prévios”, para, formular a estratégia de ensino visando identificar os conhecimentos acadêmicos aplicados nas resoluções.

Para Moreira (2011) os organizadores prévios podem ser utilizados pelo professor como ações estratégicas de ensino, que precede a aprendizagem de um novo conhecimento:

Organizador prévio é um recurso instrucional apresentado em um nível mais alto de abstração, generalidade e inclusividade em relação ao material de aprendizagem. Não é uma visão geral, um sumário ou um resumo que geralmente estão no mesmo nível de abstração do material a ser aprendido. Pode ser um enunciado, uma pergunta, uma situação-problema, uma demonstração, um filme, uma leitura introdutória, uma simulação. Pode ser também uma aula que precede um conjunto de outras aulas. As possibilidades são muitas, mas a condição é que preceda a apresentação do material de aprendizagem e que seja mais abrangente, mais geral e inclusivo do que este (Moreira 2011, p.31).

Os organizadores prévios e os subsunçores atuam como elementos mediadores, estabelecendo conexões cognitivas entre os novos conhecimentos e as estruturas conceituais preexistentes na estrutura cognitiva do estudante. Esses “constructos teóricos” desempenham um papel crucial na ancoragem e integração de novas informações ao repertório de conhecimentos já estabelecidos pelo estudante.

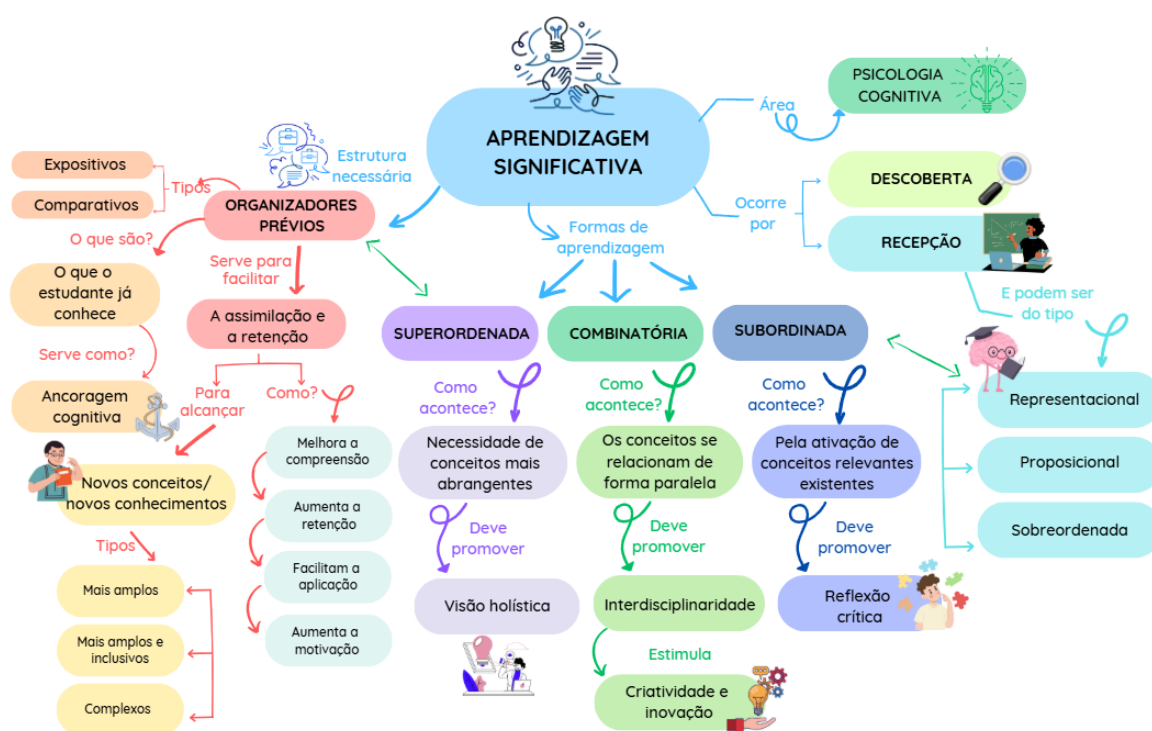
2.1.2 Mapa Mental da Teoria da Aprendizagem Significativa

O mapa mental (Figura 1) foi elaborado para responder as seguintes questões: o que os organizadores prévios representam para a Teoria da Aprendizagem Significativa? Quais as



principais formas de Aprendizagem Significativa? E, como ela acontece? Obteve-se como resultado do estudo um esquema que descreve as conexões e caminhos que cada forma de aprendizagem, percorre e ainda como a aprendizagem ocorre, bem com os tipos e características pertinentes a cada grupo de ações. Nesta construção, enfatizamos a importância dos organizadores prévios.

Figura 1 - Mapa Mental da Teoria da Aprendizagem Significativa



Fonte: Ausubel (1980-2003)

No mapa mental da (Figura 2), ilustra-se praticamente um terço do mapa, que percorre os dois tipos de organizadores prévios, e que são os caminhos para desenvolver a retenção e assimilação. A depender do que o estudante já sabe, esses conceitos irão interagir com as formas de aprendizagem significativa: combinatória, superordenada ou subordinada. E ainda o caminho a ser percorrido, se por recepção ou descoberta. Tais caminhos ainda podem ser vistos por três tipos: representacional, proposicional ou sobreordenada.

No âmbito da Aprendizagem Significativa, observa-se no mapa mental, que a forma de aprendizagem combinatória estimula a criatividade e a inovação dos novos conceitos. Promove a interdisciplinaridade por meio da conexão dos conceitos que se relacionam de forma paralela.



No entanto as formas de Aprendizagem Significativa, também podem se interrelacionar durante o processo, de modo que, os conceitos novos podem acontecer de forma subordinada ou superordenada, estes convergem para a combinatória.

2.2 Conceito de aprendizagem na Aprendizagem Significativa

A Aprendizagem Significativa segundo Ausubel *et. al.* (1980) tem como princípio, que o desenvolvimento do ensino, necessita fazer algum sentido para o estudante e, nesse processo, a informação deverá interagir e ancorar-se nos conceitos existentes na estrutura cognitiva desse estudante. Moreira (2011, p.13) parafraseando Ausubel (1980) afirma que a “Aprendizagem Significativa é aquela em que ideias expressas simbolicamente interagem de maneira substantiva e não-arbitrária com aquilo que o aprendiz já sabe”.

A maior ênfase no estudo da Teoria da Aprendizagem Significativa é a aprendizagem de conceitos que sejam significativos para o estudante. Para Ausubel *et. al.* (1980), a Aprendizagem Significativa é identificada quando o conjunto de informações no plano mental do estudante se revela, através da aprendizagem por recepção ou descoberta.

Para introduzir os tipos de aprendizagem significativa, há de se observar que existem diversos tipos de aprendizagem, citamos algumas (“aprendizagem por ensaio e erro”, “aprendizagem por discriminação”, “aprendizagem por ambiguidade”, “conceito de aprendizagem”, “aprendizagem condicionada”, etc).

Ausubel *et. al.* (1980, p. 20), descrevem os tipos principais de aprendizagens que ocorrem na sala de aula “aprendizagem automática e significativa, formação de conceitos, solução de problemas verbais e não verbais”, distinguidas em dois processos: “aprendizagem significativa por recepção e aprendizagem significativa por descoberta e uma outra entre aprendizagem automática (por decoreação) e significativa”.

A aprendizagem por descoberta acontece no plano de busca do conteúdo, a partir de desafios ou um problema a ser resolvido pelo estudante, neste sentido segundo Ausubel *et. al.* (1980, p. 20), destacam que o conteúdo deverá ser “descoberto pelo aluno antes que possa ser significativamente incorporado à sua estrutura cognitiva”. Desse modo Ausubel *et. al.* (1980, p. 21), explicam como acontece esse processo, em que o aluno deverá “reagrupar as informações, integrá-las à estrutura cognitiva existente, reorganizar e transformar a combinação integrada, de tal forma que dê origem ao produto final desejado [...]”.

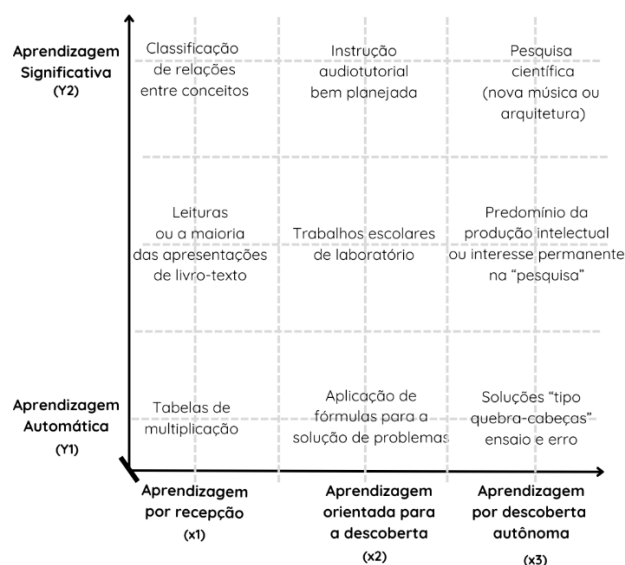
Os autores Ausubel *et. al.* (1980, p. 21), deixam registrado que “grande parte da aprendizagem acadêmica é adquirida por recepção, enquanto os problemas cotidianos são



solucionados através da aprendizagem por descoberta”. Neste sentido, tecemos nossos argumentos utilizando os fundamentos da Aprendizagem Significativa no âmbito da aprendizagem por recepção, porém não desvinculando a existência da aprendizagem por descoberta.

Veja uma ilustração dessa disposição no plano cartesiano Figura 2:

Figura 2 - Aprendizagem receptiva e aprendizagem por descoberta situam-se em diferentes contínuos que parte da aprendizagem automática ou da aprendizagem significativa



Fonte: Ausubel *et. al.* (1980, p.21)

A aprendizagem receptiva segundo Ausubel *et. al.* (1980, p. 20), implica em uma forma de aquisição de novos conceitos por meio das disposições para aprendizagem significativa ocorrer quando “a tarefa ou a matéria potencialmente significativa é compreendida ou tornada significativa durante o processo de internalização”.

A Aprendizagem Significativa e a Aprendizagem Automática estão posicionadas equidistantes em (y) do plano cartesiano, sendo que a aprendizagem automática se encontra na parte inferior o que faz que com suas ações permaneçam constante, enquanto a Aprendizagem Significativa está posicionada acima e compõe os processos do seguimento (x) compondo todas as coordenadas $[x_1, \dots, x_3]$ e $[y_1, y_2]$. Desta forma, observa-se que as interseções se expandem no eixo (x) e conseqüentemente amplia o eixo (y) formando uma malha de complementos até alcançar a aprendizagem por descoberta.

Além dessas duas dimensões da Aprendizagem Significativa, Ausubel *et. al.* (1980, p. 33), fazem a distinção de três tipos de aprendizagem receptiva significativa: aprendizagem



representacional; aprendizagem proposicional e aprendizagem sobreordenada (proposicional superordenada).

O Quadro 8, apresenta a síntese dos tipos de aprendizagem significativa receptiva. Nesta pesquisa faz-se o uso desse tipo no desenvolvimento de processo para ensinar Geometria dos Fractais aos futuros professores de Matemática do IFRR *campus* Boa Vista. Embora sejam utilizados os três tipos, nossa atenção será mais direcionada para a aprendizagem superordenada.

Quadro 8 - Tipos de Aprendizagem Significativa Receptiva

Aprendizagem receptiva significativa	Definição	Característica
<i>Aprendizagem representacional</i>	É significativa porque as proposições da equivalência representacional podem ser relacionadas (de forma não arbitrária), enquanto exemplos, a uma generalização presente na estrutura cognitiva de quase todas as pessoas, em torno do primeiro ano de vida.	Tudo tem um nome e o nome significa aquilo que seu referente significa para uma determinada pessoa.
<i>Aprendizagem proposicional</i>	Esta aprendizagem pode ser considerada derivativa se o material de aprendizagem simplesmente exemplifica ou reforça uma ideia já existente na estrutura cognitiva. É chamada correlativa se for uma extensão, elaboração, modificação, ou qualificação de proposições anteriormente adquiridas.	Pode ser ou subordinativa ou superordenada , ou combinatória . A aprendizagem subordinativa ocorre quando uma proposição “logicamente” significativa de uma determinada disciplina (plausível, mas não necessariamente válida lógica ou empiricamente, no sentido filosófico) é relacionada significativamente a determinadas proposições superordenadas na estrutura cognitiva do aluno.
<i>Aprendizagem superordenada</i>	Ocorre quando uma nova proposição pode ser relacionada a determinadas ideias superordenadas na estrutura cognitiva existente; mas é relacionável a um conjunto amplo de ideias geralmente relevantes que podem ser subordinadas a elas.	Refere-se aos casos em que uma proposição potencialmente significativa não pode ser relacionada às ideias superordenadas nem às subordinativas na estrutura cognitiva do estudante, mas é relacionável a um conjunto de conteúdos relevantes a esta estrutura .

Fonte: Adaptado de Ausubel *et. al.* (1980, p. 32-33)

Cada uma das aprendizagens deste Quadro 8, possui definição e características que determinam o perfil da estrutura cognitiva do aprendiz. Mas de acordo do Moreira (2011, p. 173) “na sociedade contemporânea não basta adquirir novos conhecimentos de maneira significativa, é preciso adquiri-los criticamente”.

A nova concepção de Aprendizagem Significativa de Moreira (2011) denomina-se de Aprendizagem Significativa na visão crítica (subversiva, antropológica). Essa aprendizagem preserva os princípios da Aprendizagem Significativa clássica com a implementação da



interação social e o questionamento como elementos centrais para a facilitar a aprendizagem significativa crítica.

Moreira (2011, p. 174) cria onze princípios facilitadores para a aprendizagem significativa crítica:

- (1) **Conhecimento prévio** (aprendemos a partir do que já sabemos);
- (2) **Perguntas ao invés de respostas** (estimular o questionamento ao invés de dar respostas prontas);
- (3) **Diversidade de materiais** (abandono do material único);
- (4) **Aprendizagem pelo erro** (é normal errar; aprende-se corrigindo erros);
- (5) **Aluno como perceptor representador** (o aluno representa tudo o que percebe);
- (6) **Consciência semântica** (o significado está nas pessoas, não nas palavras);
- (7) **Incerteza do conhecimento** (o conhecimento humano é incerto, evolutivo);
- (8) **Desaprendizagem** (às vezes, o conhecimento prévio funciona como obstáculo epistemológico);
- (9) **Conhecimento como linguagem** (tudo o que chamamos de conhecimento é linguagem);
- (10) **Diversidade de estratégias** (abandono do quadro de giz);
- (11) **Abandono da narrativa** (simplesmente narrar não estimula a compreensão),
(Moreira, 2001, p.174).

Diante destes princípios Moreira (2001) ressalta que:

[...] o processo de ensino-aprendizagem envolve apresentação, recepção, negociação e compartilhamento de significados [...], é preciso ter consciência de que os significados são contextuais e arbitrariamente atribuídos pelas pessoas aos objetos e eventos, e de que elas também atribuem significados idiossincráticos aos estados de coisas do mundo” (Moreira, 2001, p.175).

Os onze princípios da Aprendizagem Significativa Crítica, representam uma evolução e expansão significativa da teoria original de Ausubel, mantendo sua essência, mas incorporando elementos críticos e reflexivos essenciais para a educação no Século XXI. O primeiro princípio, “Conhecimento prévio”, reafirma o conceito fundamental de Ausubel, que é a base tanto da teoria clássica quanto da crítica.

No entanto, os princípios subsequentes introduzem dimensões que vão além da visão original: Os princípios (2), (3), e (10), perguntas, diversidade de materiais e estratégias expandem a ideia de Ausubel e de demais autores no decorrer dos anos, sobre organizadores prévios, enfatizando uma abordagem mais dinâmica e diversificada na apresentação e exploração do conhecimento.

O princípio (4), “Aprendizagem pelo erro”, e o (8), “Desaprendizagem”, oferecem uma perspectiva nova sobre como o conhecimento prévio interage com novas informações, reconhecendo que nem sempre essa interação é direta ou positiva. Os princípios (5) e (6), “aluno como perceptor representador e consciência semântica” aprofundam a compreensão do papel ativo do estudante na construção do significado, um aspecto implícito, mas não totalmente desenvolvido na teoria clássica.



O princípio (7), “Incerteza do conhecimento”, e o (9), “Conhecimento como linguagem”, introduzem uma dimensão epistemológica mais profunda, convidando a uma reflexão crítica sobre a natureza do conhecimento, algo não explicitamente abordado por Ausubel. E, o princípio (11), “Abandono da narrativa”, desafia diretamente o método expositivo tradicional, que, embora não seja o foco da teoria de Ausubel *et. al.* (1980), era frequentemente associado à aprendizagem por recepção.

Resumindo, estes princípios mantêm o cerne da Aprendizagem Significativa - a importância do conhecimento prévio e da construção ativa de significados - mas a expandem para incluir uma postura mais crítica, reflexiva e adaptável às complexidades do mundo moderno. Eles transformam a teoria de um modelo primariamente cognitivo para um que engloba aspectos metacognitivos, epistemológicos e pedagógicos mais amplos, preparando os estudantes não apenas para assimilar conhecimento, mas para questioná-lo, construí-lo e reconstruí-lo continuamente.

2.3 Concepções sobre a Criatividade na Aprendizagem Significativa

Novaes (1972, p. 17) aborda a definição de criatividade do ponto de vista etimológico ligada ao “termo criar – que quer dizer – dar existência *a*, sair do nada, estabelecer relações até então estabelecidas pelo universo do indivíduo, visando determinados fins”.

Traz ainda uma versão no campo da Psicologia conceituada por meio do associacionismo que segundo Novaes (1972, p.22), a criatividade, “no relacionamento com o processo de tentativas e erros e o pensamento criativo na ativação de conexões mentais que continuam até que surja a combinação certa ou até que o pensador desista”. Observa-se que essa abordagem é um processo que envolve ação prática e cognitiva para alcançar o pensamento criativo.

Na concepção de Ausubel *et. al.* (1980), temos que a criatividade:

[...] é a expressão mais elevada da solução de problemas, envolvendo novas idéias (*sic*) ou transformações originais de idéias (*sic*) e a gênese de novos princípios integrativos (superordenados) e explicativos. Embora a criatividade varie num *continuum*, ela é menos generosamente distribuída entre os aprendizes do que a inteligência e a aptidão para resolver problemas. A criatividade da pessoa criativa, porém, difere qualitativamente dos tipos de criatividade exibidos pelas pessoas representadas nestes *continuum*. Ele ou ela devem ser capazes de gerar idéias (*sic*) originais em alguma área substantiva do esforço humano, idéias (*sic*) estas singularmente originais e significativas em termos da cultura em geral, ao invés de termos do seu próprio desenvolvimento individual (Ausubel, *et. al.* 1980, p.471-472).



Observa-se que os autores consideram a criatividade como o ápice da resolução de problemas, no entanto, a expressão “*continuum*”², na concepção de Ausubel *et. al.* (1980) chama a atenção para algo que acontece de forma peculiar, ou mesmo, podemos dizer rara de se acontecer. No seguinte, entende-se que os autores diferem a criatividade e a pessoa criativa, descrevendo que embora as habilidades criativas de uma pessoa sejam originais e diversas áreas, subte-se que se difere de pessoas com habilidades criativas para resolver problemas.

Nessa perspectiva, considera-se que existem diferentes tipos de criatividade. Trazendo para o contexto do ensino escolar, os autores acreditam que a criatividade é menos possível de ser obtida por meio de treinamento. No entanto, afirmam que “a escola, contudo, pode melhor enfrentar a criatividade, oferecendo oportunidades adequadas para as expressões de criatividade e ao recompensá-la apropriadamente” (Ausubel, *et. al.* 1980, p.472).

No aspecto cognitivo os autores emergem por conceitos da psicologia com objetivo de trazer a compreensão os processos percorridos para alcançar a criatividade. Inicialmente, o termo principal no estudo da criatividade é o “discernimento”, segundo Ausubel *et. al.* (1980, p. 474) “a solução de problemas pelo discernimento é, obviamente, um tipo de aprendizagem pela descoberta significativa na qual as condições do problema e os objetivos desejados são não arbitrariamente e substantivamente relacionados com a estrutura cognitiva existente”.

Podemos interpretar o discernimento dentro do contexto da Aprendizagem Significativa como a capacidade de diferenciar, integrar e aplicar novos conhecimentos de maneira significativa e consciente dentro da estrutura cognitiva existente do estudante.

Classifica-se o discernimento em dois termos: de processo ou de produto. Vejamos a citação seguinte de Ausubel *et. al.* (1980):

Como produto, o discernimento se refere a certas características distintivas do resultado final da solução de problemas significativos [...] possui as seguintes características: (1) subjetiva: um sentimento agradável de uma descoberta apropriada, de “ver a luz” ou “*Eureka*”; (2) objetivo: reproducibilidade imediata e possibilidade de transposição. E como processo, refere-se a um método distintivo de, ou uma abordagem a, soluções de problemas [...] (Ausubel *et. al.*, 1980, p. 474).

A primeira característica do discernimento como produto é subjetiva, representa o tipo de aprendizagem por descoberta, que lida com a reação ampla e efetiva ao produto da aprendizagem, ou seja, a construção do caminho ou da estratégia para a solução do problema,

² Na Matemática o significado de *continuum*, representa a série de vários elementos sequenciais, sendo muito difícil a diferença entre eles, apresentando diferença entre os primeiros elementos e os finais. Na Psicologia é um modelo conceitual estruturado a partir de três níveis bipolares, que sintetiza os principais passos que envolvem as expressões visuais e apresenta materiais e atividades artísticas para trabalhar com cada nível especificamente.



ou ao termo bastante conhecido *Eureka*. A segunda característica é de cunho cognitivo, ou seja, o que foi descoberto na primeira característica, agora são ideias ou conceitos, com possibilidade de transposição em outras situações ou problemas ou realidades.

No entanto, Ausubel *et. al.* (1980, p. 475) afirmam que “mais significativo, porém, tanto para a teoria da aprendizagem como para a prática educativa, é indicar, em primeiro lugar, como o discernimento é adquirido e como difere de outros tipos de solução de problemas”. Os autores levantam este questionamento, mas infelizmente não apresentam neste contexto as possibilidades da aquisição do discernimento. Mas pode-se compreender o discernimento como uma capacidade de conduzir o processo de resolução de um problema.

Embora Ausubel *et. al.* (1980) não abordem a criatividade diretamente como um tema central da Aprendizagem Significativa, os princípios que eles propõem têm implicações importantes para o desenvolvimento da criatividade. Encorajar os estudantes a estabelecerem conexões significativas e inovadoras entre o conhecimento novo e o pré-existente, e a explorar a complexidade e a integração dos conceitos, pode ser uma maneira eficaz de fomentar a criatividade no contexto educacional.

A integração na Aprendizagem Significativa será definida como a capacidade de conectar, hierarquizar e organizar conceitos para formar um todo coerente. Embora Ausubel não empregue a palavra integração de forma explícita como um conceito isolado, o processo de organização e conexão que essa palavra evidencia, representa o objetivo fundamental de uma aprendizagem significativa eficaz: a construção de um conhecimento coerente e interligado.

Nesse sentido, para os autores, Ausubel *et. al.* (1980):

A escola pode, obviamente, ajudar na atualização de potencialidades criativas existentes ao fornecer oportunidades para a espontaneidade, iniciativa e expressão individual, ao abrir lugar no currículo para tarefas que são suficientemente desafiadoras para os alunos com dotes criativos; e ao recompensar a realização criativa (Ausubel *et. al.*, 1980, p.494).

Embora na visão de Ausubel *et. al.* (1980) o termo “criatividade” de modo geral seja cercado de incertezas, o sistema educacional brasileiro e a sociedade a consideram uma qualidade desejável a ser fomentada na sala de aula. Considerando que, existe a possibilidade de se extrair implicações sobre criatividade a partir de seus conceitos na interação com a aprendizagem significativa. A criatividade, sob essa lente, pode ser vista como uma condição capaz de fazer conexões inovadoras e significativas.

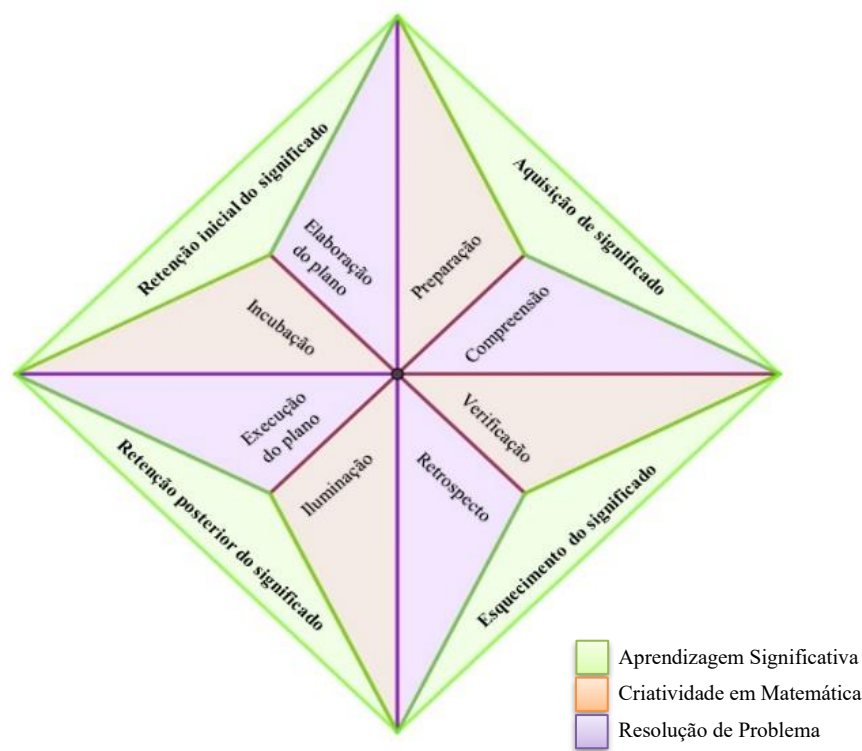
Uma síntese da literatura no campo da criatividade evidencia sua importância frente aos desafios sociais, econômicos e tecnológicos contemporâneos. O desenvolvimento de



habilidades criativas emerge como soluções inovadoras, impactando significativamente tanto a esfera pessoal quanto no contexto social. Esta perspectiva ressalta a criatividade não apenas como uma competência individual, mas como um recurso coletivo para a navegação e resolução de problemas do século XXI.

Para ilustrar as múltiplas interações dos estágios da Aprendizagem Significativa e a fase do processo criativo para a Criatividade em Matemática, constituiu-se a (Figura 3) para ilustrar a ideia de um fractal simples, reunindo os elementos comuns da Resolução de Problemas, da Aprendizagem Significativa e a Criatividade em Matemática no objeto:

Figura 3 - Enlace ilustrativo entre Aprendizagem Significativa Subordinada, Resolução de Problemas e a Criatividade Matemática



Fonte: Adaptação Ausubel *et. al.* (1980), Gontijo (2007) e Polya (2006)

Representa-se os elementos de forma acomodada, no sentido anti-horário, a ilustração não tem a intensão de elaborar uma ideia condicionada ou sobrepostas, mas reunir uma composição de processos:

- compreensão/preparação/aquisição de significados;
- elaboração do plano/incubação/retenção inicial do significado;
- execução do plano/iluminação/retenção posterior do significado;
- retrospecto/verificação/esquecimento do significado.



Rememorando, que segundo Gontijo (2006) a Criatividade em Matemática é a capacidade de apresentar diversas possibilidades de solução apropriadas para uma situação problema, de modo que estas focalizem aspectos distintos do problema e/ou formas diferenciadas de solucioná-lo, especialmente formas incomuns.

Unificando o Processo de Assimilação de conceitos da Aprendizagem Significativa, os Estágios da Criatividade em Matemática e as fases da Resolução de Problemas, obtemos o modelo do ensino para aprendizagem significativa subordinada para a Geometria Fractal.

2.4 O processo de Assimilação da Aprendizagem Significativa Receptiva

Brandão (2007, p. 9) afirma que “não há uma forma única nem um único modelo de educação[...]”, baseado em seus estudos sobre os distintos povos e cultura, em que cada um tinha o seu modelo de educação pelo qual seriam de serventia para a própria comunidade ou povo, passadas pelas gerações. Para Ausubel *et. al.* (1980, p. 98) “a aquisição de conhecimento em qualquer cultura é primordialmente uma manifestação da aprendizagem receptiva”.

A Teoria da Aprendizagem Significativa Receptiva é uma proposta contrária ao ensino na forma mecânica ou de modelos passivos, apesar do conceito do termo “receptiva”, desse modelo de assimilação, levar a ideia de que apenas o estudante recebe as influências direta do professor de aula expositiva, e mesmo que a forma de recepção seja por meio de aulas expositivas, ela se compõe por método e características que a define.

Ausubel *et. al.* (1980) conceitua a aprendizagem receptiva significativa como um processo ativo porque requer no mínimo três características indispensáveis:

- 1) O tipo de análise cognitiva necessária para avaliar que aspectos da estrutura cognitiva são mais relevantes para o novo material potencialmente significativo; 2) Algum grau de harmonia com as idéias (*sic*) existentes na estrutura cognitiva, ou seja, a apreensão de similaridades e diferenças, e resolução de contradições reais ou aparentes entre o conceito e proposições novos e os já estabelecidos; e 3) Reestruturação do material aprendido em termos da experiência intelectual idiossincrática e do vocabulário de cada aluno (Ausubel *et. al.*, 1980, p.97).

As três características mencionam o material potencialmente significativo. O item 2 menciona o termo “ideias existentes” referindo-se aos conhecimentos prévios e no terceiro menciona o termo “experiência intelectual idiossincrática” trata-se de algo fora dos padrões de conhecimentos de uma turma de estudantes por exemplo, aqueles que se sobressaem dentre os outros em relação à retenção dos conhecimentos.



Mendes *et. al.* (2022, p. 18) também ressalta que, como essência, a importância de valorizar e trabalhar com o conhecimento prévio dos estudantes, buscando estabelecer relações ao novo conhecimento que será ensinado. Esta teoria auxilia diversos professores e pesquisadores das áreas educacionais no entendimento do processo ensino-aprendizagem.

Trazendo o contexto da sala de aula é fato que o modelo de aprendizagem receptiva ao longo da história vem sofrendo críticas, por diversos motivos, segue alguns: a aprendizagem por recepção tornou-se mecânica e sem significados; a aprendizagem verbal tornou-se “decoreba”, por esses e outros motivos é que a Aprendizagem Significativa Receptiva também foi alvo de muitas críticas.

Ainda é predominante o ensino por meio da aprendizagem por recepção, porém estereotipada. Tornando-se um desafio distinguir o ensino por meio de Aprendizagem Significativa Receptiva. Diante deste cenário, Ausubel *et. al.* (1980) descreveram algumas práticas que foram prejudiciais ao método da aula expositiva:

1. O uso precoce de técnicas verbais puras com alunos cognitivamente imaturos;
2. Apresentação arbitrária de fatos não relacionados sem qualquer organização ou princípios explicativos;
3. O fracasso em integrar novas tarefas de aprendizagem com assuntos apresentados anteriormente;
4. O uso de procedimentos de avaliação que apenas medem a capacidade para perceber fatos discretos, ou reproduzir idéias (*sic*) com as mesmas palavras ou em contextos idênticos aos originalmente encontrados. (Ausubel *et. al.*, 1980, p.99)

Considera-se lamentável que as práticas acima mencionadas há mais de trinta anos, ainda vem acontecendo no Século XXI. Mesmo no século passado Ausubel e seus colaboradores já lançavam inquietações sobre fragilidade na formação de professores(as) com pouca ou nenhuma ênfase aos tipos de aprendizagem: receptiva, automática e significativa.

Ausubel *et. al.* (1980) defendem a importância da Aprendizagem Significativa Receptiva como uma forma prática e acessível a todo professor:

Acreditamos que uma explicação clara dos princípios psicológicos subjacentes à aprendizagem receptiva significativa é acessível a qualquer professor; e, quando esses princípios são aplicados e combinados com outros tipos de práticas pedagógicas, podem ocasionar uma melhoria substancial no aproveitamento escolar. (Ausubel *et. al.*, 1980, p.100)

É possível observar nesta citação, que o desenvolvimento de aulas por meio da “exposição verbal” ainda é o método de ensino mais eficiente durante séculos na aprendizagem escolar, portanto, não se deve desconsiderar o potencial da Aprendizagem Significativa



Receptiva, desde que o método não resulte em treinamento ou estratégias de resolução de problemas generalizados.

Neste sentido, a Aprendizagem Significativa Receptiva envolve mais do que uma simples catalogação de conceitos acabados na estrutura cognitiva, Ausubel *et. al.* (1980):

Em primeiro lugar, exige-se no mínimo um juízo implícito de relevância no aumento de decidir que idéias (*sic*) estabelecidas na estrutura cognitiva são mais relacionáveis a uma nova tarefa de aprendizagem. Em segundo lugar, é necessário algum grau de concordância entre elas, particularmente se existem discrepâncias ou conflitos. Em terceiro lugar, as novas proposições são geralmente reformuladas, fundindo-se num esquema pessoal de referência compatível com o “background” experiencial, vocabulário e estrutura de idéias (*sic*). Finalmente, se o aluno, no curso da aprendizagem receptiva significativa, não encontrar uma base aceitável de harmonizar as idéias (*sic*) aparentemente ou genuinamente contraditórias, será inspirado algumas vezes a busca de um grau de síntese ou reorganização do seu conhecimento existente sob princípios explicativos mais amplos e abrangentes. (Ausubel *et.al.*, 1980, p.102)

Percebe-se um desafio para os professores a preparação dos materiais de ensino para desenvolver a Aprendizagem Significativa, exige muito esforço para organizar os conceitos que sejam harmônicos aos conhecimentos prévios dos estudantes. No primeiro momento da citação, destaca-se “ideias estabelecidas”, que se considera como os conhecimentos prévios. No segundo ressalta-se o “grau de concordância” dos conhecimentos prévios frente ao novo saber, e no terceiro as “novas proposições geralmente são reformuladas”, entende-se que se o grau de concordância for suficiente, então, as novas ideias ou conceitos são acomodados na estrutura cognitiva de maneira reformulada.

Concebe-se que o desenvolvimento das aulas nos preceitos da Aprendizagem Significativa exige um planejamento com materiais também com potencial significativo, considerando principalmente os conhecimentos prévios.

2.4.1 A forma da Aprendizagem Significativa Subordinada

Compreende-se que na Aprendizagem Significativa os novos conceitos são desenvolvidos a partir de conceitos já existentes. E assim, sempre que novas ideias forem sendo estabelecidas, servirão de “esteio” para ideias novas.

Para isso, foi detalhado um princípio dessa assimilação, usando a notação original de Ausubel *et. al.* (1980, p. 104). Na descrição dos estágios, a simbologia representativa no Quadro 9, onde, letras *a* (minúsculas), *a'* (minúsculas com apóstrofo), *A* (maiúscula) e *A'* (maiúscula



com apóstrofo) possuem significados representativos no âmbito da assimilação da aprendizagem significativa:

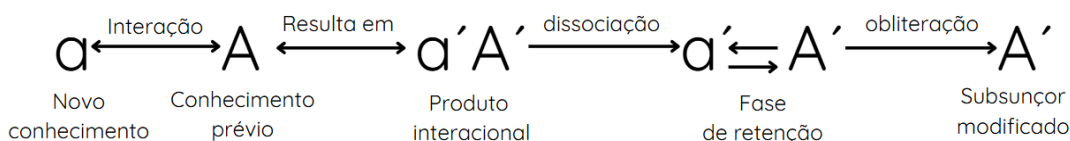
Quadro 9 - Símbolos para explicar a assimilação da Aprendizagem Significativa Subordinada

Símbolo representativo	Representação
<i>a</i>	representa uma ideia nova
<i>A</i>	uma ideia estabelecida ou “organizador prévio”
<i>a'</i>	ideia nova modificada
<i>A'</i>	ideia estabelecida modificada

Fonte: adaptado de Ausubel *et. al.* (1980, p.104)

Um esquema desse processo de assimilação foi desenvolvido por Moreira (2011), para melhor compreensão do método da dissociação subordinada, representados pelos símbolos do alfabeto as letras *a* e *A* e seus respectivos incrementos *a'* e *A'* (Figura 4):

Figura 4 - Esquema dos Significados denotativos e conotativos da aprendizagem significativa da forma subordinada



Fonte: adaptado de Moreira (2011, p. 99)

De acordo com o esquema, Moreira (2011) cria um percurso da interação do conhecimento novo com o conhecimento já existente, exemplificando o processo de assimilação da Aprendizagem Significativa Subordinada, de maneira que o novo conhecimento, interage mutuamente com o conhecimento existente, o qual resulta um produto interacional, que quanto mais este novo conhecimento se estabelece, dissocia-se dos que já conhecia, ou seja, os conhecimentos prévios se tornam parte do novo, um conhecimento modificado ou derivado.

Os estágios da aprendizagem significativa e memorização de uma ideia subordinada em relação à sua força dissociada percorre quatro estágios, veja esse processo de assimilação na aquisição, fixação e organização de conhecimento da Aprendizagem Significativa Receptiva Subordinada, conforme Quadro 10:



Quadro 10 - Estágios na aprendizagem e memorização de uma ideia subordinada em relação à sua força dissociada

I.	APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA OU AQUISIÇÃO DE SIGNIFICADO SUBORDINADO a'	Nova ideia Potencialmente Significativa a	Relacionada a e assimilada por	Ideia A Estabelecida na Estrutura Cognitiva	Produto Interacional $A'a'$
II.	APRENDIZAGEM POSTERIOR E RETENÇÃO INICIAL DO SIGNIFICADO a'	No significado a' é dissociável de $A'a'$	$A'a' \Leftrightarrow A' + a'$ (alta força dissociável)		
III.	RETENÇÃO POSTERIOR DO SIGNIFICADO a'	Perda gradativa da dissociação de a' a partir de $A'a'$	$A'a' \Leftrightarrow A' + a'$ (baixa força dissociável)		
IV.	ESQUECIMENTO DO SIGNIFICADO a'	a' não é mais dissociável eficazmente de $A'a'$	Dissociação de a' a partir de $A'a'$ está abaixo do limiar de disponibilidade a' é reduzida a A'		

Fonte: Adaptado de Ausubel *et. al.* (1980, p.105)

Usando essas notações, Ausubel *et. al.* (1980, p.104) afirmam que “quando uma nova ideia (a) é aprendida significativamente e relacionada à ideia relativamente estabelecida (A), tanto as ideias estabelecidas são modificadas, como (a) é assimilada pela ideia estabelecida (A)”. Neste sentido a nova ideia em fase de transformação como um produto de uma interação, representa-se pela notação ($A'a'$). O desenvolvimento das novas ideias, farão parte do arcabouço das ideias do estudante de forma associada a um conceito existente ou ainda na modificação deste conceito.

O Quadro 10, apresenta palavras chaves que não foram mencionadas durante a descrição do processo da Aprendizagem Significativa, neste sentido, para melhor compreensão do leitor, descreve-se os termos segundo o significado no âmbito da teoria:

- Dissociação: afastamento ou desligamento das ideias esteio (ancoradouros);
- Subordinado: conceitos generalizados e inclusivo que integrará ou irá derivar o novo conhecimento;
- Assimilada: processo pelo qual novos conhecimentos são integrados ou incorporados a estrutura cognitiva do estudante;
- Retenção: capacidade de manter e recuperar informações aprendidas ao longo do tempo;
- Esquecimento: a perda ou a dificuldade de recuperação de informações que foram previamente aprendidas e integradas a estrutura cognitiva do estudante;



f) Produto interacional: novo conhecimento incorporado ao existente ou modificado.

Seguindo para a descrição do processo de assimilação por Estágios na Aprendizagem e Memorização de uma Ideia Subordinada em Relação à sua Força Dissociada, no (Quadro 10), de forma geral, os estágios acontecem obedecendo uma ordem hierárquica.

No estágio I da aquisição do significado subordinado (a') observa-se que a nova ideia (a) irá transcorrer um caminho para associar-se a ideia estabelecida (A) os “organizadores prévios” no âmbito da interação entre ambas até se tornar um produto interacional ($A'a'$).

No estágio II, a retenção inicial de significado (a'), observa-se que a nova ideia (a) ainda obtém uma dissociação do produto interacional ($A'a'$), isto é, o organizador prévio (A) e a nova ideia (a) estão estabelecendo conexões, o produto desta interação contém uma alta força dissociável para alcançar ($A'a' \Leftrightarrow A' + a'$). A alta força dissociativa, refere-se à estrutura dessa nova ideia ser diferenciada da aprendizagem que a ancora, configurando dessa forma a retenção inicial de significado.

A retenção inicial de significado na aprendizagem significativa subordinada é o processo, que se refere à capacidade do estudante de compreender e reter novas informações logo após serem aprendidas. No entanto, para que essa retenção seja eficaz, a ideia nova (a) deve ser incorporada de maneira significativa ao conhecimento pré-existente do estudante. Observa-se que este estágio corrobora com a essência da Aprendizagem Significativa, pois acontece de modo que o estudante não apenas memoriza a ideia nova, mas a entende e pode relacioná-la com o que já sabe.

O estágio III, trata da retenção posterior do significado de (a') e ao conceito da perda gradativa da dissociação de nova ideia sofrendo modificações (a') a partir de ($A'a'$). A perda gradativa da dissociação da ideia sofrendo modificações (a') a partir da interação desta com os organizadores prévios também sofrendo modificações, vão se agrupando de forma que institui baixa força dissociável, para gerar o produto interacional ($A'a'$). Logo, com o tempo, a distinção entre a ideia nova (a) e o conhecimento prévio (A) começa a diminuir. Porém, não significa que a ideia nova (a) é perdida, mas que ela se torna tão integrada ao conhecimento prévio que a distinção inicial entre “novo” e “prévio” se torna menos evidente.

Neste sentido, a retenção posterior do significado está diretamente relacionada à maneira como o conhecimento recém-adquirido é mantido e acessado ao longo do tempo, após a fase inicial de aprendizagem. À medida que a dissociação entre o novo e o prévio diminui, o estudante vai se tornando capaz de formar uma compreensão mais unificada do assunto. Isso facilita tanto a recuperação do conhecimento, quanto a aplicação desse conhecimento em novos contextos.



O último estágio IV, o esquecimento do significado de (*a'*), se refere ao processo pelo qual o conhecimento previamente aprendido de forma significativa começa a se perder ou a se tornar menos acessível na memória do indivíduo, ou seja, esse novo conhecimento que era novo, após este processo se transforma em um novo organizador prévio (*A'*). Porém, não significa necessariamente que a informação foi completamente perdida, mas que sua recuperação se torna mais difícil ou que a clareza do conhecimento diminuiu.

Para compreender o esquecimento do significado de (*a'*) não significa a perda da memória, mas se a ideia nova foi aprendida de forma significativa, temos que de acordo com a Teoria da Aprendizagem Significativa esse conhecimento pode ser recuperado ou reaprendido com mais facilidade do que o conhecimento adquirido de forma mecânica ou superficial. Isso acontece porque o conhecimento significativo tem muitas “âncoras”, tornando sua recuperação mais viável mesmo após um período de esquecimento.

2.4.3 A forma da Aprendizagem Significativa Superordenada

A aprendizagem significativa superordenada segundo Ausubel *et. al.* (1980, p.49), “ocorre no curso de raciocínio ou quando o material apresentado é organizado indutivamente ou envolve a síntese de idéias (sic) compostas”. Aqui diferente da aprendizagem subordinada, a superordenada exige que os conhecimentos prévios sejam mais complexos, ou seja, não parte de apenas um conceito sobre um objeto, mas de conceitos amplos sobre determinado assunto.

Na descrição de Moreira (2011b, p. 37) a aprendizagem superordenada “envolve, então, processos de abstração, indução, síntese, que levam a novos conhecimentos que passam a subordinar aqueles que lhes deram origem”.

Na citação de Moreira, observa-se que aparecem os modelos de conceitos de cunho abstratos, que sejam indutivos e componham síntese, esses elementos requerem a composição de uma estrutura cognitiva mais robusta para aprender novos conceitos. A dissociação, portanto, pode ser vista como um aspecto da reestruturação cognitiva, onde o estudante precisa desfazer e reconstruir conexões para acomodar novas compreensões.

Na Aprendizagem Significativa Superordenada, os símbolos serão interpretados com significados inversos ao da subordinada. Assim tecemos a descrição dos estágios na aprendizagem e memorização de uma ideia superordenada em relação à dissociação, utilizando a mesma notação original de Ausubel *et. al.* (1980), no Quadro 11:



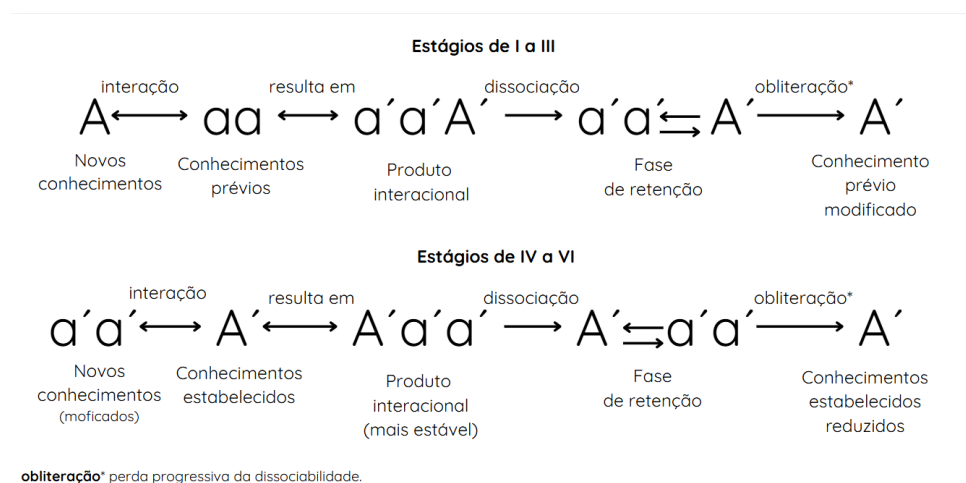
Quadro 11 - Símbolos para explicar a assimilação da Aprendizagem Significativa Superordenada

Símbolo representativo	Representação
a	ideias estabelecidas (organizadores prévios)
A	ideias novas (conhecimentos novos)
a'	ideias estabelecidas modificadas
A'	ideias novas modificadas

Fonte: adaptado de Ausubel *et. al.* (1980, p.104)

Veja, o esquema adaptado da referência de Moreira (2011), para melhor compreensão do método da dissociação da Aprendizagem Significativa na forma superordenada na Figura 5:

Figura 5 - Esquema dos significados denotativos e conotativos da Aprendizagem Significativa da forma superordenada



Fonte: adaptado de Moreira (2011, p. 99) e Ausubel *et. al.* (1980, p.104)

No processo de assimilação, destacamos que a notação simbólica para alcançar a aprendizagem significativa superordenada, inicia do conceito geral (A), e os conceitos prévios são conceitos particulares aa e o seu produto interacional será ($a'a'A'$), a sequência das ideias estabelecidas modificadas ($a'a'$) no produto interacional até o estágio III, representa os conceitos (proposições, ideias, modelos, mapas, etc.) gerando o conhecimento modificado (A'), mas antes na fase da retenção este conceito é fortalecido com os conhecimentos particulares, para sua posterior dissociabilidade ou obliteração.

Nos estágios IV ao VI, temos o produto interacional ($A'a'a'$) uma estrutura reorganizada para a acomodação do novo conhecimento. O processo inicia com a sequência das ideias estabelecidas modificadas ($a'a'$) e interage com (A') resultado do estágio III, a dissociação ocorre do conceito geral para os particulares tornando o conceito geral mais estável. A fase da



retenção gera a obliteração do conceito geral dissociado (A'), mesmo que o conceito dissociado tenha a mesma simbologia (A') do estágio III, que ao perpassar pelos estágios IV ao VI, ganha mais estrutura de conhecimento estabelecido reduzido.

O processo de assimilação do método da dissociação superordenada, os estágios da Aprendizagem Significativa e a memorização de uma ideia em relação à dissociação, que percorrem seis estágios estão organizados no Quadro 12:

Quadro 12 - Estágios na Aprendizagem e Memorização de uma Ideia Superordenada em Relação à Dissociação

I	APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA OU AQUISIÇÃO DO SIGNIFICADO SOBREORDENADO A'	Nova, Ideia Potencialmente Significativa A	Relacionada a e assimilada por	Ideias estabelecidas a e a	Produto Interacional $a' a' A'$
II	APRENDIZAGEM POSTERIOR E RETENÇÃO INICIAL DE A'	Novo significado A' é dissociável a partir de $a'a'A'$	$a' a' A \leftrightarrow a' + a' + A'$		
III	ESQUECIMENTO DE A'	A' não é mais eficazmente dissociável a partir de $a'a'A'$	A' é reduzida a $a' + a'$		
IV	DIFERENCIAÇÃO POSTERIOR DE A'	a' e a'	Subordinada a	Ideia A' estabelecida e Mais Estável	Produto Interacional $A'a'a'$
V	RETENÇÃO POSTERIOR DE a' e a'	a' e a' são dissociáveis de $A'a'a'$	$A' a' a' \leftrightarrow A' + a' + a'$		
VI	ESQUECIMENTO DE a' e a'	a' e a' não são mais dissociáveis eficazmente de $A'a'a'$	a' e a' são reduzidas a A'		

Fonte: Ausubel *et. al.* (1980, p.105)

Para melhor compreensão do desenvolvimento dos estágios da aprendizagem e memorização de uma ideia superordenada em relação à dissociação no Quadro 12, volte aos símbolos na Figura 5, que explicam a assimilação.

O estágio I, aprendizagem significativa ou aquisição do significado sobreordenado A' a nova ideia é representada por (A) e as ideias estabelecidas ($a a$) para gerar o produto interacional ($a' a' A'$) e o conhecimento estável (A'). No estágio II, aprendizagem posterior e retenção inicial de (A') ocorre quando a interação acontece a partir da dissociação dos conhecimentos prévios modificados e os conhecimentos novos ($a' + a' + A$) entrando em equilíbrio pela modificação inclusiva ($a' + a' + A'$). Seguimos para o estágio III, o esquecimento de (A'). Neste estágio, considera-se que o novo conhecimento modificado (A'), está mais



associado ao produto final, de modo que, as ideias estabelecidas modificadas (a' a') estão se unificando ao novo conhecimento modificado (A') e integrado a nova estrutura cognitiva.

Até o estágio III, com a integração do conhecimento a estrutura cognitiva do estudante, novas ideias serão produzidas, isso sugere uma reformulação ou expansão do novo conhecimento, em resposta à sua interação com o que o estudante já sabia. Destaca-se que a aprendizagem significativa superordenada é uma forma de aprendizagem na qual o novo conhecimento (A) é tão abrangente ou avançado que reestrutura ou expande significativamente o conhecimento prévio (a) do estudante, levando a uma nova forma de compreensão (a' e A').

Os estágios IV, V e VI, modificam o primeiro produto interativo o produto interacional na ordem ($A' a' a'$), nesses estágios o estudante começa a conectar as representações simbólicas aos conceitos mais complexos. Atribui-se de fato a iniciar a aprendizagem superordenada, onde essas ideias causam novas informações e o conhecimento pré-existente de uma maneira que transcende a simples memorização ou aprendizagem por repetição.

Portanto, o estágio IV, inicia um processo de reorganização das ideias estabelecidas com os novos conceitos assimilados, levando ao fortalecimento do produto interacional ($A' a' a'$). Bem como no estágio V, a retenção posterior de ($a' a'$) vão se tornando dissociáveis e se equilibrando na interação de inclusão. E por fim o estágio VI, o esquecimento de ($a' a'$), que traz as ideias estabelecidas modificadas com baixa dissociabilidade do conhecimento novo modificado (A') então, temos que as ideias estabelecidas ($a' a'$) integradas ao novo conhecimento ($A' + a' + a'$) se reduzem a uma nova ideia composta que compõe a nova estrutura cognitiva do estudante, que deverá ser capaz de abstrair e generalizar a partir de representações específicas, compreendendo-se que, neste estágio, se aprendeu de forma significativa.

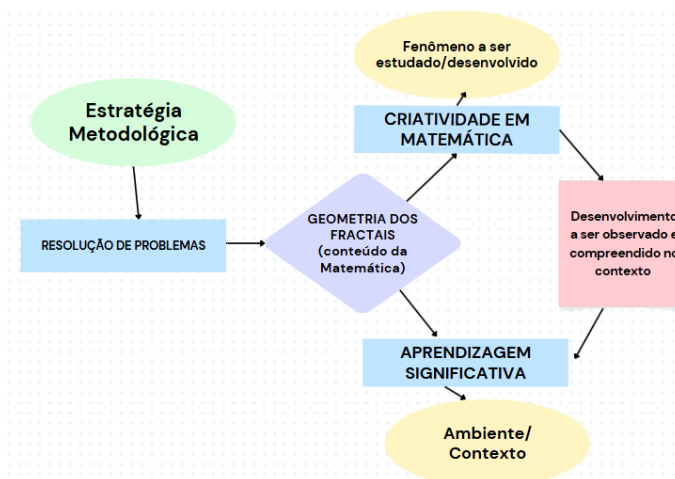


CAPÍTULO 3 – A CRIATIVIDADE EM MATEMÁTICA NA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

O capítulo está organizado em quatro tópicos que abordam a Criatividade em Matemática, os organizadores prévios para o ensino de Geometria dos Fractais na Aprendizagem Significativa Subordinada. O modelo para o ensino de Geometria dos Fractais na Aprendizagem Significativa Subordinada. E o esquema do ensino de Geometria dos Fractais para Aprendizagem Significativa Sobreordenada.

Iniciamos com um esquema geral deste capítulo com a estrutura da estratégia metodológica:

Figura 6 - Esquema da estratégia metodológica da Resolução de Problemas



Fonte: autora (2025)

Se inicia com a Resolução de Problemas, considerada a estratégia principal que impulsiona todo o processo. Essa estratégia se aplica no ensino da Geometria dos Fractais, que representa o conteúdo matemático específico na qual a abordagem será implementada. A combinação desses dois elementos: Resolução de Problemas e Geometria dos Fractais, definem o “como” e o “onde” ocorre a intervenção ou as primeiras observações.

Em seguida, destaca-se a Criatividade em Matemática, fenômeno central que se busca compreender, sendo este o foco da investigação e diretamente influenciado pelo processo anterior. E, tudo acontece no contexto da Aprendizagem Significativa, que funciona como o “ambiente ou estado” organizado para o desenvolvimento da Criatividade em Matemática.



3.1 A Criatividade em Matemática

No século XXI, o mundo do trabalho vem valorizando a criatividade das pessoas como potencial econômico e social. Nesse sentido, Gontijo *et. al* (2019, p. 14) afirma que “a criatividade tem despertado o interesse de pesquisadores, empresários, professores, neurocientistas, psicólogos e da sociedade em geral”. Observa-se nesta citação que os estudos e pesquisas para saber como acontece o desenvolvimento do potencial criativo, com intenção de agregar valor e a captação de capital intelectual, tem se tornado objeto de pesquisa e de investimento.

A criatividade apresenta várias concepções conceituais. Gontijo *et. al* (2019), afirma que, no contexto sistêmico alguns autores começaram a organizar epistemologicamente as concepções sobre a criatividade, e apresenta três modelos teóricos, reconhecidos como modelos sistêmicos, que vem se destacando em coexistência:

1. O modelo componencial de criatividade, idealizado nos estudos de Teresa Amabile (1983);
2. A perspectiva de sistemas, apresentada pelo psicólogo croata Csikszentmihalyi (1988); e
3. A teoria do investimento, por Sternberg e Lubart (1991). (Gontijo, *et. al*, 2019, p. 26)

Dos modelos mencionados, o que mais se aproxima com o contexto da sala de aula é o modelo de “perspectiva de sistemas”. Por ser um modelo em que o ser humano desenvolve a criatividade em ambiente sociocultural, juntamente com a sua história de vida interagindo com este meio. A proposta foi desenvolvida por Csikszentmihalyi (1988), cujo modelo une três forças que se desenvolvem por uma interação dialética:

1. O campo: Conjunto de instituições sociais que selecionam, dentre as produções humanas, aquelas que valem a pena ser preservadas;
2. O domínio cultural: que irá preservar e transmitir as novas ideias ou produções selecionadas para as gerações seguintes;
3. O indivíduo: que produz as mudanças no domínio e no campo através da sua ação criativa. (Gontijo, *et. al*, 2019, p. 34).

Então, os termos campo, domínio cultural e indivíduo são considerados como unidades de sistemas, que para promover a criatividade deverão manter uma inter-relação integrada entre si. Na pesquisa em sala de aula será considerada o ambiente onde deverá acontecer a inter-relação da proposta de intervenção.

De maneira geral, são encontradas várias concepções em diversos campos, sobre o conceito da criatividade, então, concluiu-se que não existe uma única definição. Sternberg (2010, p. 420) reflete que “pode haver tantas definições específicas de criatividade quanto o número de pessoas que pensam sobre criatividade”, mas em termos globais, define a



criatividade unindo as suas concepções que “a criatividade é um processo de produzir algo que seja original e válido ao mesmo tempo”.

Abordar a criatividade na concepção de Gontijo (2007) não é algo simplório, tendo em vista concepções cognitivas, culturais e sociais envolvidas. Gontijo (2007), busca referenciar a Criatividade em Matemática voltada para o ambiente escolar fazendo vínculo com a Resolução de Problemas.

A sala de aula é considerada pelo autor como um lugar privilegiado para o trabalho pedagógico, devido é claro por ser um dos principais espaços de vivências e de socialização de crianças, adolescentes e jovens. E mesmo que seja um local de trabalho para os docentes, não deixa de ser um espaço de múltiplas interações entre os profissionais. Com este olhar, a sala de aula é um lugar que favorece o desenvolvimento da criatividade das pessoas envolvidas nesse contexto.

Observando as citações de Gontijo e Sternberg, temos que, a criatividade é algo complexo de definir. Mas o que se observa de maneira geral é que a criatividade vem se tornando indispensável frente aos desafios sociais, econômicos e tecnológicos emergentes no século XXI, a saber o enfrentamento a Pandemia desencadeada pela Covid-19, cientistas de múltiplas áreas do conhecimento, imergiram por buscas de soluções tecnológicas e porque não dizer também “criativas” para conter o óbito humano e manter o distanciamento social, sem que o trabalho essencial físico e o remoto, desestabilizassem o desenvolvimento econômico dos países.

Embora, os seres humanos sejam considerados criativos desde a sua existência, nossa investigação busca uma referência no Século XIX, como registro ilustrativo sobre a criatividade, iniciado por Poincaré o primeiro a realizar pesquisas sobre o desenvolvimento das habilidades criativas, como forma de promover condições para soluções inovadoras de problemas que impactam tanto na vida pessoal quanto na vida social.

Jules-Henri Poincaré (1854-1912), honrado cientista francês, extremamente atuante nas áreas da física, mecânica, engenharia, eletricidade e matemática, publicou mais de quinhentos trabalhos nessas áreas de conhecimento. E foi um dos primeiros a lançar questões ainda em sua época que anteciparam aspectos centrais do programa da ciência do século XX. Em sua obra “O valor da ciência”, Poincaré indaga o papel da lógica, o conceito de realidade, a interação das ciências, o espaço e suas três dimensões, entre outras que até o presente vem sendo estudadas.

Hadamard (2009, p. 26) afirma que Poincaré foi o primeiro a apresentar ideias mais esclarecedoras das relações entre “o consciente e o inconsciente, entre o lógico e o fortuito, relações que estão na base do problema”. As ideias de Poincaré vem desmistificar a criatividade



como dom divino, místico ou superior, é claro que existem comprovações científicas de pessoas diagnosticadas com altas habilidades ou superdotação. No entanto, de modo geral, a criatividade pode ser desenvolvida, no caso da resolução de problemas, quanto mais intensos ou mesmo exaustivos forem a busca da solução.

Gontijo (2019, p. 37) também baseado nas concepções de Poincaré, afirma que “o trabalho consciente é a base sem a qual o trabalho inconsciente não seria possível”, ou seja, os trabalhos conscientes são essenciais para a origem da resolução de problemas. Que requer exaustivos estudos sobre o tema ou problema em questão.

Na segunda parte desta citação de Gontijo sobre as concepções de Poincaré que menciona o “trabalho inconsciente”, trata-se de uma abordagem vivenciada pelo próprio Poincaré quanto ao estudo sobre os *insights*³, e as experiências que descreve o *insight* como o ápice da criatividade.

Como já mencionamos, a criatividade é um termo complexo de se conceituar, bem como a Criatividade em Matemática, segundo Gontijo *et. al.* (2019), apresenta várias abordagens. Em estudos mais recentes, que trazem os principais conceitos de Criatividade em Matemática de autores com amplo período de pesquisas, onde aborda tipos de habilidades, produto, produção de material gráfico, estágios de processos criativos, resolução de problemas, dedução de novos métodos e fórmulas, entre outras observações e técnicas em relação ao estudo da criatividade matemática.

Após estudos voltados para o tema, Gontijo (2007, p. 37) conceituou a Criatividade em Matemática como “a capacidade de apresentar inúmeras possibilidades de soluções apropriadas para uma situação-problema, de modo que estas focalizem aspectos distintos do problema e/ou formas diferenciadas de solucioná-lo, especialmente formas incomuns”.

A Criatividade em Matemática provém de um processo que gera um novo conhecimento sobre algo, ou seja, os conhecimentos já existentes ou conhecidos pela pessoa que apresenta a solução nova. Vejamos no Quadro 9, o processo em quatro estágios da criatividade, elaborado pelo psicólogo Graham Wallas⁴, e que foi descrito por Hadamard (1954) para desenvolver a Criatividade em Matemática:

³ Usualmente o *insight* é definido como a súbita percepção de relações entre elementos de uma situação problemática (Lefrançois, p.142, apud. Moreira, 2011a, p. 45)

⁴ Graham Wallas (1858 - 1932) foi um socialista inglês, psicólogo social, educador, um ícone dos primeiros modelos dos processos criativos.



Quadro 13 - Modelo do processo criativo em matemática descrito por Hadamard (1954)

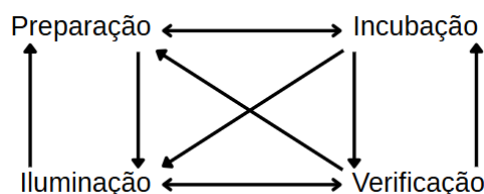
Etapas	Descrição
<i>Preparação</i>	Estágio do processo por atividades em estado predominantemente consciente, seja no âmbito prático ou mental. Sendo necessário a preparação do campo intelectual para promover condições que sejam favoráveis a próxima fase.
<i>Incubação</i>	Estágio em que geralmente são exauridas as atividades conscientes, logo, ela se estabelece de forma inconsciente no Sistema Nervoso Central, enquanto a mente está focada em outras atividades mentais.
<i>Iluminação</i>	Estágio do surgimento de uma ideia espontânea em estado consciente que levam a resolução de um problema, que também é conhecida pelos termos “eureca” ou <i>insight</i> .
<i>Verificação</i>	Estágio que compõe a organização das ideias criativas obtidas na fase anterior. Destaca-se pela concretização da ideia, teste e validação.

Fonte: Gontijo *et. al* (2019, p. 41-42)

Quadro 13, delinea etapas sequenciais: Preparação, Incubação, Iluminação e Verificação. Contudo, na prática, especialmente em domínios complexos como a Matemática, serão considerados em uma estrutura “dinâmica não estritamente linear”, onde os estágios podem se influenciar mutuamente e elementos de um estágio podem, de certa forma, “compôr” ou retroalimentar outros.

Descrevemos algumas relações interativas (setas de direcionamento) na Figura 8, com o objetivo de contribuir para melhor compreensão das ocorrências no processo do desenvolvimento dos estágios da Criatividade em Matemática.

Figura 7 – Dinâmica de interação dos estágios da Criatividade em Matemática



Fonte: autora (2025)

A Figura 7, representa os quatro estágios do processo criativo: preparação, incubação, iluminação e verificação. Estão organizados em uma estrutura que evidencia a interconectividade dinâmica entre eles. As setas bidirecionais indicam que o processo criativo não segue uma sequência rígida e linear, mas sim um movimento flexível, em que cada estágio pode influenciar e ser influenciado pelos demais. Essa configuração reforça a ideia de que a



Criatividade em Matemática, envolve ciclos de avanço e retorno, onde é possível retomar fases anteriores diante de novos dados, falhas percebidas ou reinterpretações de ideias.

As ligações diagonais na Figura 7, acrescentam um nível extra de complexidade ao processo, ao sugerirem que há relações diretas entre estágios não adjacentes. Por exemplo, a preparação pode conduzir diretamente à iluminação, sem passar necessariamente por uma incubação prolongada, quando o *insight* surge de forma repentina. Da mesma forma, a verificação pode motivar nova incubação ao expor lacunas ou impasses ainda não resolvidos. Assim, o esquema reflete de forma coerente o caráter iterativo, adaptativo e multidirecional da criatividade, onde a produção de ideias se constrói por camadas, revisões e reinterpretações contínuas.

Como incremento, da descrição dos estágios da Criatividade em Matemática, utilizou-se colaboração de inteligência artificial para refinar o texto do processo criativo, a partir do Quadro 13 e esquema da Figura 7.

A fase de preparação estabelece as bases do processo criativo, conectando-se diretamente com os estágios seguintes: incubação e iluminação. Durante a preparação, realiza-se um trabalho consciente de compreensão do problema, por meio da análise inicial, da tentativa de aplicar soluções conhecidas e da articulação com conhecimentos prévios. Esse esforço fornece o material intelectual necessário para que a memória inconsciente atue na fase de incubação. Ou seja, a preparação estrutura o sistema cognitivo, permitindo que o inconsciente processe as informações de forma produtiva. Sem essa etapa inicial, a incubação careceria de conteúdo a ser elaborado, tornando-se ineficaz.

O estágio da incubação dá continuidade ao processo iniciado na preparação, permitindo que a mente trabalhe no problema de forma inconsciente, livre das restrições do pensamento racional. Durante esse período, as informações previamente reunidas são reorganizadas e combinadas de novas maneiras, preparando o terreno para o surgimento repentino de uma solução. Assim, a incubação estabelece as condições cognitivas para o estágio seguinte: a iluminação (ou *insight*).

O estágio da iluminação marca o momento em que uma ideia nova surge de forma espontânea, frequentemente percebida como um *insight* repentino. Essa ideia pode assumir a forma de uma hipótese, uma possível solução ou uma nova perspectiva sobre o problema. É esse material inicial que será posteriormente refinado, testado e validado no estágio de verificação. Sem a ocorrência do *insight*, não haveria objeto claro para análise ou desenvolvimento. Assim, a iluminação fornece o ponto de partida essencial para que o trabalho consciente seja retomado de forma produtiva.



A verificação, embora vista como o estágio final reúne todos os elementos dos estágios anteriores, os resultados da verificação sejam na validação total, na necessidade de ajuste, na identificação de falhas ou a na percepção de novos problemas decorrentes da solução inicial, retroalimentam o processo. O *feedback* e as conclusões da verificação compõem o ponto de partida e os novos requisitos para uma fase de preparação subsequente. A verificação, ao revelar a necessidade de ajustes ou novas direções, prepara o percurso para um replanejamento e uma nova preparação, reiniciando em um nível mais avançado.

Portanto, embora as etapas sejam descritas sequencialmente, a dinâmica criativa em Matemática envolve uma contínua interação onde a conclusão de um estágio fornece “material intelectual” para o desenvolvimento de outros estágios, e os resultados impulsionam novos ciclos de investigação e aprimoramento, o que o torna em processo ativo.

Os estudos sobre a Criatividade em Matemática na sala de aula ainda são pouco explorados no Brasil em relação ao volume de trabalhos sobre a Resolução de Problemas, o que prevalece é um campo de pesquisa com possibilidades de novas descobertas para o ensino e aprendizagem da Matemática. Sendo essa carência, uma motivação para contribuir com esse campo de estudo.

No âmbito da Criatividade em Matemática, não podemos deixar de observar aspectos relacionados a habilidades cognitivas do pensamento criativo, elaboradas por Joy Paul Guilford (1897 –1987), nos anos de 1967 e 1979 referenciadas por Alencar (1988), conforme mostra o Quadro 14:

Quadro 14 - Habilidade Cognitiva do Pensamento Criativo de Guilford (1967)

Habilidade	Descrição
<i>Fluência</i>	Especialmente fluência ideacional, que denota a habilidade de gerar quantidades de ideias e respostas a situações problemas e fluência associativa, que é a <i>habilidade de produzir muitas relações ou associações significativas</i> a uma dada ideia.
<i>Flexibilidade</i>	Implica na produção de mudanças na direção do pensamento para resolver problemas. <i>Capacidade de alterar o pensamento</i> ou conceber diferentes categorias de respostas.
<i>Originalidade</i>	Apresentação de <i>respostas raras e incomuns</i> .
<i>Elaboração</i>	Consiste na facilidade de em acrescentar uma variedade de detalhes a uma informação, produto ou esquema, tendo seu papel nas produções criativas que progridem de um tema ou esboço vago até uma estrutura ou sistema organizado.

Fonte: Alencar (1988, p. 29-30)



Do mesmo modo, a partir das citações de Alencar (1988), tecemos nossas contribuições em relação as habilidades cognitivas do pensamento criativo, com objetivo de compreender as características e formas que acontecem na Criatividade em Matemática.

A partir da conceituação Guilford (1967) no Quadro 14, o detalhamento das habilidades criativas discutidas nos parágrafos seguintes: fluência, flexibilidade, originalidade e elaboração, foi construído com o suporte de uma ferramenta de inteligência artificial. Esta colaboração foi fundamental para a construção de descrições com exemplos icônicos como a Curva de Koch e o Triângulo de Sierpinski, incluindo o conceito da Geometria Fractal, com o objetivo de traduzir esses conceitos complexos em uma forma mais acessível e alinhada ao escopo do presente estudo.

A fluência se desdobra em duas vertentes principais: fluência ideacional e fluência associativa. A fluência ideacional refere-se à capacidade de gerar múltiplas ideias, hipóteses ou abordagens distintas na resolução de um problema, no caso deste estudo, no campo da Geometria Fractal. Não se trata da qualidade inicial, mas da quantidade de possibilidades levantadas. Por exemplo, um estudante ou matemático com alta fluência ideacional poderia propor várias maneiras de iniciar a construção de um fractal, como usar um Sistema de Funções Iteradas (IFS) com diferentes transformações, ou aplicar regras de substituição recursiva em um gerador inicial, similar à forma como a Curva de Koch ou o Triângulo de Sierpinski são construídos. E, seria capaz de listar diversos métodos para calcular a dimensão fractal de uma forma ou enumerar variadas aplicações possíveis para um determinado padrão auto-similar.

A fluência associativa, demonstra a facilidade para conectar uma ideia central ou um problema na Geometria Fractal, para entender como um padrão complexo se forma, criar uma nova forma fractal ou buscar uma regra de geração, com uma ampla gama de conceitos, definições e exemplos.

Tecemos um exemplo dessa fluência na Geometria Fractal, ao analisar a emergência de uma estrutura complexa, a fluência associativa permitiria ligar a ideia central à regra de construção recursiva da Curva de Koch, onde um segmento de linha é repetidamente substituído por um padrão menor, aumentando o perímetro infinitamente ou à forma como o Triângulo de Sierpinski emerge da remoção iterativa de triângulos centrais, diminuindo a área para zero enquanto mantém uma complexidade infinita.

Essa capacidade leva a associações com conceitos como a iteração, o processo de repetição que os gera, a autossimilaridade que é a propriedade de parecerem os mesmos em diferentes escalas e a ideia de dimensão fractal, que os caracteriza além das dimensões inteiras. Embora esses elementos possam não parecer diretamente relacionados à primeira vista com um



novo problema, a fluência associativa permite que, através de conexões significativas com esses exemplos fundamentais e seus princípios, novos caminhos se abram para a compreensão, a modelagem ou a solução de problemas específicos no domínio dos fractais.

Na Geometria Fractal, a flexibilidade reflete a habilidade de abandonar um raciocínio improdutivo e buscar novas abordagens ao lidar com a complexidade de formas auto similares. Isso se traduz na capacidade de mudar a estratégia de geração ou análise, como, por exemplo, migrar de uma abordagem puramente geométrica de construção recursiva, como a remoção de triângulos centrais para formar o Triângulo de Sierpinski, para o uso de Sistemas de Funções Iteradas (IFS), que aplicam transformações a pontos no espaço para gerar o mesmo fractal.

Ou ainda, alterar a representação do problema, passando de uma formulação descritiva da regra de substituição da Curva de Koch para um código computacional que a desenha iterativamente. Além disso, implica em retroalimentar o problema, reavaliando-o sob diferentes ângulos, questionando premissas de como a área de um objeto deve ser finita, como exemplo, quando a área do Triângulo de Sierpinski tende a zero ou uma linha tem dimensão 1, quando a Curva de Koch tem dimensão fractal maior que 1, e reformulando a pergunta para descobrir conexões inesperadas, sem se limitar a um único modo de pensar sobre a natureza ou a construção dessas estruturas.

A originalidade na Geometria Fractal está ligada à produção de respostas, soluções ou métodos que são incomuns, raros ou estatisticamente infrequentes dentro de um determinado contexto ou grupo. Não se refere apenas a criar algo do zero, mas a propor algo que se destaca por sua novidade ou singularidade em relação às soluções mais óbvias ou convencionais.

Pode ser identificada, por exemplo, na concepção de uma nova maneira de gerar uma forma fractal conhecida, talvez propondo uma regra de iteração que, embora resulte na Curva de Koch ou no Triângulo de Sierpinski, utilize um processo de construção radicalmente diferente ou mais elegante do que os métodos tradicionais de substituição.

Outro exemplo de originalidade seria a formulação de um novo problema interessante a partir da exploração de um conceito existente, como investigar as propriedades de uma versão tridimensional incomum da Curva de Koch, ou analisar como a dimensão fractal do Triângulo de Sierpinski se altera sob perturbações mínimas em suas regras de geração. Além disso, a originalidade se manifesta na criação de novas técnicas ou algoritmos para resolver uma classe de problemas, como desenvolver um método mais eficiente para calcular a dimensão fractal de estruturas complexas ou uma nova abordagem para visualizar as infinitas iterações de um fractal de maneira interativa. Em essência, é a capacidade de ir além do que é esperado e trazer uma perspectiva nova e única para o estudo e a aplicação dos fractais.



Considerando que a elaboração é uma habilidade cognitiva do pensamento criativo, na Geometria Fractal ela pode se manifestar como a capacidade de desenvolver e refinar uma ideia inicial. Muitas vezes um *insight* sobre um padrão de autossimilaridade ou um sistema dinâmico complexo, transformando essa ideia em uma estrutura completa, detalhada e coerente.

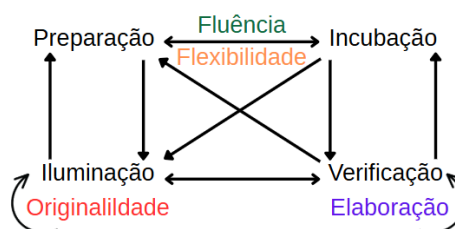
Isso implica em converter uma intuição sobre uma regra de geração fractal em um conjunto de iterações e algoritmos precisos que permitem a sua construção; detalhar a definição de um fractal, especificando seus parâmetros como: a dimensão fractal, a constante de uma função iterativa ou o fator de escala e as condições que governam sua formação. E expandir esboços iniciais para explorar as variações do fractal, analisar seu comportamento em diferentes escalas ou condições e apresentar visualizações complexas de forma clara e organizada.

Essencialmente, é o processo de transitar da intuição inicial o “eureca” da forma complexa para um produto matemático finalizado e comunicável, um fractal gerado e compreendido, preenchendo as lacunas e construindo a conexão entre a intuição visual/conceitual e a formalidade matemática.

À luz da teoria, enquanto os estágios da Criatividade em Matemática descrevem as fases macro do processo, as habilidades cognitivas detalham os mecanismos cognitivos subjacentes que operam dentro e entre essas fases. A fluência e a flexibilidade são particularmente ativas nas fases de preparação e incubação, gerando e explorando possibilidades. A originalidade pode se manifestar com mais frequência na iluminação (*insight*) não convencional. E a elaboração é fundamental na verificação do desenvolvimento e formalização da ideia original.

Para ilustrar, apresentamos o incremento dos Estágios da Criatividade em Matemática Figura 7, e das habilidades criativas na Figura 8, com a hipótese de algumas ocorrências, ressalta-se que ilustração é meramente para uma composição de estratégia de interação, não suprimindo suas potencialidades em múltiplas combinações:

Figura 8 – Dinâmica de interação dos estágios e das habilidades cognitivas na Criatividade em Matemática



Fonte: autora (2025)



A Figura 8, exibe um esquema de um processo dinâmico e não linear, onde quatro estágios principais: preparação, incubação, iluminação e verificação, possam interagir continuamente. A fluência, caracterizada pela geração de múltiplas ideias, facilita a transição da preparação para a incubação, enquanto a flexibilidade, atua na capacidade de mudar de perspectiva, como um elo crucial nas conexões cruzadas entre preparação e verificação, e entre incubação e iluminação.

A originalidade da solução, tipicamente pode surgir com mais frequência no estágio de iluminação, o momento do *insight*, e a elaboração, que envolve o detalhamento e refinamento da ideia, pode apresentar maior predominância na verificação. As setas bidirecionais e os ciclos entre os estágios indicam um fluxo iterativo, permitindo que o processo criativo revise e refine conceitos a qualquer momento, transcendendo uma sequência rígida para otimizar o desenvolvimento de soluções.

As habilidades do pensamento criativo serão observadas nesta pesquisa, para compreender o desenvolvimento da Criatividade em Matemática nos problemas de Geometria Fractal, com futuros professores de Matemática do curso de Licenciatura em Matemática do IFRR *campus* Boa Vista.

Alencar (1988) sugere a preparação de um ambiente criativo em sala de aula:

1. dar chances ao aluno para levantar questões, elaborar e testar hipóteses, discordar, propor interpretações alternativas, avaliar criticamente os fatos, conceitos, princípios, ideias. Além disso, o professor deve ter uma atitude de respeito pelas questões levantadas, independentemente de serem elas banais e irrelevantes ou “inteligentes” e bem-formuladas.
2. Dar tempo ao aluno para pensar e desenvolver as suas ideias criativas, pois nem toda ideia mais criativa ocorre imediata e espontaneamente.
3. Cria um ambiente de respeito e aceitação mútuas, onde os alunos possam compartilhar, desenvolver e aprender tanto uns com os outros e com o professor, como também independente.
4. Estimular no aluno a habilidade de explorar consequências para acontecimentos imaginários e para outros que já ocorreram no passado ou poderão ocorrer no futuro (Alencar, 1988, p. 54)

A autora, idealiza um ambiente educacional semelhantemente propício à Aprendizagem Significativa, onde a criatividade e o pensamento crítico dos estudantes podem ser estimulados. Isso pode se concretizar quando o professor incentiva a formulação de perguntas, o teste de hipóteses e a proposição de interpretações diversas, ao mesmo tempo em que valoriza o tempo de reflexão de cada um. Tal postura facilita que os estudantes conectem novas informações aos seus conhecimentos prévios, tornando o aprendizado mais relevante.



3.2 Organizadores prévios para o ensino de Geometria dos Fractais na Aprendizagem Significativa Subordinada

Apresenta-se a Aprendizagem Significativa Receptiva como estratégia para o processo de ensino de um conceito inicial de Geometria Fractal e o desenvolvimento da Criatividade em Matemática, esta estratégia apresenta uma espécie de harmonia em ambos os caminhos de construção das ideias.

Fractais segundo Pimentel e Urban (2003, p. 17) são “formas geométricas elementares, cujo padrão podem repetir-se indefinidamente gerando figuras complexas”. Historicamente o termo denominado Fractais é considerado recente, o nome ficou conhecido em 1967 após a publicação do trabalho do matemático Benoit Mandelbrot, originado do verbo latino *frangere* que significa fragmento, de onde se deriva do adjetivo *fractus* que representa uma parte de fragmento.

No entanto, Pimentel e Urban (2003, p. 18) abordam a história das primeiras descobertas deste estudo, observadas desde o Século V a.C, registradas pelo grego Anaxágoras, “um importante filósofo que na época já afirmava ter encontrado a prima-substância infinita e chamou de *homeomerias*⁵”. Além dessa principal descoberta, os autores ressaltam ainda os trabalhos Lavoisier (1745-1794), as ideias do sábio Clazômena entre outros na história.

O estudo de Benoit Mandelbrot (1924-2010), de acordo com os autores vieram a afirmar as descobertas históricas e as tentativas de uma sequência infinita impossível de ser revelada sem o auxílio da tecnologia desenvolvida na segunda metade do século XX, os computadores e a programação. Foi a partir das análises com uso de *software* que Mandelbrot revolucionou a compreensão da teoria, quanto às descobertas fundamentadas na *homeomeria*, passando a ser conhecida como a Geometria dos Fractais e até mesmo abrindo uma fenda para o estudo da teoria do caos.

Diante do contexto da Geometria dos Fractais de Mandelbrot, elaborou-se o Percorso Metodológico da Resolução de Problemas para a fase do desenvolvimento da pesquisa com os organizadores prévios, onde serão demonstrados 8 exemplos de estruturas numéricas que forma a ideia de triângulo, padrões e sequências numéricas.

A elaboração estratégica para a construção do conceito inicial da Geometria dos Fractais, iniciará usando os conceitos de sequências numéricas na estrutura da construção do

⁵ Em grego *homeo* ou *amóios* que significa iguais, de mesma linhagem, parte semelhante, propriedades do todo. (Pimentel; Urban, 2003).

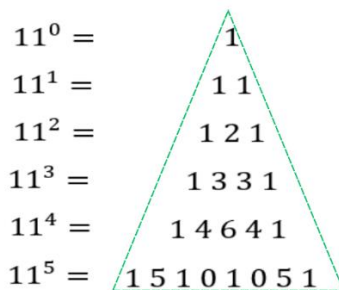


Triângulo de Blaise Pascal (1623-1662)⁶ como “organizador prévio”, ou seja, ideia estabelecida no arcabouço de conhecimento do estudante que servirá de âncora para a construção do Triângulo de Sierpinski (1882-1969)⁷ como ideia nova, que será desenvolvido a ideia inicial do conceito de fractais, na formação de uma estrutura geométrica com o padrão de triângulos.

Veja o exemplo 1, com uma ideia composta por Crilly (2017, p. 54) na sua obra “50 ideias de Matemática que você precisa conhecer” o Triângulo de Pascal demonstrando a sua construção a partir da importância do número 1 e na mesma ideia questiona o 11 e suas relações de multiplicação entre si, ou seja, 11 elevado a potência, o qual forma uma interessante demonstração de resultados em fileiras, tais que suas extremidades resultam em 1, formando então uma estrutura triangular de números 1s.

A partir da introdução de Crilly (2017), tomamos como base a ideia inicial, por ser uma abordagem amplamente difundida e estudada na educação básica. O objetivo então é trazer as memórias das sequências dos números inteiros e identificar os padrões formados a partir da construção de Pascal. E assim, atender as indagações da primeira fase da resolução de problemas de Polya (2006), que para compreender um problema, precisa ter memória de experiências correlatas. Para isso, elevamos o número 11 a potência $n = 0$ a $n = 5$, Figura 9:

Figura 9 – Triângulo de Pascal



Fonte: Crilly (2017), adaptação.

Assim, na Figura 9, temos as seis primeiras fileiras do “Triângulo de Pascal” assim chamado, devido a descoberta de Blaise Pascal em (1623-1662), super difundida na Matemática por sua curiosa simetria e sequências geradas, o qual concluiu que toda essa demonstração seria impossível compor em penas um artigo, tal que em seus estudos descobriu outras relações.

⁶ Triângulo de Pascal é um triângulo aritmético infinito formado por números binomiais, $\binom{n}{k}$ onde n representa o número de linhas e k o número de colunas. Os números que compõem o triângulo apresentam diversas propriedades e relações.

⁷ O Triângulo de Sierpinski é uma figura geométrica obtida através de um processo recursivo, é considerado uma forma elementar da Geometria Fractal.



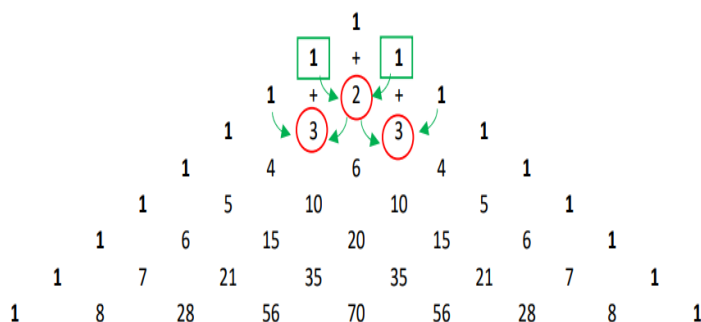
Apesar de sua descoberta e o triângulo levar o seu nome, muito antes o cálculo foi realizado pelos chineses no século XIII (Crilly (2017, p.54).

O Exemplo 2, aborda a construção do Triângulo de Pascal com o uso da relação de Michael Stiefel (1484-1567) que tem como propriedade a soma de dois números binomiais de mesmo número e mesma classe consecutiva, onde irão propiciar a visualização da formação sequências numéricas com padrões de regularidade e curiosas.

Nesta construção do “Triângulo de Pascal” sem elevar a potência, mas procedendo com a soma dos números internos nas fileiras de números 1s nas extremidades. O padrão é gerado a partir do topo, então inicie com o número 1, em seguida na segunda linha repita com números 1s nas extremidades, formando 1 1.

Veja que se proceder com a soma dos números 1 das extremidades irá compor a terceira linha, $1 + 1 = 2$, posicione o resultado no centro alinhado com o número 1 do topo e adicione os números 1s nas extremidades direita e esquerda desta fileira, 1 2 1. Para compor a quarta linha, vamos proceder da mesma forma, somando $1 + 2 = 3$, repetindo o mesmo procedimento, posicionando sempre o resultado da soma ao centro na linha abaixo dos números somados e ao afinal acrescentar os números 1s nas extremidades direita e esquerda.

Figura 10 - Triângulo de Pascal dos números internos



Fonte: autora (2022)

Tal que a construção está baseada na lei de formação recorrente $C_{n,i} + C_{n,i+1} = C_{n+1,i+1}$, criada por Michel Stiefel, matemático alemão conhecido por criar a tabela de logaritmos (Barbosa, 2005, p.98). A relação de Stiefel $C_{n,i} + C_{n,i+1} = C_{n+1,i+1}$, consiste na soma de dois números $C_{n,i} + C_{n,i+1}$ na mesma linha (n) em colunas consecutivas ($i, i + 1$), sendo $C_{n+1,i+1}$ o elemento desta soma a ser posicionado na linha abaixo e na segunda coluna do termo somado, tal que n é o número da linha e i o número da coluna.



O Exemplo 3, demonstra uma relação com álgebra e assim, assegurar que o Triângulo de Pascal é baseado em conceitos da Matemática. Crilly (2017, p.54) fez uma composição calculando os múltiplos das expressões $(1 + x) + (1 + x) + (1 + x) = (1 + x)^3$.

Aplicando a propriedade do cubo da soma de dois termos, dos produtos notáveis, obtemos: $(1 + x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$, onde a constante e seus coeficientes numéricos são 1, 3, 3, 1. Vejamos a construção da ideia considerando o intervalo de potência $n = 0$ até $n = 5$, no Quadro 15:

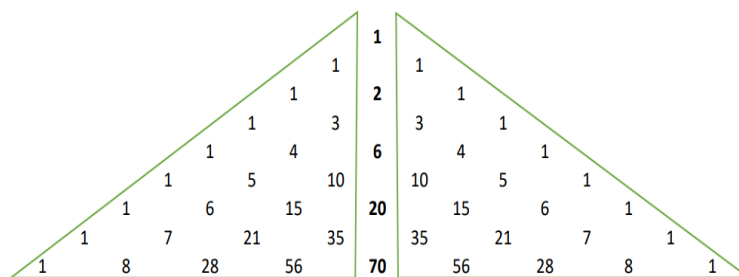
Quadro 15 - Demonstração Algébrica do Triângulo de Pascal

Equação	Coefficientes
$(1 + x)^0 = 1$	1
$(1 + x)^1 = 1 + x$	1, 1
$(1 + x)^2 = 1^2 + 2.1.x + x^2$	1, 2, 1
$(1 + x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$	1,3,3,1
$(1 + x)^4 = (1^2 + 2.1x + x^2). (1^2 + 2.1x + x^2)$ $= 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$	1,4,6,4,1
$(1 + x)^5 = (1 + 3x + 3x^2 + x^3). (1^2 + 2.1.x + x^2)$ $= 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5$	1, 5, 10, 10, 5, 1

Fonte: adaptações de Crilly (2017, p.55) ligações com a álgebra.

Outro fator relevante que veremos agora sobre o Triângulo de Pascal são as suas inúmeras combinações de padrões e simetria presentes na Figura 11, Exemplo 4, para demonstrar alguns padrões. Que iremos demonstrar apenas três observações com o objetivo de introduzir a ideia geral de Geometria dos Fractais. Se dividirmos os números centrais do triângulo, obtemos em ambos os lados suas imagens espelhadas.

Figura 11 - Simetria no Triângulo de Pascal



Fonte: autora (2022)

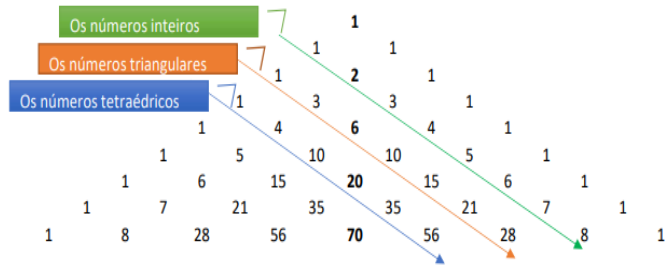
Mas explorando a posição das fileiras dos números, podemos observar algumas sequências nas linhas paralelas, perpendiculares e curiosamente interessante nas quase



diagonais, como a sequência dos números inteiros, Figura 12, Exemplo 5, que aborda as sequências numéricas.

Observando-se as quase diagonais traçadas a partir dos números 1s, como se fossem pontos das extremidades direta ou esquerda, obtém-se a sequência dos números inteiros, dos números triangulares e dos tetraédricos:

Figura 12 – Algumas sequências



Fonte: autora (2022)

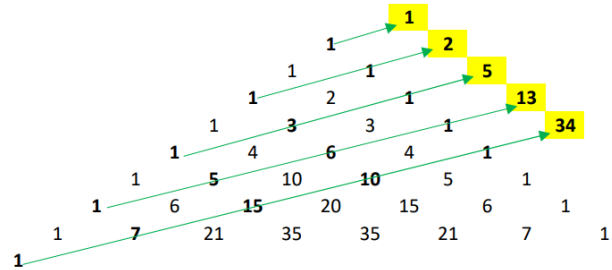
$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$$

$$T_n = \{1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, \dots\}$$

$$Te_n = \{1, 4, 10, 20, 35, 56, \dots\}$$

Explorando um pouco mais, no Exemplo 6, vamos observar a simetria presente nas quase diagonais, ou diagonais imaginárias, compostas pela sequência de números indicados pela seta na Figura 13, cuja soma dos termos encontra-se logo na ponta da lança, ao que forma então o conjunto: $S = \{1, 2, 5, 13, 34, \dots\}$.

Figura 13 - A sequência da soma dos termos das quase diagonais



Fonte: autora (2022)

Obtemos então a sequência, $S = \{1, 2, 5, 13, 34, \dots\}$. Sendo que cada termo é constituído por três vezes o número anterior, subtraindo-se o que vem antes dele, e a partir do segundo termo para gerar o terceiro, temos:

1º termo: 1

2º termo: $1 + 1 = 2$

3º termo: $(3 \cdot 2) - 1 = 5$ (1)

4º termo: $(3 \cdot 5) - 2 = 13$ (2)

5º termo: $(3 \cdot 3) - 5 = 34$ (3)

⋮

Algebricamente constituída: $S = \{1, 2, 5, 13, 34, \dots\}$, a são os termos da sequência e n os números de termos da sequência.

$$S = \{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n\}$$

$$a_1 = 1 \quad (1)$$

$$a_2 = 1 + 1 \quad (2)$$

A partir do terceiro termo, segue a lei de formação $a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2}$. Para $n = 3$ até $n = 5$, temos

$$a_3 = 3a_{3-1} - a_{3-2}$$

$$a_3 = 3a_2 - a_1$$

Substituindo: a_2 e a_1 , temos:

$$a_3 = (3 \cdot 2) - 1 = 5 \quad (3)$$

E os demais termos serão constituídos então:

$$a_4 = 3a_3 - a_2$$

$$a_4 = (3 \cdot 5) - 2 = 13 \quad (4)$$

$$a_5 = 3a_4 - a_3$$

$$a_5 = (3 \cdot 13) - 5 = 34 \quad (5)$$

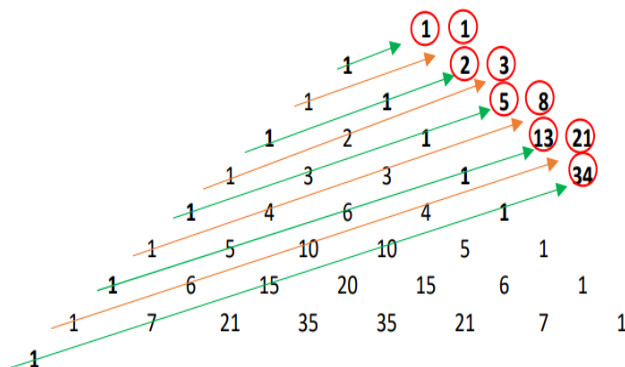
⋮

No Exemplo 7, explorando as quase diagonais do Triângulo de Pascal e traçando as retas obtemos a famosa sequência de Leonard Fibonacci (1170-1250), $S = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots\}$, veja a composição das somas na Figura 14. A sequência de Fibonacci é definida recursivamente, sendo que o primeiro é a constante $a_1 = 1$, que irá gerar a lei de formação,

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \text{ para } n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

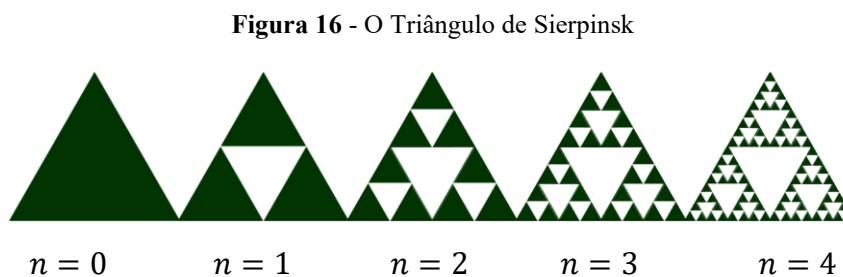


Figura 14 - A Sequência de Fibonacci



- c) traçado o triângulo interno regular a imagem passa conter 4 triângulos regulares internos.

Vejamos a projeção do Triângulo de Sierpinski até a quarta iteração, elaborado no *Software Geogebra*, utilizando o recurso de criação de ferramentas, Figura 16:



Fonte: autora (2022)

O triângulo de Sierpinski é um fractal que permite a exploração de padrões e conceitos abstratos. Sua estrutura auto semelhante e infinita desafia o pensamento convencional e oferece espaço para experimentação, seja na forma de arte digital ou em modelagem computacional. Alterar regras de construção, como proporções ou algoritmos, fomenta soluções inovadoras e interpretações criativas, transformando o fractal em um problema matemático que transcende os limites da geometria plana.

Além disso, o triângulo de Sierpinski ao conectar conceitos prévios, como elementos da geometria plana e proporções, a ideias mais avançadas, como recursão e séries infinitas. Sua construção prática, seja no papel ou em ferramentas como o GeoGebra, envolve os estudantes em um aprendizado ativo e interativo, tornando a experiência mais intuitiva e memorável.

Toma-se os organizadores prévios, como estratégia para organizar as ideias estabelecidas para a formação do conceito inicial de Geometria Fractal, a partir da interação entre as ideias iniciais de construção de fractais regulares a partir de sequências numéricas e a observação de novos discernimentos a partir dessas ideias.

E na possibilidade da junção da Aprendizagem Significativa, Resolução de Problemas e da Criatividade em Matemática – pode-se permitir aos estudantes oportunidade para desenvolver suas habilidades cognitivas. A construção de um fractal clássico, com exemplo já mencionado o Triângulo de Sierpinski, de característica simples, porém, é uma estrutura que envolve diversos conceitos da matemática acadêmica e permite uma exploração complexa, a depender do nível de conceitos que são aplicados.



3.3 Modelo para o ensino de Geometria dos Fractais na Aprendizagem Significativa Subordinada

Para melhor compreensão da composição do modelo de ensino de Geometria dos Fractais na Aprendizagem Significativa Subordinada, descreve-se no Quadro 16, os elementos que representam os conceitos de Matemática, *Software*, estruturas e modelos relacionados a simbologia da Aprendizagem Significativa Subordinada, utilizados no esquema adaptado para o ensino de Geometria dos Fractais na formação inicial de professores de Matemática.

Quadro 16 - Símbolos para explicar a assimilação da Geometria dos Fractais para Aprendizagem Significativa Subordinada

Símbolo representativo	Representação
a (ideia nova)	representa os conceitos particulares de geometria dos fractais, modelos clássicos triângulo de Sierpinski.
A (ideia esteio)	conceitos de álgebra, sequências, triângulo de Pascal, geometria plana da educação básicas e uso do <i>Software</i> de Geometria Dinâmica GeoGebra.
a' (ideia nova sofrendo modificações)	a construção de um fractal geométrico com formas regulares o clássico Triângulo de Sierpinski, “árvore fractal” e Curva de Koch.
A' (ideia estabelecida sofrendo modificações)	agrupamento dos modelos fractais elaborados a partir de sequências de formas regulares, modificados a partir da compreensão dos elementos similares dos fractais e consequentemente da Geometria dos Fractais.

Fonte: autora (2023)

A organização dos conceitos relacionados a simbologia foi elaborada para auxiliar na compreensão da nova estrutura incrementada a ideia de Ausubel *et. al.* (1980), com os estágios da Criatividade em Matemática e interação da Resolução de Problemas.

Os símbolos representativos da Aprendizagem Significativa permitem idealizar momentos nos quais os conceitos vão ganhando significados. Os significados são conceituais e representativos compostos nas resoluções dos problemas que permitirão a transformação das ideias estabelecidas em ideias modificadas.

Esta simbologia representativa e seus respectivos conceitos, visam representar os conceitos gerais e particulares da fase dos organizadores prévios fortalecendo o significado, para iniciar o desenvolvimento da Criatividade em Matemática por meio dos estágios do processo criativo de Hadamard (1954), tomando como fundamento também os quatro estágios de assimilação da Aprendizagem Significativa Subordinada que apresentam relações comuns com a Resolução de Problemas.

Os estágios da Criatividade em Matemática estão compostos prevendo uma possível relação com o processo de assimilação da Aprendizagem Significativa Subordinada. Neste sentido, incrementou-se no percurso a resolução de problemas, para reunir de forma harmônica e gradativa os dois campos de estudo.



A interação entre o incremento da Resolução de Problemas e dos estágios da Criatividade em Matemática, no contexto da assimilação da Aprendizagem Significativa Subordinada, constitui uma perspectiva inovadora para o estudo do desenvolvimento da Criatividade em Matemática. Prevê-se que este processo seja mediado pela resolução de problemas; ressalta-se que tal influência não se configura de maneira linear ou sequencial.

Descreve-se o processo Aprendizagem Significativa Subordinada, incrementado pela Resolução de Problemas e os estágios da Criatividade em Matemática, outros exemplos de fractais serão utilizados nos problemas. Nesse sentido, o Quadro 17 tem por objetivo organizar as possíveis correlações entre o referencial teórico e a estratégia metodológica proposta.

Quadro 17 - Aprendizagem Significativa Subordinada com o incremento da Criatividade em Matemática em Relação à Dissociação

APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA	Resolução de Problemas				PROCESSO CRIATIVO
I. Aprendizagem Significativa ou aquisição de significado subordinado a'	<i>Conceitos de Geometria dos Fractais: a</i>	<i>Relacionada a e assimilada na interação: novo significado e ideias estabelecidas</i>	<i>Recordar ideias estabelecidas: A</i>	<i>Produto Interacional $A'a'$</i>	Estágio I Preparação <i>Processo de atividades práticas e mentais</i>
II. Aprendizagem posterior e retenção inicial do significado a'	<i>Novo significado a' é dissociável⁸ de $A'a'$</i> <i>Estado consciente</i>	<i>$A'a' \Leftrightarrow A' + a'$</i> <i>(alta força dissociável)</i> <i>Estado consciente</i>	<i>Estado consciente/inconsciente</i>		Estágio II Incubação <i>Processo de atividades mentais</i>
III. Retenção posterior do significado a'	<i>Perda gradativa da dissociação de a' a partir de $A'a'$</i>	<i>$A'a' \Leftrightarrow A' + a'$</i> <i>(baixa força dissociável)</i>	<i>Momento “eureka” ou insight.</i>		Estágio III Iluminação <i>Processo de atividades mentais consciente</i>
IV. Esquecimento do significado a'	<i>a' não é mais dissociável eficazmente de $A'a'$</i>	<i>Organização das ideias criativas</i>	<i>Dissociação de a' a partir de $A'a'$ está abaixo do limiar de disponibilidade a' é reduzida a A'. Concretização da ideia, teste e validação.</i>		Estágio IV Verificação <i>Processo de organização das ideias criativas</i>

Fonte: Adaptação Ausubel *et. al.* (1980)

⁸ (1) Ato ou efeito de dissociar(-se); desagregação, desintegração, separação. (2) Psicologia: Processo em que os conjuntos coerentes de ações e pensamentos se desintegram, fazendo com que o indivíduo não consiga lidar com fatos ou ideias que naturalmente são conexos; desagregação. Fonte: Dicionário Brasileiro da Língua Portuguesa (<https://michaelis.uol.com.br>).



Não há como afirmar que o processo de assimilação nos estágios da Aprendizagem significativa, Resolução de Problemas e Criatividade em Matemática aconteçam em processos cíclicos ou linear ou mesmo em espiral, mas trabalhamos com a hipótese de que existem momentos que estes estágios, passo e processos se conectam e se complementam.

No entanto, essa hipótese se firma na estrutura da Aprendizagem Significativa, sustentada na Psicologia Educacional e Cognitiva. E do mesmo modo a Criatividade em Matemática, que embora não seja uma teoria, mas está inserida na Psicologia Cognitiva por compor um processo mental complexo, pensamento divergente, resolução de problemas.

Moreira (2011a), aborda o cognitivismo enfatizando os processos mentais superiores:

[...] trata-se de uma orientação psicológica que se ocupa muito mais de variáveis intervenientes do tipo cognições e intenções, dos chamados processos mentais superiores (percepção, resolução de problemas por *insight*, tomada de decisões, processamento de informações, compreensão), do que de estímulos e respostas (Moreira, 2011a, pp. 35-35).

Para Moreira (2011a) os processos mentais superiores são fundamentais, para permitir a investigação e a compreensão complexa da cognição humana. Explica como as pessoas ativamente interpretam, organizam e utilizam informações do ambiente, fornecendo assim um conjunto de memórias mais abrangente para analisar a aprendizagem. Portanto, a memória e o pensamento são essenciais para entender o comportamento humano para além de simples reações.

E para complementar a estratégia de ensino da Aprendizagem Significativa Subordinada, criou-se o percurso metodológico dos organizadores prévios para o ensino de Geometria Fractal, que inclui o professor com o papel de orientar a assimilação dos significados e por outro o estudante com a interação mediante esse processo de assimilação com a sustentação dos estágios da Criatividade em Matemática.

O papel do professor será na estruturação de experiências que estimulem o processamento ativo e a construção de significado pelos estudantes, auxiliando-os a desenvolver e aplicar estratégias cognitivas e metacognitivas eficazes, promovendo o pensamento crítico e a compreensão mais consistente, e adaptando as abordagens instrucionais para otimizar a maneira como os estudantes interagem e assimilam o conhecimento.

O Quadro 18, resume a estratégia metodológica como Percurso Metodológico dos Organizadores Prévios que envolve os quatro estágios da Teoria da Aprendizagem Significativa junto com os quatro passos heurísticos da Resolução de Problemas e os quatro estágios da Criatividade em Matemática.



Quadro 18 - Percurso Metodológico dos Organizadores Prévios

<i>APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA</i>	<i>O PROFESSOR</i> – Orientar para assimilação de significados	<i>O ESTUDANTE</i> – Interagir organizadores prévios e a construção do conhecimento novo
Aprendizagem Significativa ou aquisição de significado subordinado a'	Compreender o problema: <i>dialética da ação</i>	Estágio de Preparação
	Todos os conceitos abordados devem ser de conhecimento prévio dos estudantes para a resolução do problema. As questões do problema com o auxílio do professor irão compor as ideias da construção do Triângulo de Pascal. a) identifique as sequências nas quase diagonais; b) identifique a simetria na posição dos números; c) realizando operações de soma, descubra a sequência de Fibonacci; d) relacione fatos curiosos identificados desconhecidos por você; Para compreender Lógica dos Conteúdos: 1. potenciação; 2. produtos notáveis; 3. sequências – termo geral da sequência; 4. relação de Stiefel.	Recordar a potenciação, produtos notáveis. Recordar o termo geral de uma sequência. Possivelmente conhecer a relação de Stiefel. A identificação das sequências e relações no Triângulo Pascal, tem somente o objetivo de aguçar a curiosidade dos estudantes com relação a manipulação dos números.
Aprendizagem posterior e retenção inicial do significado a'	Estabelecimento do Plano: <i>Dialética da formulação</i>	Estágio de Incubação
	Estudo dos modelos matemáticos possíveis para a elaboração do Plano: p^n $(a + b)^n$ $S = \{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n\}$ $C_{n,i} + C_{n,i+1} = C_{n+1,i+1}$ $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \text{ para } n = 1, 2, 3, 4, \dots$	Recordar modelos matemáticos e aplicar para elaborar os triângulos. Elaborar os modelos para realizar a execução do plano. Elaboração de esquemas mentais.
Retenção posterior do significado a'	Execução do Plano: <i>Dialética da Validação</i>	Estágio de Iluminação
	a) Destaque os números 1s no triângulo e descreva o resultado da imagem; b) Construa um segundo triângulo até a linha 16, aplicando a relação de Stiefel, porém ao invés de soma os números consecutivos, realize a subtração;	Ao realizar a primeira construção e realizar os destaques dos números 1s, o estudante deverá perceber um padrão e que será induzido a delimitar com um formato de triângulo.
Esquecimento do significado a'	Retrospecto: <i>Dialética da Institucionalização</i>	Estágio de Verificação
	a) Destaque todos os números 1s e descreva a imagem construída. b) Compare com o Triângulo de Sierpinski e anote as semelhanças.	Após a validação das construções as observações comparativas são fundamentais para apresentar a curiosa relação do Triângulo de Pascal com o Triângulo de Sierpinski, construído a partir da relação de Stiefel. Nesta fase espera-se que os conceitos estudados sejam acomodados e transformados em ações mentais, prontas para serem novamente assimilada a novas experiências. Os estudantes terão ainda a oportunidade de recriar os triângulos usando aplicativos de planilha eletrônica ou aplicativo matemático específico para compreender melhor a introdução ao estudo de fractais.

Fonte: Adaptação Ausubel *et. al.* (1980) e Gontijo *et. al* (2019)



Iniciando com a aquisição do significado subordinado (a'): conceito inicial de fractal será apoiado em atividades com abordagem do conceito da construção do Triângulo de Pascal, que irá transcorrer um caminho para associar-se as ideias de sequências numéricas já estabelecidas, o que se pode considerar o momento da compreensão, no âmbito da interação entre ambas até se tornar uma estrutura elaborada por sequência de números inteiros, esse estágio também aborda elementos da preparação.

O enlace da aquisição de significados subordinado com o primeiro passo da resolução de problemas, visa introduzir os conceitos iniciais de Geometria Fractal, associando os conhecimentos prévios de sequência numérica nos problemas de elaboração de triângulos, para compor o primeiro estágio do processo criativo para Criatividade em Matemática, a preparação.

Na aprendizagem posterior e retenção inicial de significado (a') os modelos de triângulos construídos por sequências numéricas estabelecem aos poucos a interação com a figura de um objeto fractal, o produto construído utilizando *software*, tende a fortalecer as conexões e promover uma alta força dissociável na visualização da figura do Triângulo de Sierpinski elaborada. Este estágio converge com a formulação do modelo matemático composto na similaridade do objeto fractal, na resolução do problema, e no processo criativo, inicia a fase da incubação.

A retenção inicial do significado será abordada nos problemas com os conceitos particulares da Geometria Fractal, propostos para gerar a força de dissociação no momento da elaboração do modelo matemático, em estado consciente por ações práticas nas resoluções e ainda em estado inconsciente quando o estudante trabalha as abstrações, momento também da fase de incubação.

A retenção posterior do significado de (a') inicia-se a perda da ancoragem nos conceitos de sequência numérica e Triângulo de Pascal, neste estágio os estudantes deverão considerar o Triângulo de Sierpinski a primeira ideia de fractal, ou seja, obtém neste estágio a ideia nova sofrendo modificações, a partir do contato com a análise da elaboração do Triângulo de Sierpinski, que converge parte da iluminação em momentos de compreensão ou formulação do conceito inicial de fractal.

A retenção posterior do significado inicia a perda gradativa da associação dos conhecimentos prévios, na formação inicial do conceito da Geometria Fractal, neste estágio do processo as ideias anteriormente ancoradas vão sendo dissociadas, dando lugar ao novo conceito, na qual acontece a iluminação, momento que pode ser expresso como “eureca”.

O último estágio, o esquecimento do significado de (a'), o termo esquecimento não significa que a ideia inicial de fractal será totalmente apagada da memória, no entanto, isso



pode ocorrer com o tempo, caso sua composição não tenha gerado um significado consistente, pois é natural que a clareza das memórias poucos acessadas possam tornar-se menos acessíveis.

A construção do Triângulo de Sierpinski a partir do Triângulo de Pascal para introduzir o conceito inicial de Geometria dos Fractais, representa o estágio do esquecimento do conceito ancoradouro. Complementando o estudo de fractais, segue o conceito formal desenvolvido no percurso, com base nas características dos objetos estudados. De modo, que o esquecimento do significado dos conceitos particulares, ou seja, no momento que, o conceito da Geometria Fractal é formulado, ocorre a dissociação dos conhecimentos prévios, dando origem a essa nova ideia associada.

3.4 Modelo para o ensino de Geometria dos Fractais para Aprendizagem Significativa Sobreordenada

Neste tópico para melhor compreensão da composição do modelo de ensino de Geometria dos Fractais na Aprendizagem Significativa Sobreordenada, descreve-se no Quadro 19, com os elementos que representam os conceitos de Matemática, *Software*, estruturas e modelos relacionados a simbologia desta aprendizagem, utilizados no modelo adaptado para o ensino de Geometria dos Fractais na formação inicial de professores de Matemática.

Na Aprendizagem Significativa Sobreordenada, a simbologia tem representativa inversa a Sobreordenada, a vogais minúsculas (*a*) representam as ideias estabelecidas e as vogais maiúsculas (*A*) as ideias novas que também representam os conceitos gerais.

Quadro 19 – Símbolos para explicar a assimilação da Aprendizagem Significativa superordenada

Símbolo representativo	Representação
<i>a</i>	Semelhança de triângulo, segmento de retas, divisão de segmentos em partes iguais, ângulos, Progressão Geométrica. Conhecimento do Software GeoGebra.
<i>A</i>	Elementos conceituais de fractais: autossimilaridade, dimensão e a complexidade infinita.
<i>a'</i>	Elaboração de fractais a poeira de Cantor, a curva de Koch, a árvore Fractal utilizando lápis e papel e Software GeoGebra.
<i>A'</i>	Conceito de Geometria Fractal mais consistente e estável.

Fonte: autora (2023)

Abordando os conceitos relacionados a simbologia do Quadro 19, elaboramos o modelo da Aprendizagem Significativa Sobreordenada com o incremento da Resolução de Problemas e da Criatividade em Matemática.



E, assim como no modelo da Aprendizagem Significativa Subordinada, no modelo da Aprendizagem Significativa Superordenada, não temos a intenção de demonstrar um processo linear, sequencial ou cíclico, mas com a hipótese de que alguns desses estágios se complementam e corroboram para o desenvolvimento da Criatividade em Matemática no percurso da aprendizagem da Geometria Fractal.

O Quadro 20, apresenta um modelo que integra o processo de assimilação da Aprendizagem Significativa Superordenada com o desenvolvimento da Criatividade em Matemática. Este modelo articula os seis estágios da Aprendizagem Significativa, os quatro passos heurísticos da Resolução de Problemas e os quatro estágios da Criatividade em Matemática para ilustrar essa possível associação.

Quadro 20 - Aprendizagem Significativa Superordenada com o incremento da Criatividade em Matemática em Relação à Dissociação

Estágio	Aprendizagem Significativa	Resolução de Problemas				Processo Criativo
I	Aquisição do significado sobreordenado A'	Nova, Ideia Potencialmente Significativa A	Relacionada a e assimilada por	Ideias estabelecidas a e a	Produto Interacional $a' a' A'$	Preparação Estado consciente, campo intelectual
II	Aprendizagem posterior e retenção inicial de A'	Novo significado A' é dissociável a partir de $a' a' A'$	$a' a' A \leftrightarrow a' + a' + A'$			Incubação Estado exaustão em atividades consciente e estabelecimento de ideias inconsciente
III	Esquecimento de A'	A' não é mais eficazmente dissociável a partir de $a' a' A'$	A' é reduzida a $a' + a'$			Iluminação Surgimento de ideias espontâneas
IV	Diferenciação posterior de A'	a' e a'	Subordinada a	Ideia A' estabelecida e Mais Estável	Produto Interacional $A' a' a'$	
V	Retenção posterior de a' e a'	a' e a' são dissociáveis de $A' a' a'$	$A' a' a' \leftrightarrow A' + a' + a'$			Verificação Estado de organização das ideias criativas
VI	Esquecimento de a' e a'	a' e a' não são mais dissociáveis eficazmente de $A' a' a'$	a' e a' são reduzidas a A'			

Fonte: adaptação de Ausubel *et. al.* (1980, p.105)

Para ilustrar a organização dos estágios da Criatividade em Matemática na aprendizagem e memorização de uma ideia superordenada em relação à dissociação, elaborou-se o percurso metodológico para a Geometria Fractal no Quadro 21:



Quadro 21 - Estágios da aprendizagem e memorização de uma ideia superordenada em relação à dissociação

<i>APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA</i>	<i>O PROFESSOR</i> – Orientar para assimilação de significados	<i>O ESTUDANTE</i> – Interagir conhecimentos prévios e a formulação do conceito geral
Aprendizagem significativa ou aquisição do significado sobreordenado A'	Compreender o problema: <i>dialética da ação</i>	Estágio de Preparação
	Nova ideia (A): iteração, similaridade e dimensão fractal. O Conjunto de Cantor – será abordado com o objetivo de aproximar a ideia de dimensão fractal e as partes similares. A Curva de Koch, com este clássico fractal, objetiva-se reforçar o conceito de dimensão. Elaboração de fractais simples com formas regulares da Geometria Plana e ferramentas do Geogebra. A Arvore Fractal, construto que irá auxiliar a compreensão de progressão e dimensão infinita de um objeto fractal. Com o uso do GeoGebra objetiva-se compreender as proporções, similaridade de interação com a tecnologia.	Recordar As ideias estabelecidas a e a dos conceitos de Progressão Geométrica, Segmento de Reta, Frações, Ferramentas básicas do Geogebra para elaboração de Polígonos regulares e segmento de retas. Além dos conceitos o estudante precisa aplicar suas habilidades matemáticas acadêmica e criativas.
Aprendizagem posterior e retenção inicial de A'	Estabelecimento do Plano: <i>Dialética da formulação</i>	Estágio de Incubação
	Inicia-se a construção do Conjunto de Cantor com o novo significado para iteração, similaridade e dimensão fractal, que podem ser ainda incipientes. No entanto, para reforçar a dissociação, a tarefa da Árvore Fractal, vai permitir os primeiros distanciamentos entre sequências numéricas, formas geométricas para autossimilaridade.	Recordar modelos matemáticos e aplicar para elaborar tabelas de sequências geométricas. Elaborar desenhos mão livre e no GeoGebra para compreender a dimensão do objeto. Os conceitos iniciais de Progressão Geométrica e padrões de figuras geométricas ou numéricas, serão relacionadas aos novos conceitos de iteração – similaridade – dimensão.
Esquecimento de A' Diferenciação posterior de A'	Execução do Plano: <i>Dialética da Validação</i>	Estágio de Iluminação
	O problema da Curva de Koch tem o objetivo de colaborar com a desvinculação dos organizadores prévios da preparação para somente a forma fractal em sua análise de composição – reformulação e expansão com conceitos mais complexos.	A partir dos novos problemas este estágio o estudante já deverá ter mais consistência para solucionar os problemas realizando análises para alcançar as soluções. Os conceitos de Geometria Fractal já deverão conter aspectos específicos dissociados das outras geometrias.
Retenção posterior de a' e a' Esquecimento de a' e a'	Retrospecto: <i>Dialética da Institucionalização</i>	Estágio de Verificação
	Os conceitos estabelecidos já não são mais os ancoradouros para sustentar a fase da compreensão do conceito de Geometria Fractal. Definido o conceito de fractal como figura geométrica ou objeto natural que apresenta as seguintes características: Autossimilaridade, Complexidade infinita <i>ad infinitum</i> , Dimensão fracionária e Geração por iteração.	Novas formas de fractais são apresentadas como validação do conceito. Apresentação da Geometria Fractal na natureza, identificação de padrões no meio do caos. Evoluindo para o mundo mais complexo desta geometria singular, evidenciando a ruptura das geometrias plana, analítica e espacial, estudadas em componentes regulares.

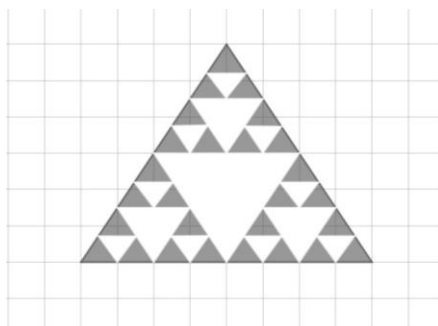
Fonte: Adaptação Ausubel *et. al.* (1980) e Gontijo *et. al.* (2019)



O estágio I, da aprendizagem significativa sobreordenada (A') foram inseridos três problemas clássicos que são usados para introduzir o conceito formal da Geometria Fractal, os conceitos de iteração, similaridade e dimensão fractal, representado por (A) e as ideias estabelecidas Progressão Geométrica, segmento de reta, frações, ferramentas básicas do Geogebra para elaboração de polígonos regulares e segmento de retas representadas por (a) para gerar o produto interacional ($a' a' A'$) e o conhecimento estável dos conceitos de Geometria Fractal representado por (A').

A construção passo-a-passo, completo para a construção do Triângulo de Sierpinski e da Curva de Koch⁹ no Geogebra, está no Apêndice B (Aulas 14 e 15), visa colaborar com aprendizagem significativa sobreordenada, com o uso do Software GeoGebra com objetivo de expandir as ideias em relação a dimensão fractal, a quantidade de iterações possíveis, outra fora de elaborar um fractal, usando ferramentas dinâmicas mais precisa para identificar a similaridade.

Figura 17 - Triângulo de Sierpinski elaborado no Geogebra



Fonte: autora (2022)

Além disso, o triângulo de Sierpinski pode conectar-se a conceitos prévios, como geometria e proporção, a ideias mais avançadas, como recursão e séries infinitas. Sua construção prática, seja no papel ou em ferramentas como o GeoGebra, envolve os estudantes em um aprendizado ativo e interativo, tornando a experiência mais intuitiva e memorável.

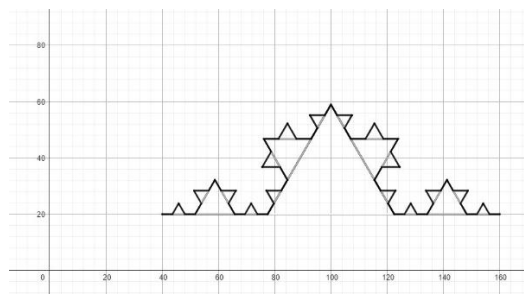
Do mesmo modo, abordados a curva de Koch, para definir qual a sua dimensão. E demonstra como um segmento de retas pode ser conhecido como uma curva. Essa construção, levou a recordar como podemos dividir um segmento de reta em três partes iguais usando

⁹ Helge Von Koch (1870-1924), matemática polonês, que em 1904 e 1906 introduziu uma curva que hoje recebe o seu nome (Barbosa, 2005, p. 38)



apenas compasso. Observar a proporção do triângulo equilátero no meio do semento, como um novo segmento, ou seja, unidade similar do objeto fractal.

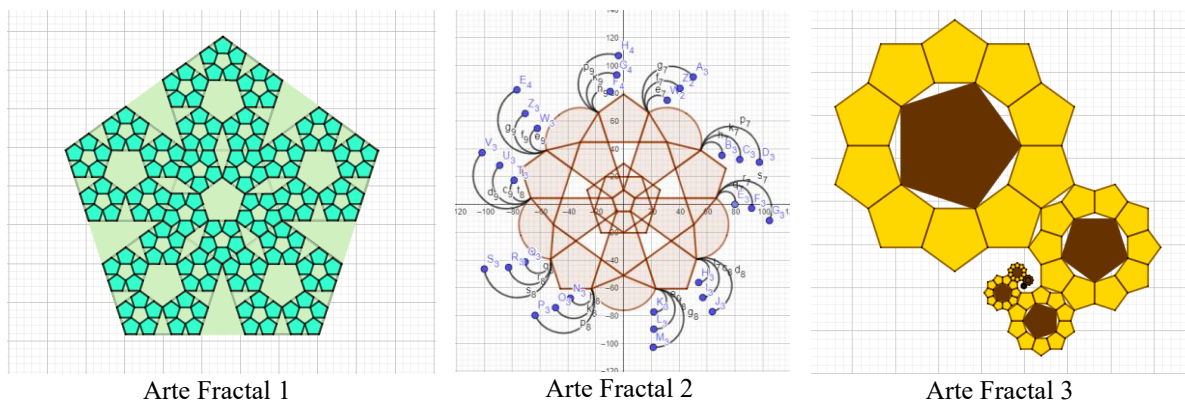
Figura 18 - Curva de Koch elaborada no Geogebra



Fonte: autora (2022)

Na construção dos Fractais de categoria geométrica almeja-se a familiarização dos estudantes com a interface do GeoGebra, para aqueles que tem pouca expertise, mas também para aqueles que utilizam com maior frequência, aproximarem-se das ferramentas que irão ser utilizadas nas diversas atividades, como os polígonos regulares, os segmentos de retas, pontos entre outras. No primeiro momento, serão explorados os polígonos regulares. O passo-a-passo, completo para a construção está no Apêndice B (Aulas de 1 a 3):

Figura 19 - Fractais Simples: polígono regular de cinco lados



Fonte: autora (2022)

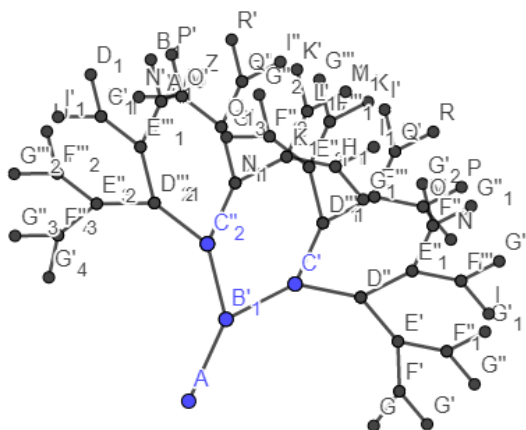
A construção dos objetos elaborados acima, tiveram objetivo de apresentar mais sobre o conceito de similaridade, com o intuito de praticar o uso das ferramentas e demonstrar construções, especialmente na Arte Fractal 3, visualizar uma breve dimensão do objeto. Os objetos são essencialmente os organizadores prévios para os verdadeiros fractais, neste caso, incorporado aos conceitos de Geometria Plana.



No estágio II, aprendizagem posterior e retenção inicial de (A') deve ocorrer quando a interação acontece a partir da dissociação dos conhecimentos de Geometria Plana modificados e os conhecimentos novos do conceito de fractal: similaridade, iteração e dimensão infinita ($a' + a' + A$) entrando em equilíbrio pela modificação inclusiva ($a' + a' + A'$).

Na construção dos Fractais Simples, apresenta-se a Árvore Fractal, apesar de apresentar uma estrutura simples, ela compõe-se por diversos passos no GeoGebra. O passo-a-passo, completo para a construção está no Apêndice B (Aula 4):

Figura 20 - Árvore Fractal



Fonte: autora (2022)

A árvore fractal no GeoGebra é um ótimo exemplo de como a criatividade se manifesta na Matemática. A Matemática não é apenas cálculo e fórmulas, ela também envolve a exploração de padrões, a visualização de conceitos abstratos e a criação de representações inovadoras. Ao construir uma árvore fractal, o estudante exercitará sua criatividade ao definir regras de crescimento, escolher proporções estéticas e descobrir como pequenas mudanças nos parâmetros podem gerar variações surpreendentes.

Essa atividade pode estimular a conexão entre conhecimentos prévios: proporções, geometria e recursão com as novas descobertas sobre padrões fractais. A manipulação dos elementos gráficos torna o aprendizado mais intuitivo e memorável, fortalecendo a compreensão dos conceitos de forma duradoura.

No estágio III, o esquecimento de (A'). Almeja-se obter os três principais conceitos de fractal mais consistente (A'), mais associado ao objeto fractal como a árvore fractal e a curva de Koch, de modo que, os padrões identificados ($a' a'$) estão se unificando a um fractal (A') e integrado a nova estrutura cognitiva.



O estágio III, aborda uma integração de conceitos de conhecimento do estudante. E para fortalecer os novos conceitos, o estudante precisa se desprender dos padrões identificados na Geometria Plana para identificar novos padrões onde não há de imediato. Inicia-se uma reformulação ou expansão do conhecimento de fractal em estrutura simples para uma estrutura complexa. Neste sentido, faz jus ao que preconiza a aprendizagem significativa superordenada, ou seja, “uma forma de aprendizagem na qual o novo conhecimento (A) é tão abrangente ou avançado que reestrutura ou expande significativamente”. Quando o conhecimento da Geometria Fractal em si, se sobrepõe ao conhecimento prévio (a) do estudante, levando a uma nova forma de compreensão (a' e A') o estudante passa a conhecer um novo mundo de ideias, uma nova Geometria.

Os estágios IV, V e VI, marcam nova fase de estágios com os conceitos sobre fractais modificados, com maior consistência em novas memórias. O primeiro fractal de fato a Curva de Koch com a estrutura significativa ($A'a'a'$), iniciamos as conexões com a representação de fractais complexos como o de Mandelbrot. Portanto, na aprendizagem superordenada, essas ideias causam novas informações e o conhecimento pré-existente de uma maneira que transcende aos conceitos mais simples da Matemática aplicados por repetição a estruturas abstratas complexas.

Portanto, o estágio IV, inicia um processo de reorganização dos conceitos algébricos e da Geometria Plana aos conceitos assimilados de dimensão, iteração e autossimilaridade, levando ao fortalecimento do conceito da Geometria Fractal ($A'a'a'$).

O conceito formal da Geometria Fractal desenvolvido no percurso dos estágios I ao IV, com base nas características dos objetos estudados, podem permitir que, o esquecimento do significado dos conceitos particulares, ou seja, no momento que, o conceito da Geometria Fractal é formulado, ocorre a dissociação dos conhecimentos prévios, dando origem a essa nova ideia associada.

Inicia-se no exemplo da Figura 20, a ideia de “autossimilaridade”, compondo nesse contexto a ideia da dimensão de um fractal. Barbosa (2005, p.18) afirma que o conceito de fractal “ainda tem muito a desejar, principalmente no caso de se querer uma definição formal, que caiba ao ser e só ao ser”. Esta citação do autor chama a atenção para que isso não seja um obstáculo na Educação, pois deve-se apoiar em conceitos que sejam simples e de fácil compreensão.

Logo, abordamos aqui, os conceitos de fractais mencionados por Barbosa (2005) elaborados pelos autores de renome nesta área de estudo:



- [1] um fractal é, por definição, um conjunto para o qual a dimensão Hausdorff-Basicovith excede estritamente a dimensão topológica.
- [2] um fractal é uma forma cujas partes se assemelham ao seu todo sob alguns aspectos.
- [3] Um conjunto F é fractal se, por exemplo: *i*) F possuir alguma forma de “autossimilaridade” ainda que aproximada ou estatística; *ii*) a dimensão fractal, definida de alguma forma, é maior que a sua dimensão topológica; *iii*) o conjunto F pode ser expresso através de um procedimento recursivo ou iterativo. (Barbosa, 2025, pp. 18-19).

A definição [1] foi marcada por diversas críticas, inclusive ao próprio Mandelbrot. A definição [2] segundo Barbosa (2005) foi apresentada por J. Feder (1988) trazendo contribuições mais simplificadas ao conceito. E na definição [3] o breve entendimento foi construído por K. J. Falconer (1985 e 1990), que de acordo com Barbosa (2005) o autor concebe a definição por três caracterizações que expressam a autossemelhança, dimensão e a complexidade infinita.

Observa-se que os conceitos estão de encontro com o conceito inicial de Pimentel e Urban (2003) em sua obra de abordagem histórica. Ricieri (1990, p. 80) também aborda o mesmo conceito enfatizando o termo *fractus* como já mencionado, escolhida por Mandelbrot para registrar a sua descoberta.

Barbosa (2005) após dissertar sobre o conceito de fractal e conjunto fractal, direciona seu discurso para a geometria fractal para sala de aula em forma de questionamento, e transcreve as suas possíveis respostas com base em justificativa que favorecem o ensino:

Conexões: com várias ciências;

Deficiências da Geometria Euclidiana para o estudo de formas da natureza, [...] a possibilidade de trabalhar com temas transversais voltados para a compreensão de fenômenos que ocorram nos diversos ambientes.

Difusão e acesso aos computadores e a tecnologia da informática nos vários níveis de escolarização;

Existência do belo nos fractais e possibilidades do despertar e desenvolver o senso estético com o estudo e arte aplicada a construção de fractais, entendendo-se arte como toda ação que envolve simultaneamente emoção, habilidade e criatividade;

Sensação de surpresa diante da ordem na desordem. (Barbosa, 2005, p.19)

As bases justificativas de Barbosa abordam concepções para incentivo aos docentes realizarem estudo e ensinar a geometria fractal em sala de aula na educação básica e no ensino superior. Para a construção do conceito da Geometria Fractal, serão utilizados problemas clássicos dos livros paradidáticos e objetos fractais clássicos para desenvolver o conceito de “autossimilaridade”, como o Problema de Cantor (a poeira de Cantor), o Limite da Curva de Koch e o limite da área do Triângulo de Sierpinski. O último problema abordado será do tipo problema aberto, de livre criação do estudante.

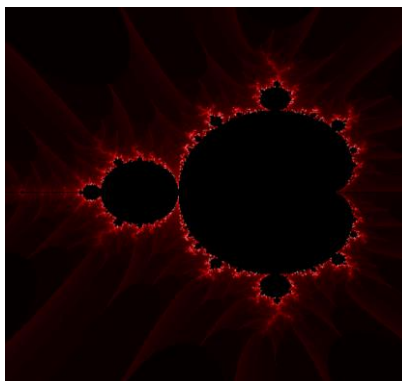


O por fim, apresentar a criação do Fractal de Mandelbrot. As figuras de Mandelbrot segundo Ricieri (1990) foram inspiradas nos modelos de Julia e Fatou e conclusões complexas obtidos por Cayley, Klein e Poincaré:

[...] estudo da equação $X_{t+1} = (X_t)^2 + \lambda$, representação simplificada da lei de Verhulst. Consideraram o parâmetro λ fixo e x_0 uma variável complexa do tipo $a + bi$. Mandelbrot, ao contrário dos dois matemáticos, estabeleceu λ como variável complexa e x_0 igual a zero. O índice t , tanto para o conjunto de Mandelbrot, quanto para o de Julia-Fatou, varia de zero a infinito. À medida que Mandelbrot variava o parâmetro λ , como exemplo: $\lambda = 3,341 + 2,356i$, $\lambda = 0,521 - 0,757i$, $\lambda = -2,741 - 0,743i$, o computador grafitava os pontos X_{t+1} , componente real na horizontal e componente imaginária na vertical. (Ricieri, 1990, p. 74)

Observa-se que para cada valor de λ , encontra-se “verdadeiras obras de arte”, como demonstrado na Figura 21, o seu clássico trabalho, que apresenta a principal característica dos fractais, a invariância por escala. Segue a imagem do Fractal de Mandelbrot, elaborada com o auxílio de computador no Aplicativo *JavaScript*:

Figura 21 - Fractal de Mandelbrot



Fonte: autora (2023)

Diante do conceito apresentado, no estágio IV, no estágio V, a retenção posterior de (*a'a'*) almeja-se a dissociação dos conceitos, maior equilíbrio na identificação de fractais e da Geometria Fractal e sua importância para a sociedade acadêmica tanto no ensino superior, quanto na educação básica.

Encerramos com o estágio VI, o esquecimento de (*a'a'*), que se compõe pela formulação do conceito de Geometria Fractal a partir do fractal de Mandelbrot (*A'*). Temos que as ideias estabelecidas: iteração, similaridade e dimensão (*a'a'*) sejam integradas ao conceito geral de Geometria Fractal (*A' + a' + a'*), reduzidas a uma composição de novas memórias, representadas por abstrações, gráficos, modelos matemáticos e outras formas da natureza.



Para complementar, cada um dos estágios da Aprendizagem Significativa e identificar e efetividade do processo de aprendizagem, destaca-se nesta pesquisa os indicadores da Aprendizagem Significativa, esses indicadores refletem a profundidade e qualidade da conexão estabelecida entre o novo material e a estrutura cognitiva preexistente do estudante no contexto da sala de aula.

Os principais indicadores da Aprendizagem Significativa para a aprendizagem de conceitos no ensino de Matemática:

- a) A compreensão: indicador central da aprendizagem significativa, no qual o novo conhecimento adquire significado para o estudante, e que efetiva o estabelecimento de uma relação substantiva e não arbitrária entre o novo conceito e as ideias ou subsunçores.
- b) A integração: é o indicador que representa a assimilação do novo conhecimento na estrutura cognitiva de forma a expandi-la e reorganizá-la. Isso implica que o estudante não apenas compreende o novo conceito, mas consegue conectá-lo a uma rede mais ampla de subsunçores, estabelecendo relações entre diferentes ideias e áreas do conhecimento.
- c) A dissociação: é um indicador mais avançado e refinado da aprendizagem significativa, que se manifesta quando o estudante consegue diferenciar o novo conceito adquirido dos subsunçores que inicialmente o ancoraram. Ou seja, o estudante não só compreende e integra o novo conhecimento, mas também é capaz de reconhecer suas particularidades, limites e características distintas, manipulando-o de forma autônoma e distinguindo-o de ideias similares.

A compreensão conecta uma rede de conhecimentos, revelando caminhos para a Aprendizagem Significativa. A dissociação para que seja eficaz demonstra um entendimento robusto, que transcende a mera assimilação para uma apreciação das especificidades do conceito. E por fim, a integração se manifesta quando o estudante é capaz de aplicar o novo conhecimento em diversos contextos e relacioná-lo de maneira coesa com outros conceitos pré-existentes, enriquecendo o esquema cognitivo global.



CAPÍTULO 4 - A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NA CRIATIVIDADE EM MATEMÁTICA

Neste capítulo, a criatividade será descrita no âmbito da resolução de problemas de modo geral e com vistas a implementar as possibilidades no contexto da Geometria dos Fractais, a partir de uma estratégia metodológica que visa proporcionar condições que favoreçam o desenvolvimento das habilidades da Criatividade em Matemática dos futuros professores participantes da pesquisa, observadas à luz da Teoria da Aprendizagem Significativa para análise da relação no processo ensino-aprendizagem e desenvolvimento da Criatividade em Matemática.

4.1 Resolução de Problema como Metodologia de Ensino de Matemática

Os problemas acompanham a História da Matemática unida à História da humanidade, pois “desde a antiguidade os registros de problemas de Matemática têm sido encontrados nas histórias dos povos egípcios, gregos, chineses e entre outros” (Onuchic, 1999, p. 199). E conseqüentemente perdurou até os tempos da sociedade globalizada, atualmente fazendo parte do currículo escolar de muitos países, desde a educação básica até o seu mais alto nível.

No ensino de Matemática a Resolução de Problemas como metodologia, deveria ser amplamente utilizada pelos professores que ensinam Matemática, pois, segundo Onuchic (1999, p.203) “reflete uma tendência de reação e caracterização realizadas com um conjunto de fatos, domínio e procedimentos algorítmicos ou um conhecimento a ser obtido por rotina ou exercício mental”. E visto que, os problemas de matemática têm ocupado um lugar central na matemática desde a antiguidade.

O estudo por meio de resolução de problemas veio sendo aprimorado historicamente de acordo com os novos cenários da sociedade, as exigências de novos perfis de trabalhadores no âmbito da sociedade do conhecimento, conseqüente devido aos avanços tecnológicos. É evidente que a composição da resolução de problemas no currículo escolar é uma conquista recente comparada a sua dimensão histórica. Para tal, o ensino de Matemática passou por reformas significativas no último século em nível mundial.

Em meados de 1960 nos Estados Unidos iniciou-se um trabalho por George Polya, sendo o precursor e atualmente a principal referência na elaboração de estratégia para resolução de problemas para o ensino de Matemática.



A Resolução de Problema no ensino de Matemática ascendeu-se fortemente no período de 1960-1990, mais precisamente foi declarado como “tema dos anos 80” com o marco da publicação do *Yearbook* com título: A Resolução de Problemas na Matemática Escolar.

No entanto, Schoenfeld (1996) no período considerado como “tema dos anos 80”, traz uma concepção crítica sobre o “que é realmente a Resolução de Problemas”. As ideias de Schoenfeld (1996) vem a confrontar com a Resolução de Problemas do tipo rotineiros ou com práticas que se assemelham a prática da tabuada, pois observou que o olhar da resolução de problemas nos anos 80 era superficial, ao que verdadeiramente ele considera como resolução de problemas no ensino de Matemática.

Como fundamento dessa crítica, o autor evidencia um estudo de resultados de um exame nacional de matemática nos EUA, onde aponta dificuldades dos estudantes, com relação a interpretação e não somente na resolução. Ou seja, para Schoenfeld (1996) problemas resolvidos sem a interpretação correta de um problema real, traz soluções “numéricas” sem sentido, o resultado da sua pesquisa o levou a concluir que os “estudantes não esperam que faça sentido” solucionar os problemas escolares.

Resolver problemas segundo Polya (2006, p. 159) é uma “atividade fundamental humana e que de fato a maior parte do pensamento humano consciente, relaciona-se com problemas”. Para Sternberg (2010, p. 383) o problema surge da necessidade de suplantando obstáculos para responder uma pergunta ou atingir uma meta, pois se a resposta a uma situação for imediata não é um problema.

Polya (2006) criou um método heurístico em sua obra a Arte de Resolver Problemas, na qual estabeleceu a heurística da resolução de problemas, compondo quatro macroestratégia para o ensino da Resolução de Problemas na sala de aula. Por meio do diálogo o autor conduz uma série de indagações, levando o professor a provocar reflexões sobre o conteúdo do problema e instigar o estudante para buscar em sua estrutura cognitiva de pensamentos, os conceitos necessários para solucionar um problema em questão. As quatro fases clássicas de Polya (2006, pp. 4-12) para a resolução de problemas conhecidas e utilizadas em vários livros didático, são: “compreensão do problema; o estabelecimento de um plano; a execução do plano; e o retrospecto”.

Para Polya (2006, p. 5) “resolver um problema sem compreender é uma ação tola”. E continua suas concepções que não somente “compreender”, mas desejar resolver o problema. Para o autor, esse estado de motivação contribui para uma busca consciente pela resolução.



Faz parte da compreensão as condições do estudante para identificar os elementos compostos no problema e fazer as devidas análises, nas seguintes indagações sugeridas pelo autor na sua primeira obra: Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante?

Polya (2006), afirma que as análises heurísticas levam a vários pontos de vista, que colaboram no estabelecimento do plano. E assim, a fase da compreensão é uma das que demanda mais tempo. A compreensão se apoia principalmente segundo o autor em problemas de correlação, ou seja, em algo já vivenciado pelo estudante. A fase da compreensão se divide em dois estágios a Familiarização e o Aperfeiçoamento da Compreensão (Polya, 2006).

A Familiarização é o estágio de análise inicial que envolve as explorações de reconhecimento do enunciado, que estimulam a mente a trabalhar os conceitos e o objetivo, para buscar memórias que irão auxiliar a estratégia de resolução. É claro que no estágio familiarização são realizadas diversas indagações, mas algumas mais frequente segundo Polya (2006, p. 29) são por onde começar? Que posso fazer? e qual a vantagem em assim proceder?

Após a familiarização vem o estágio do aperfeiçoamento da compreensão, que leva a classificação das ideias, como: as incógnitas, as hipóteses, a condicionante, tais que são as principais partes do problema. Em seguida revisando o enunciado examinam-se as várias combinações dos dados classificados. Neste estágio ainda persistem as mesmas indagações do primeiro estágio, para a busca de ideias proveitosas.

Para Polya (2006, p. 30) mesmo que as ideias “são mais ou menos completas, mas já é uma sorte obter uma ideia qualquer sobre o problema, tal que a ideia proveitosa é aquela que age de forma decisiva para se alcançar o fim desejado”. Contudo, ressalta que é importante considerar todas as ideias geradas, mesmo aquelas insignificantes, ao passo que qualquer nova ideia torna mais coerente a concepção do problema.

Na fase do estabelecimento do plano o estudante se dispõe a construir a sua estratégia para resolução do problema, com base nos argumentos levantados na compreensão, mas ainda não quer dizer que compreender o objetivo e as incógnitas seja suficiente para elaborar imediatamente o plano, Polya (2006, p. 7) afirma que esse caminho pode “ser longo e tortuoso, mas que a elaboração do plano é o principal feito”. O estudante precisa fazer uma busca em problemas correlatos, de preferência que já tenha sido resolvido por ele.

Polya (2006, p. 7) traz orientações para o olhar do professor para “orientar o estudante de forma sutil e discreta buscando provocar o surgimento das idéias (*sic*)”. O autor recomenda ao professor que observe os fatores que levam a identificar as dificuldades ou os sucessos na resolução de problemas em suas próprias experiências de estudantes. A fim de que possa conduzir para uma ideia, que o leve a resolver o problema. As indagações recomendadas por



Polya para os professores são: Conhece um problema correlato? Já viu antes? É possível resolver uma parte do problema? Já pensou em um problema conhecido? entre outras até que se encontre uma forma de resolver.

Nas observações de Onuchic (2014, p. 23) a autora identificou que Polya era preocupado “para que os professores se tornassem bons resolvidores de problemas, e que isso estimulasse também os estudantes de suas classes a serem bons resolvidores”.

Na fase execução do plano, Polya (2006, p. 12) registra que “para conseguir alcançar este feito é necessário bons hábitos mentais e de concentração, o estudante deve compor os processos de resolução analisando cada passo”. Polya (2006) considera suficiente se o estudante estiver convicto da execução correta das operações.

E na última fase, o retrospecto segundo Polya (2006, p. 12) “é a fase que poucos estudantes querem fazer, afinal encontrar a solução é o principal objetivo para a maioria”. No entanto, as operações de retrospecto reexaminam o resultado é o que consolida a compreensão e o aperfeiçoamento da capacidade para resolver novos problemas.

A recomendação de Polya (2006) aos professores é que incentivem os estudantes a investigarem suas resoluções, essas operações favorecem os registros das memórias que posteriormente poderão ser mais fáceis de serem acessadas em novas situações. Ressaltamos uma citação do autor, sobre a importância da resolução de problemas na Educação:

Se a educação não contribui para o desenvolvimento da inteligência, ela está obviamente incompleta. Entretanto, a inteligência é essencialmente a habilidade para resolver problemas: problemas do cotidiano, problemas pessoais, problemas sociais, problemas científicos, quebra-cabeça e toda sorte de problemas. O aluno desenvolve sua inteligência usando-a; ele aprende a resolver problemas resolvendo-os (Polya, 1997, p. 2).

Polya (2006) frente a Resolução de Problemas no ensino escolar foi pauta de diálogos e discussões com foco no desenvolvimento das habilidades para resolver problemas por meio da heurística. Liljedahl e Santos-Trigo (2016), trazem um estudo para além da heurística, com fundamento nas pesquisas de Poincaré (1854-1912) e Hadamard (1865-1963), os autores conjecturam suas ideias no campo da Resolução de Problemas no âmbito da Criatividade Matemática, definida na composição dos estágios: iniciação, incubação, iluminação e verificação (Hadamard, 2009).

Liljedahl (2016) analisa os procedimentos da pesquisa de Poincaré e reflete sobre os estágios consciente e inconsciente no processo da Resolução de Problemas de Matemática. O autor afirma que um não sobrepõe ou é superior ao outro, pois os esforços desenvolvidos de



forma consciente levam ao inconsciente elementos para a organização ou estruturação de uma resposta. Liljedahl considera a Resolução de Problemas um recurso para desenvolver o pensamento Criativo em Matemática.

Neste sentido, Nunes e Santana (2017) corroboram com o pensamento de que a Resolução de Problemas tem se tornado:

[...] uma importante atividade matemática, mostrando-se útil no desenvolvimento de conceitos específicos e de ideias matemáticas. Os alunos têm a possibilidade de ver os conhecimentos e procedimentos matemáticos surgirem com significado e, simultaneamente, de desenvolver capacidades matemáticas como o raciocínio matemático e a comunicação matemática (Nunes & Santana, 2017, p.3).

Ressalta-se na fala dos autores, indícios que por meio da Resolução de Problemas pode-se aprender os conteúdos da matemática associando aos significados, logo, atribui-se essa forma de aprendizagem a aprendizagem significativa.

4.2 Os Tipos de Problemas Matemáticos para o ensino de Geometria Fractal

A diversidade de problemas permite que os estudantes possam desenvolver habilidades Matemáticas, e que a vejam em diferentes perspectivas. Cada tipo de problema matemático tem seu propósito e seu valor pedagógico e pode ser utilizado para atingir diferentes objetivos de aprendizagem. Na mesma linha de pensamento, existem várias estratégias para resolver um problema, conforme Medeiros (2020, p.20) “É preciso explorá-las na dinâmica da aula de Matemática. No que tange aos papéis os alunos recebem tarefas para criarem estratégias para as resolver. O professor pede ao aluno para explicar e justificar o seu raciocínio”.

Como mencionado, existem diversos tipos problemas matemáticos que podem ser utilizados para o ensino-aprendizagem da própria Matemática, cada tipo possui características próprias e objetivos pedagógicos. Segue alguns relacionados e que também serão utilizados nesta pesquisa.

Alguns tipos de problemas matemáticos:

- a) Problema Fechado: Segundo Gontijo *et. al.* (2019, p. 62). “Possui uma única solução correta Caminho específico e definido para resolver. Usado para avaliar a compreensão de conceitos específicos e habilidades procedimentais.
- b) Problema Aberto: Segundo (Medeiros, 2020, p. 5). os problemas abertos “permitem que o aluno tenha condições de resolvê-los. E, sobretudo, possuem enunciado curto, podem permitir ao estudante conquistar as primeiras ideias em um novo estudo”.



- c) Problemas de Aplicação: De acordo com Dante (2011, p.17), são aqueles que “retratam situações reais do dia a dia e que exigem o uso da matemática para serem resolvidos”. São também chamados de situações-problema contextualizadas.
- d) Problema de Investigação: Encoraja o estudante a explorar, formular hipóteses e investigar diferentes possibilidades. Possui diversos caminhos para solução.
- e) Problema de Modelagem: Aborda a criação de modelos matemáticos para representar situações do mundo real. Ajuda no desenvolvimento de habilidades de abstração e generalização.
- f) Problema de Resolução de Conflitos: Trabalha situações de conflito ou dilema que precisa ser resolvido. Visa promover o desenvolvimento de habilidades de argumentação e tomada de decisão.
- g) Problema de Otimização: Trabalha com foco para encontrar a melhor solução dentro de um conjunto de restrições. São comuns em áreas como economia, engenharia e logística.
- h) Problema de Padrões (simples e compostos): Envolve a aplicação direta de um ou mais algoritmos anteriormente aprendidos e não exige nenhuma estratégia. Segundo Dante (2011, p.15) “a solução do problema já está contida no próprio enunciado, e a tarefa básica é transformar a linguagem usual em linguagem matemática, identificando as operações ou algoritmos necessários para resolvê-lo”.
- i) Problemas-processo ou heurísticos: Os problemas-processo aguçam a curiosidade do estudante e permitem que desenvolva a criatividade, a iniciativa e o espírito explorador. E, principalmente, como afirma (Dante, 2011, p.16) “iniciam o desenvolvimento de estratégias e procedimentos para resolver situações-problema, o que, em muitos casos, é mais importante que encontrar a resposta correta”.
- j) Problemas de quebra-cabeça: Segundo Dante (2011, p.17) são problemas “que envolvem e desafiam os estudantes”. Geralmente constituem a chamada matemática recreativa, e sua solução depende, quase sempre, de um golpe de sorte ou da facilidade em perceber algum truque, alguma regularidade, que é a chave da solução.
- k) Problema de Prova: Envolve a demonstração de teoremas ou proposições matemáticas. Desenvolvem habilidades de raciocínio lógico e argumentação formal.
- l) Problema de Construção Geométrica: Segundo Pinho (2021, p.136), esses problemas “são os típicos problemas de final aberto, com possíveis diferentes soluções”
- m) Problemas de Jogos e Desafios: Utiliza jogos ou desafios para engajar os alunos e tornar a aprendizagem mais divertida. Desenvolvem habilidades de estratégia e pensamento crítico.

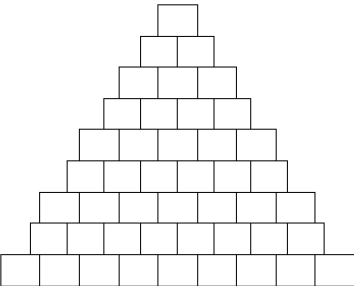


Conforme os tipos de problemas mencionados, os que serão abordados nesta pesquisa são: problemas padrões; problemas fechados; problemas abertos; problemas de investigação e problemas de construção geométrica.

As Figuras 22 e 23 são exemplos problemas padrões, o processo de calcular as potências irá descobrir a formação de um triângulo formado por números o qual suas extremidades diagonais são números 1. Os questionamentos nas alíneas a, b e c tem o objetivo de recordar as sequências numéricas e a identificação de padrões já conhecidos pelo estudante, permitindo evidenciar o significado. Espera-se que os estudantes possam identificar a maior quantidade de sequências ou combinações curiosas.

Figura 22 - Problema (1) Triângulo de Pascal

1. Calcule as potências e construa a sequência na malha quadriculada com os resultados colocando cada algarismo em apenas uma casa "quadrado".
Tempo inicial: _____ Tempo final: _____
- | |
|--------|
| 11^0 |
| 11^1 |
| 11^2 |
| 11^3 |
| 11^4 |
| 11^5 |
| 11^6 |
| 11^7 |
| 11^8 |


- a) Relacione os padrões de número identificados na malha, indicando as posições, usando os termos: vertical, horizontal e diagonal.
b) Relacione sequências ou combinações de número em diversas posições.
c) Descreva como foi o nível dessa atividade para você, como: muito fácil, fácil, moderado, difícil.
d) Faça sugestões para melhorar a tarefa.

Fonte: autora (2023)

Figura 23 - Problema (2) Triângulo de Pascal nos coeficientes algébricos

2. Vejamos a uma relação algébrica para a construção do Triângulo de Pascal.
Tempo inicial: _____ Tempo final: _____
- a) Para isso solucione as equações da tabela:
- | Equação |
|-------------|
| $(1+x)^0 =$ |
| $(1+x)^1 =$ |
| $(1+x)^2 =$ |
| $(1+x)^3 =$ |
| $(1+x)^4 =$ |
| $(1+x)^5 =$ |
- b) Posicione os coeficientes na tabela abaixo, em cada linha, posicionando os números do centro para as extremidades da coluna e analise o resultado.
- | Coeficientes |
|--------------|
| |
| |
| |
| |
| |
| |

Fonte: autora (2023)



No olhar de Pinho (2021, p.136) “os problemas de construção geométrica são excelentes problemas para exercitar o pensamento divergente”. Enquanto, que os problemas de investigação levarão o estudante a explorar, formular hipóteses e investigar diferentes possibilidades, considerando que o tipo de problema possui diversos caminhos para solução.

4. Usando a técnica da relação de Michel Stiefel ($C_{n,i} - C_{n,i+1} = C_{n+1,i+1}$), no Triângulo de Pascal, vejamos o que acontece.

[illegible]

- Fonte:** autora (2023)

Figura 26 - Problema (5) A Árvore Fractal

1. Preencha os campos da tabela com os dados da sequência da árvore fractal.
2. Qual é a PG do tamanho do seguimento?
3. Qual é a PG da quantidade de seguimentos?
4. Qual é a PG da composição da figura?
5. O problema: Quantos seguimentos terá a árvore fractal na sua 20 iteração?

Fonte: autora (2023)

Os problemas (3, 4 e 5) fazem uso de elementos da geometria plana, o problema (6), envolve a construção de figura com uso de segmento de retas, no qual visa desenvolver habilidades de visualização e identificação das partes similares. Sobre o modelo Matemático que gera a imagem fractal, envolve conceitos Matemática da Educação Básica, de conhecimento dos estudantes da graduação do curso de Licenciatura em Matemática do Módulo VIII.

Após construir o conceito inicial de fractal, abordando a similaridade, no Triângulo de Sierpinski. O problema do Conjunto de Georg Cantor¹⁰ (1845-1918), será adotado o termo composto problemas de investigação e de construção geométrica, para classificar os problemas para análise da pesquisa, que visam alcançar resultados significativos. Neste sentido a Figura 27, aborda o problema (6), que objetiva desenvolver uma progressão que leve a uma dimensão infinita abruptamente, iniciando o conceito da dimensão fractal.

Figura 27 - Problema (6) O Conjunto de Cantor

Cantor, 1983, publicou um trabalho no qual é construído um conjunto, chamado hoje "Conjunto de Cantor" como modelo de conjunto excepcional: a) considere um segmento de reta; b) dividir esse segmento em três partes iguais e eliminar a central e c) repetir a construção de b em cada segmento e, assim, sucessivamente e indefinidamente.

Iterações	Figura	Tamanho de Segmentos	Quantidade de Segmentos	Composição da Figura
1				
2				
3				
4				
⋮				
n				

O problema: Quantos elementos terá o Conjunto de Cantor na 100 iteração?

Fonte: autora (2023)

Eis que de fato, será abordado um problema de investigação e construção geométrica, a clássica Curva de Koch, trazendo um único questionamento reflexivo que abordará diretamente os conceitos de formação de uma estrutura fractal. Assim como a árvore fractal, a curva de Koch nestas tarefas, serão desenvolvidas com uso de lápis e régua sem muita precisão, no entanto, o objetivo de construir manualmente visa compreender a dimensão infinita logo nas primeiras iterações. E quanto ao objetivo do problema para a Geometria Fractal, visa apresentar e ilustrar os conceitos de conjuntos auto similares e de dimensões não inteiras, que são fundamentais para a teoria dos fractais.

¹⁰ Cantor (1845-1918) segundo Barbosa (2005, p. 24) foi o primeiro matemático a realizar estudos sobre a teoria dos conjuntos.



O conjunto de Cantor, conhecido também como a poeira de Cantor, no seu tempo não foi considerado um fractal, mas apresenta características bem similares, pois se desenvolve abordando os princípios segundo Barbosa (2005, p. 25): a) considerar um segmento real; b) dividir o segmento em três partes iguais e eliminar a central; e c) repetir a construção *b* em cada segmento e, assim, sucessivamente indefinidamente.

Semelhante ao problema do Conjunto de Cantor, o objetivo do estudo da curva de Koch para o ensino de geometria fractal será para demonstrar como um simples processo iterativo de construção pode gerar um objeto com propriedades fractais, como a autossimilaridade e a dimensionalidade não inteira.

A curva de Koch, inicia com um segmento de reta *L*, que passa por transformações sucessivas da divisão em três partes $L/3$, removendo o segmento do meio e adicionando dois segmentos de $L/3$ concorrentes, formando um triângulo equilátero, que forma uma figura com quatro segmentos de comprimento $L/3$, de modo que comprimento total é multiplicado por $4/3$ em cada passo.

E para todos os segmentos nas próximas iterações são aplicados a mesma regra de repetição, neste sentido a curva de Koch é um exemplo de como a aplicação repetida de uma regra geométrica pode resultar em uma figura de comprimento infinito, apesar de ser limitada em área. Esse exemplo é útil para ilustrar os conceitos de fractais e suas diferenças em relação aos objetos da geometria euclidiana, permitindo uma compreensão prática das características essenciais dos fractais, como a complexidade estrutural e a ideia de dimensão fractal.

Figura 28 - Problema (7) A Curva de Koch

Problema: A curva de Koch é tão grande quanto o universo?
Definição: É uma belíssima curva, conhecida como a curva sem tangente, que pode ser modificada com outras construções análogas.
Construção: I. Considere um segmento de reta. II. Dividir o segmento em 3 partes iguais; substituindo-os por 4 congruentes; intermediário (que seria a base). III. Substituir cada um dos segmentos conforme a regra 2, e assim sucessivamente. Aplicando a estratégia de resolução de problemas de Polya, temos:

1. Analisando a Curva de Koch

Nº de iterações	Figura	Quantidade de segmento	Tamanho do segmento	Perímetro

Fonte: autora (2023)

Nos problemas da Figura 29, temos três problemas. Portanto, neste mesmo problema tem-se também um problema aberto. De acordo com Medeiros (2020, p. 5) “Os problemas



abertos permitem que o aluno tenha condições de resolvê-los. E, sobretudo, por possuírem enunciado curto, os problemas abertos podem permitir ao aluno conquistar as primeiras idéias (sic) em um novo estudo”.

Figura 29 - Problema (8) Problemas abertos

Problema 1. Sobre a Curva de Koch, como você poderia explorar a divisão do seguimento em três partes de maneira que facilite a construção com auxílio de régua e compasso até a quarta iteração.

Problema 2. Na construção da árvore pitagórica, com o auxílio do GeoGebra elabore uma estratégia para explicar a proporção das áreas a cada iteração.

Problema 3. Utilizando as ideias primárias construa o seu próprio fractal e explique as regularidades de autossimilaridade e os conceitos da matemática envolvidos.

Segundo Arsac *et. al.* (1991) “A prática do ‘problema aberto’, em sala de aula, desenvolvida pelo IREM de *Lyon* visa permitir aos estudantes o envolvimento numa abordagem científica, ou seja: tentar - conjecturar - testar - provar.” (Tradução nossa). Os problemas para conjecturar a solução.

Os tipos de problemas aqui abordados são os problemas do tipo padrões; abertos; problemas de construção geométrica e de investigação geométrica. Todos os problemas estão compostos por perguntas ou questionamentos que visam evidenciar os significados em relação aos conceitos da Geometria Fractal.

4.3 O GeoGebra como *Software* Dinâmico para o Ensino de Geometria dos Fractais

As Tecnologias da Informação e Comunicação (TICS), emerge a informática nas instituições de ensino superior como uma ferramenta para o ensino de matemática e suas tecnologias. Segundo Alves e Pereira (2016, p.42) “a informática surge para transpor barreiras, proporcionando desta forma, a possibilidade de desenvolvimento de novas metodologias”, possivelmente essa transposição de barreiras vai além da inovação e interatividade, mas almejar benefícios na relação ensino-aprendizagem em todas as áreas do conhecimento.

Alves e Pereira (2016) consideram que:

Quando pensamos em informática como ferramenta educacional, significa pensá-la como um auxílio que torna possível o aumento da eficiência e consequentemente da qualidade do ensino, tendo-se na produção do conhecimento, uma aprendizagem significativa e a superação de problemas de aprendizagem (Alves e Pereira, 2016, p. 42).



Temos, portanto, que as ferramentas tanto componentes físicos quanto os *Softwares* podem trazer benefícios para o ensino de Matemática em todos os níveis de ensino. Nessas condições, o uso de computadores, celulares e do Sistema GeoGebra, nesta pesquisa, visa torna possível a criação de um espaço propício para o desenvolvimento de ideias e conceitos no estudo de Geometria dos Fractais, tornando o conhecimento significativo para os estudantes.

A Matemática como um componente essencial para a vida, no desenvolvimento intelectual do ser humano está composta no currículo escolar como componente obrigatório na educação básica. Do mesmo modo o uso das tecnologias vem sendo incorporado tanto para o aprimoramento do conhecimento dos estudantes em diversas áreas, mas também no ensino de matemática.

Nos PCNs (1998) do Ensino Fundamental de Matemática indicam que a Matemática para a Construção da Cidadania do estudante, deve almejar contribuições para criação de estratégias, favorecimento da criatividade, enfrentar desafios, entre outros:

Para tanto, o ensino de Matemática prestará sua contribuição à medida que forem exploradas metodologias que priorizem a criação de estratégias, a comprovação, a justificativa, a argumentação, o espírito crítico, e favoreçam a criatividade, o trabalho coletivo, a iniciativa pessoal e a autonomia advinda do desenvolvimento da confiança na própria capacidade de conhecer e enfrentar desafios (Brasil, 2000, p. 31).

Na BNCC (2018) consta como obrigatória no itinerário formativo da Educação Básica o componente curricular de Matemática. Ao longo do tempo, os professores de Matemática têm buscado evoluir o ensino por meio do uso de tecnologias educacionais, como também foram criados programas de incentivo do Governo Federal Programa Nacional de Tecnologia Educacional - ProInfo¹¹.

Quanto aos *Softwares* de Matemática Dinâmica¹² mais populares para o ensino de Matemática em sala de aula, apresentam-se por ordem de usabilidade: *GeoGebra*, *Poly*, *Modelus*, *Cinderella*, *Surfer*, *Morenamets* e *Scratch*.

Em todas as buscas eletrônicas um dos *Softwares* mais conhecidos e indicados para uso no ensino superior é o GeoGebra. Filho e Cruz (2019, p.19) descreve que o GeoGebra "é um *software* de matemática dinâmica, gratuito e multiplataforma, para todos os níveis de ensino,

¹¹ O Programa Nacional de Tecnologia Educacional (ProInfo) foi criado pelo Ministério da Educação, em 1997, para promover o uso da tecnologia como ferramenta de enriquecimento pedagógico no ensino público fundamental e médio. A partir de 12 de dezembro de 2007, mediante a criação do Decreto nº 6.300, foi reestruturado e passou a ter o objetivo de promover o uso pedagógico das tecnologias de informação e comunicação nas redes públicas de educação básica. (fonte: <http://www.fnede.gov.br/programas/proinfo>), acessado em 31/01/2023.

¹² Fonte: <http://www.mat.uc.pt/~mat0616/software.html>, acessado em 31/01/2023.



que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo numa única operação”. O *Software*, já recebeu diversos prêmios na categoria de *software* educacional na Europa e EUA.

O sistema foi criado como tese em 2001 por Markus Hohenwarter e a popularidade vem crescendo desde então. De acordo com o mapeamento dos Institutos GeoGebra, o “GeoGebra é usado em 190 países, traduzido para 55 idiomas” (Filho e Cruz, 2019, p.19). Atualmente o GeoGebra é líder na área de *softwares* de Matemática Dinâmica, apoiando o ensino e a aprendizagem em Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática, possuindo uma comunidade de milhões de usuários em vários países. Filho e Cruz (2019) citam algumas características interessantes a serem destacadas:

- Geometria, Álgebra e Planilha de Cálculo estão interconectadas e são totalmente dinâmicas, logo, se pode modelar as mais várias circunstâncias e sugestões para resolução de problemas;
- Interface fácil de se usar e, ainda assim, com muitos recursos poderosos; Ferramentas de desenvolvimento para a criação de materiais didáticos como páginas web interativas;
- Disponível em vários idiomas, facilitando milhões de usuários ao redor do mundo o acesso ao programa;
- Software de Código Aberto disponível gratuitamente para usuários não comerciais. (Filho e Cruz, 2019, p. 29).

As características destacadas pelos autores Filho e Cruz (2019), tornam, atualmente, o GeoGebra a ferramenta mais acessível para uso livre, com vistas ao desenvolvimento e disseminação do conhecimento da Matemática, principalmente por sua característica dinâmica, por proporcionar a modelagem e a resolução de problemas, integrando componentes poderosos para implementar, inovar e criar modelos de maneira indicativa, de que os conceitos trabalhados possam tornar-se significativo para o estudante.

Milhões de membros dos Institutos GeoGebra, interagem compartilhando experiências sobre capacitação para o uso do Sistema, suporte para estudantes e professores no desenvolvimento de materiais, visando o aprimoramento da Educação Matemática, Ciência e Tecnologia, que procuram promover a colaboração entre os profissionais e pesquisadores. Busca estabelecer parcerias e a formação de uma comunidade de usuários, apoiando e desenvolvendo as seguintes atividades, segundo Filho e Cruz (2019):

- Desenvolver materiais gratuitos para oficinas de GeoGebra;
- Oferecer oficinas para professores e para futuros formadores sobre o GeoGebra;
- Desenvolver e implementar novas funcionalidades do software GeoGebra;
- Desenvolver um sistema de apoio on-line para professores;
- Avaliar e melhorar as atividades de desenvolvimento profissional e materiais;



- Projetar e implementar projetos de pesquisa com o GeoGebra e para os IGI;
- Comunicações em conferências nacionais e internacionais (Filho e Cruz, 2019, p. 31).

Com a integração das comunidades dos institutos GeoGebra, o Brasil compõe essa rede, com pelo menos quatro institutos registrados em página oficial. De acordo com Filho e Cruz (2019) o Brasil possui quatro sedes do Instituto GeoGebra localizadas em:

- Instituto GeoGebra no Rio de Janeiro tem sua sede no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal Fluminense;
- Instituto GeoGebra em Minas Gerais tem sede no Campus do Mucuri da UFVJM;
- O Instituto GeoGebra em São Paulo tem sua sede na Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia da PUC-SP. O grupo de pesquisa Tecnologias e Meios de Expressão em Matemática (Temem) do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP e o Curso de Ciência da Computação têm sob sua responsabilidade o Instituto GeoGebra de São Paulo;
- Instituto GeoGebra em Goiás tem sua sede no Campus Goiânia/Brasil (Filho e Cruz, 2019, p. 32).

Considerando toda essa abrangência de usabilidade, principalmente no meio universitário entre estudantes, professores e profissionais, considera-se que o GeoGebra vem de encontro com as estratégias de ensino e aprendizagem do conteúdo de Geometria dos Fractais, além da vantagem didática que pode oferecer em diferentes perspectivas de observação dos objetos construído, tanto na forma plana quanto tridimensional.

O uso livre traz oportunidades para uso em diversas plataformas de Sistemas Operacionais e ainda conta com o dispositivo *Mobile*. Essa viabilidade do pensamento livre permite o uso com maior segurança e instalação em diversos equipamentos tanto em dispositivos institucionais quanto nos dispositivos pessoais dos estudantes.

4.4 Modelo de Ensino Criativo com Significado em Matemática: Uma Abordagem para a Geometria Fractal

Este modelo pedagógico, denominado “Modelo de Ensino Criativo com Significado em Matemática” (MECSM), tem como objetivo promover uma abordagem de ensino-aprendizagem da Matemática. Focado na Geometria Fractal, ele busca desenvolver a criatividade, a experimentação e a visualização de padrões complexos, conforme evidenciado nesta pesquisa.

O MECSM visa aprofundar a compreensão dos conceitos matemáticos, integrar novos conhecimentos a estruturas cognitivas pré-existentes e estimular o pensamento divergente, preparando o estudante para aplicar a Matemática de forma significativa e inovadora em diversos contextos. O modelo está alicerçado em dois pilares teóricos interdependentes, cujas



intersecções foram minuciosamente analisadas nesta pesquisa: a Aprendizagem Significativa e a Criatividade em Matemática.

Os fundamentos teóricos da Aprendizagem Significativa e da Criatividade em Matemática, serão descritos neste tópico sem o apoio das referências bibliográficas, visto que a descrição completa se encontra nos capítulos 2 e 3 desta pesquisa.

4.4.1 Fundamentos Teóricos da Aprendizagem Significativa

O modelo fundamenta-se na Teoria da Aprendizagem Significativa, que enfatiza a importância de considerar a estrutura cognitiva pré-existente dos estudantes. Parafraseando Ausubel (1980, 2003) a aprendizagem é significativa quando novas ideias interagem de maneira substantiva e não-arbitrária com aquilo que o aprendiz já sabe.

Os conceitos centrais dessa teoria são os subsunçores e os organizadores prévios. O subsunçor é o conhecimento específico pré-existente na estrutura cognitiva que permite dar significado a um novo conhecimento. Já os organizadores prévios atuam como “pontes cognitivas”, recursos instrucionais mais abstratos e inclusivos que precedem o material de aprendizagem, auxiliando na identificação de subsunçores.

O modelo considera diferentes tipos de interação na Aprendizagem Significativa. A aprendizagem por recepção, embora predominante na aquisição de conhecimento cultural, é vista como um processo ativo que requer análise cognitiva, harmonia com ideias existentes e reestruturação do material.

A aprendizagem por descoberta acontece no plano de busca de conteúdo a partir de desafios. A aprendizagem subordinada ocorre quando um novo conhecimento (mais específico) é integrado a um subsunçor (mais geral e inclusivo) já existente na estrutura cognitiva. A aprendizagem superordenada é caracterizada por processos de abstração, indução e síntese, leva a novos conhecimentos que passam a subordinar aqueles que lhes deram origem, exigindo uma estrutura cognitiva mais robusta.

O modelo incorpora os estágios de aquisição, retenção inicial, retenção posterior e esquecimento, tanto para a forma subordinada quanto para a superordenada, entendendo o esquecimento não como perda total, mas como a transformação do novo conhecimento em um novo subsunçor. Os indicadores de Aprendizagem Significativa são: compreensão, integração¹³ e dissociação¹⁴.

¹³ assimilação e reorganização da estrutura cognitiva.

¹⁴ diferenciar o novo conceito dos subsunçores, manipulando-o autonomamente.



Além disso, o modelo incorpora uma visão expandida da Aprendizagem Significativa, que inclui a implementação da interação social e do questionamento, propondo princípios facilitadores, como por exemplo “perguntas ao invés de respostas”, “diversidade de materiais” e algumas vezes a “aprendizagem pelo erro”.

4.4.2 Criatividade em Matemática

A Criatividade em Matemática fortalece o modelo de ensino com as habilidades criativas que pode ser desenvolvida através de um processo ativo e multifacetado. A criatividade no contexto deste modelo será conceituada como a capacidade de gerar ideias originais e significativas, sendo o ápice da solução de problemas e envolvendo novas ideias ou transformações originais.

A criatividade também poderá ser definida como a capacidade de apresentar inúmeras possibilidades de soluções apropriadas para uma situação-problema ou problemas de Matemática, de modo que estas focalizem aspectos distintos do problema e/ou formas diferenciadas de solucioná-lo, especialmente as formas incomuns.

O modelo adota a perspectiva dos quatro estágios interconectados do processo criativo: Preparação (trabalho consciente de compreensão do problema, análise inicial e ativação de conhecimentos prévios); Incubação (processamento inconsciente das informações, reorganização e combinação de novas maneiras); Iluminação (surgimento espontâneo de uma nova ideia ou *insight*, o “Eureka”); e Verificação (organização, teste, validação e refinamento das ideias criativas). Estes estágios são vistos como um processo dinâmico e não-linear, com ciclos de avanço e retorno.

O desenvolvimento desta criatividade será avaliado por habilidades cognitivas como: Fluência (geração de múltiplas ideias e respostas, sejam ideacionais ou associativas); Flexibilidade (capacidade de mudar a direção do pensamento e conceber diferentes categorias de respostas); Originalidade (apresentação de respostas raras, incomuns ou singulares); e Elaboração (facilidade em adicionar detalhes e transformar uma ideia em uma estrutura completa e coerente).

O modelo enfatiza a criação de um ambiente de sala de aula que fomente a criatividade, permitindo ao estudante levantar questões, testar hipóteses, discordar, propor interpretações alternativas e receber tempo e respeito para desenvolver suas ideias.

A intersecção desses pilares constitui um caminho robusto para a construção de conhecimento significativo, onde os momentos de esforço inicial, o processamento



subconsciente, os *insights* e a consolidação por meio da aplicação trabalham em conjunto para que as ideias novas sejam compreendidas e integradas de forma mais duradoura.

Reunindo os princípios da Teoria da Aprendizagem Significativa e da Criatividade em Matemática, o MECSM, constitui-se por cinco pilares teóricos e quatro objetivos principais, conforme Quadro 22:

Quadro 22 - Estágio da Verificação

Pilares	Objetivos
1. Definição da Criatividade em Matemática como solução de problemas originais. 2. Os quatro estágios do processo criativo. 3. Habilidades cognitivas para avaliação da Criatividade em Matemática. 4. Criação de um ambiente de sala de aula que fomenta a criatividade. 5. A intersecção de pilares para a construção de conhecimento significativo	1. Promover uma abordagem de ensino e aprendizagem da Matemática. 2. Desenvolver a criatividade, experimentação e visualização de padrões complexos. 3. Aprofundar a compreensão dos conceitos matemáticos, integrar conhecimentos e estimular o pensamento divergente. 4. Preparar o estudante para aplicar a Matemática de forma significativa e inovadora em diversos contextos.

4.4.3 Fases do Modelo de Ensino Criativo com Significado em Matemática (MECSM)

O MECSM foi organizado em quatro fases didáticas que guiam o processo de ensino-aprendizagem, articulando as dimensões da Criatividade em Matemática e da Aprendizagem Significativa:

Fase 1: Ativação e confronto (Preparação - Criatividade / Aquisição do Significado - Aprendizagem Significativa)

O objetivo desta fase é despertar a curiosidade, ativar subsunçores existentes e iniciar o trabalho com os organizadores prévios. E, apresentar o problema de forma que instigue a investigação inicial e o desenvolvimento da fluência e flexibilidade.

As ações do professor incluem a elaboração de proposta problemas não convencionais, preferencialmente os que admitem mais de uma resposta e formas de solução, que demandem maior possibilidade para recordar conceitos matemáticos fundamentais, os quais servem como organizadores prévios para a Geometria Fractal.

O professor deve planejar um ambiente permissivo e inclusivo, que possibilite ao estudante levantar questões, elaborar e testar hipóteses, e valorizar o tempo de reflexão. É fundamental incentivar a investigação, a experimentação e a visualização, explicitando que o erro e a dúvida são partes integrantes do processo de aprendizagem e não falhas.



O professor deve estar atento aos sinais de “silêncio” ou “confusão” dos estudantes, intervindo com perguntas que os ajudem a externalizar suas dificuldades e a acessar conhecimentos esquecidos, como observado em pesquisas que apontam que estudantes podem apresentar dúvidas, mas não externalizá-las verbalmente, manifestando-se por um silêncio.

Conectar com o cotidiano é outra ação importante que o professor deverá se atentar, estimulando a identificação de padrões e relações Matemáticas em fenômenos do dia a dia, mesmo que de forma inicial, para ativar subsunçores para a Aprendizagem Significativa.

As ações do estudante consistem em confrontar o problema, engajando-se ativamente na tentativa de resolvê-lo, porém não apenas com o objetivo de encontrar a resposta, mas solucionar com significado, acessando e organizando seu conhecimento prévio, iniciando o processo de preparação.

O estudante deve explorar e identificar sequências numéricas, padrões e combinações, mesmo que inicialmente confusas ou parciais, demonstrando fluência ideacional. Ativar subsunçores e organizadores prévios, tentando relacionar o novo material de aprendizagem (Geometria Fractal) com ideias e conceitos já estabelecidos. Quando encorajados, devem externalizar dúvidas e questionamentos.

As expressões narrativas são importantes para que o professor possa reorganizar a estratégias com abordagem dos problemas. Esta pesquisa demonstrou que, nesta fase de preparação, as respostas iniciais concebidas podem ser “confusas” e os estudantes podem manifestar “dúvidas, mas não externalizá-las verbalmente”, refletindo a busca e organização do conhecimento prévio.

Fase 2: Experimentação e processamento inconsciente (Incubação - Criatividade / Retenção Inicial e Dissociação - Aprendizagem Significativa)

O objetivo desta fase é permitir que as ideias “descansem” e amadureçam, incentivando a exploração por tentativa e erro, a manipulação de ferramentas e o desenvolvimento da fluência associativa e flexibilidade, promovendo a retenção inicial do significado e o início da dissociação.

As ações do professor incluem prover ferramentas adequadas, introduzindo o uso de *softwares* como o GeoGebra para a construção de objetos matemáticos (como Triângulo de Sierpinski e Curva de Koch), após a exploração inicial com lápis e papel. É essencial orientar o manuseio de ferramentas, oferecendo instruções claras para a criação de ferramentas no GeoGebra, permitindo que os estudantes transformem ideias complexas em representações



visuais interativas e dinâmicas, considerando as limitações do GeoGebra, o professor pode apresentar outros sistemas que utilizem a linguagem de programação.

O professor deve fomentar a persistência, observando atentamente o “silêncio” como um período de “concentração e possível busca de memórias correlatas”, incentivando a continuidade da exploração e o processo de incubação. Outra ação é estimular a reflexão, propondo questões que direcionem o estudante a considerar diferentes perspectivas para um mesmo problema, promovendo a flexibilidade, como evidenciado pela capacidade de enxergar múltiplas formas de uma única coisa.

As ações do estudante consistem em explorar ativamente os recursos oferecidos pelo professor, engajando-se na experimentação com as ferramentas digitais ou com o papel e lápis, buscando identificar os padrões e realizando tentativas e erros. Devem processar informações inconscientemente, permitindo que a mente reorganize e combine as informações da fase de preparação de maneiras novas e não óbvias, levando a “*insights* em momentos inesperados”.

Ressalta-se que não há momentos em que irão ocorrer os *insights*, mas todo o esforço de preparação se faz visando alcançar este objetivo, de que em um determinado momento as ideias podem interligar-se.

É importante desenvolver habilidades no GeoGebra, superando as dificuldades iniciais de manuseio para manipular e construir os conceitos fractais. O estudante deve iniciar a dissociação, começando a distinguir o novo significado do fractal dos subsunçores, sendo esse um passo essencial na Aprendizagem Significativa.

Deve-se observar a transição para a resolução de problemas com o uso de ferramentas digitais. A dificuldade inicial de manuseio do *software* pode causar desmotivação, mas a persistência em “aprender a ferramenta” para “construir o novo conceito”, reflete a incubação e a retenção inicial.

Fase 3: Descoberta e Significação (Iluminação - Criatividade/Esquecimento de A' e Diferenciação Posterior - Aprendizagem Significativa)

O objetivo desta fase é propiciar o “insight”, ou seja, o momento em que a nova ideia emerge ou a conexão se torna clara e significativa, reformulando a estrutura cognitiva, com o surgimento da originalidade e da diferenciação progressiva.

As ações do professor incluem facilitar a expressão do *insight*, criando oportunidades para que os estudantes verbalizem suas descobertas e “cliques”, como o momento em que “faz sentido” para o estudante. O professor deve guiar a conexão conceitual, auxiliando os



estudantes a relacionarem os conceitos novos (fractais) com os subsunçores existentes (como progressões aritméticas e geométricas).

É importante incentivar a abstração e o questionamento, promovendo a passagem de uma informação isolada para um significado compreendido e estimulando a aprendizagem crítica, que valoriza “perguntas ao invés de respostas”. Outra ação é promover a diferenciação, orientando para que o estudante perceba as nuances e a identidade do novo conceito, por exemplo, que a Geometria Fractal transcende a Geometria Euclidiana.

As ações do estudante consistem em experimentar o “Aha!” ou “Ah tá!”, tendo momentos de compreensão súbita, onde conceitos antes desconexos se unem e fazem sentido na ocasião. Os estudantes também devem reformular conhecimentos, desprendendo-se dos padrões conhecidos para expandir e reformular o saber, como a valorização da Geometria Fractal na natureza ou quando o aprendizado “fez sentido”.

É de suma importância conectar e diferenciar, percebendo a Geometria Fractal como uma área consolidada que reorganiza conhecimentos prévios (por exemplo, que a Geometria Fractal transcende a Geometria Euclidiana, que a álgebra ajuda a entender a Geometria Fractal, ou que a Geometria Fractal engloba outras geometrias). Dados que foram identificados nesta pesquisa e que serão considerados como indicadores para a aprendizagem com significado.

O estudante deve perceber aplicações, compreendendo a aplicabilidade real dos conceitos, como a Progressão Geométrica na “árvore fractal”, onde o estudante verbaliza ter compreendido uma aplicação real.

Esta pesquisa contém indicadores que esse estágio é repleto de exemplos diretos, como estudantes sendo estimulados por pontos que não recordavam ou a percepção sobre a aplicação real de conceitos matemáticos. Descobertas de padrões em fractais ou a valorização de uma nova perspectiva Matemática são sinais claros desta fase.

Fase 4: Validação e inovação (Verificação - Criatividade / Retenção Posterior e Esquecimento de a' e a'' - Aprendizagem Significativa)

O objetivo desta fase é consolidar o significado gerado, permitindo que os estudantes testem, elaborem, refinem e apliquem o novo conhecimento em diversos contextos, culminando na criação de algo original, desenvolvendo a elaboração e a originalidade, e alcançando a retenção posterior e a dissociação plena dos conceitos fractais.

As ações do professor incluem elaboração de proposta de ensino com problemas abertos e desafios de criação, incentivando a criação de fractais próprios, sem a necessidade de



softwares, permitindo a expressão autoral e a originalidade. É importante oferecer oportunidades de aplicação, sugerindo a aplicação dos conhecimentos em domínios diferentes, como a arte ou a programação.

O professor deve facilitar a experimentação, apoiando a “experimentação com diferentes métodos de construção” e a “aplicação de estratégias para promover a compreensão”. Outra ação é promover a validação, ajudando os estudantes a testarem e validarem suas novas ideias retomando sempre os conceitos, confirmando sua integração na estrutura cognitiva, o que vem a fortalecer a retenção posterior do significado.

As ações do estudante consistem em testar e refinar ideias, aplicando o conhecimento adquirido para resolver novos problemas ou para criar algo original, como o ensaio de criação de um fractal. Devem demonstrar fluência e elaboração, utilizando a linguagem Matemática de forma eficaz, elaborando demonstrações algébricas e demonstrando a capacidade de dissociar conceitos com poucas dificuldades, evidenciando o domínio das habilidades criativas.

É fundamental a aplicação em contextos diversos, explorando o conhecimento em domínios como a arte ou a tecnologia, um fator importante é descobrir os talentos na sala de aula, a exemplos os estudantes que têm mais habilidades com esses domínios, artes, jogos, tecnologias entre outros, evidenciando a retenção posterior do significado.

E finalmente, nesta fase o estudante deve formular metaconceitos, alcançando um nível de compreensão que lhe permita “ver” a Geometria Fractal como um “metaconceito” que organiza e relaciona outras geometrias, como exemplo a Geometria Fractal como um conceito abrangente ou como a Geometria do Universo, onde o conceito de fractal está plenamente formulado e se torna um novo e poderoso subsunçor.

A pesquisa mostra que ensaios de construção de fractais e desafios de criação são exemplos claros deste estágio, assim como a criação de obras próprias e a aplicação da Geometria Fractal na arte e na linguagem de programação.

4.4.4 Princípios Metodológicos Transversais

Além das fases específicas, o MECSM incorpora princípios metodológicos que permeiam todo o processo:

A **Aprendizagem Baseada em Problemas** é um princípio central, onde o ponto de partida são sempre problemas desafiadores que exigem investigação ativa e não têm soluções óbvias, promovendo a Criatividade em Matemática. A Valorização dos conhecimentos prévios



(Subsunçores) e os organizadores prévios são fundamentais para estabelecer “pontes cognitivas”.

A Integração Tecnológica envolve o uso estratégico de *softwares* como o GeoGebra e outras ferramentas digitais para visualização, experimentação dinâmica e construção de modelos matemáticos, facilitando a compreensão e a integração de conceitos. A plataforma pode, inclusive, permitir o uso de outros *softwares* para simulação.

A Aprendizagem Experiencial valoriza as atividades “mãos à obra”, tanto com papel e lápis quanto com *softwares*, para desenvolver o raciocínio e a compreensão, conectando “pensamento, sentimento e ação”. O Papel do Professor como facilitador é essencial, atuando como guia, mentor e observador, estimulando a autonomia dos estudantes e criando um ambiente de apoio, orientando a “assimilação dos significados”.

A Ênfase na Comunicação Matemática incentiva a verbalização, descrição e justificação das ideias, seja por meio de linguagem natural ou de símbolos matemáticos, contribuindo para a fluência e elaboração. As conexões interdisciplinares são incentivadas, explorando as relações da Geometria Fractal com a natureza, a arte, a biologia e outras áreas do conhecimento, enriquecendo o significado dos conceitos.

Por fim, o Fomento ao Questionamento e à Reflexão Crítica estimula o estudante a questionar, explorar o erro e a “desaprender” quando necessário, refletindo sobre a “incerteza do conhecimento”.

4.4.5 Impactos e resultados esperados

A implementação do MECSM, conforme estudos, tende a gerar os seguintes impactos e resultados nos estudantes:

O Desenvolvimento da Criatividade em Matemática é esperado, com o aumento da fluência (ideacional e associativa) na identificação de padrões, maior flexibilidade na abordagem de problemas, maior originalidade nas soluções e melhor elaboração de ideias complexas. Esta pesquisa demonstra em seus estudos o progresso dos estudantes nas dimensões da Criatividade em Matemática.

O Aprofundamento da Aprendizagem Significativa ocorre com maior compreensão dos conceitos de Geometria Fractal, melhor integração de novos conhecimentos aos subsunçores existentes e maior capacidade de dissociar e diferenciar conceitos similares. As análises qualitativas e quantitativas dos estágios de Aprendizagem Significativa corroboram esse avanço.



Um Aumento da Motivação e Engajamento é observado, pois o uso de ferramentas digitais e problemas desafiadores torna a aprendizagem mais dinâmica e interessante, despertando o prazer em construir e o orgulho pela criação. A “interatividade e criatividade do GeoGebra” é vista como um “ponto forte”.

O Fortalecimento do Raciocínio Lógico e Observacional acontece à medida que a identificação de padrões e a construção de modelos matemáticos aprimoram o pensamento crítico e a capacidade de observação, resultando no aumento da sensibilidade para identificar padrões, modelos de funções, progressões, generalização de procedimentos.

A Percepção Metaconceitual é desenvolvida, com a Geometria Fractal sendo compreendida como um conceito abrangente que integra e reorganiza outras geometrias, tornando-se um “metaconceito” na estrutura cognitiva do estudante.

Por fim, a Aplicabilidade do Conhecimento é ampliada, pois os estudantes desenvolvem a capacidade de aplicar os conceitos de Geometria Fractal em novos contextos, incluindo o ensino em sala de aula, arte, tecnologia ou outras áreas.

4.4.6 Considerações para implementação

O modelo reconhece desafios na implementação, como a “dificuldade de manuseio de ferramentas” em *softwares* e a “turma não nivelada em tecnologia”. Assim, sugere-se:

A Formação Docente, oferecendo cursos de preparação para professores no uso de *softwares* e nas metodologias de ensino criativo e significativo. A infraestrutura deve ser garantida, buscando acesso a laboratórios de informática e recursos tecnológicos para todos os estudantes, superando a “barreira tecnológica em escolas públicas”.

A Adaptação Curricular é importante, considerando a inclusão de conceitos de Geometria Fractal na educação básica, utilizando abordagens simples e conectando-as com o currículo existente. A criação de um ambiente de apoio que promova a espontaneidade, iniciativa e expressão individual, recompensando a realização criativa, é essencial.

4.4.7 Conclusão

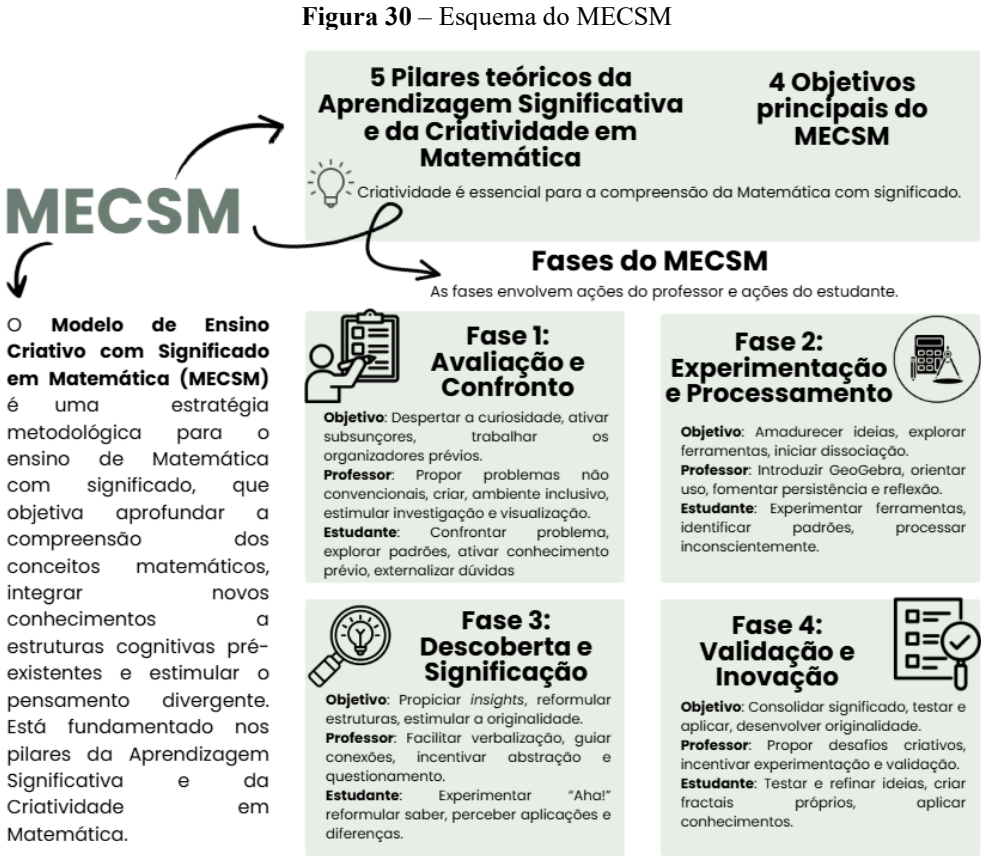
O “Modelo de Ensino Criativo com Significado em Matemática” proposto oferece um caminho promissor para o ensino da Geometria Fractal e, por extensão, de outros tópicos matemáticos. Ao valorizar a criatividade do estudante e ao focar na construção ativa de



significados, ele transcende as abordagens tradicionais, promovendo uma aprendizagem mais profunda, duradoura e engajadora.

A correlação positiva entre a Criatividade em Matemática e a Aprendizagem Significativa reforça a validade e o potencial do MECSM para transformar a experiência educacional em Matemática.

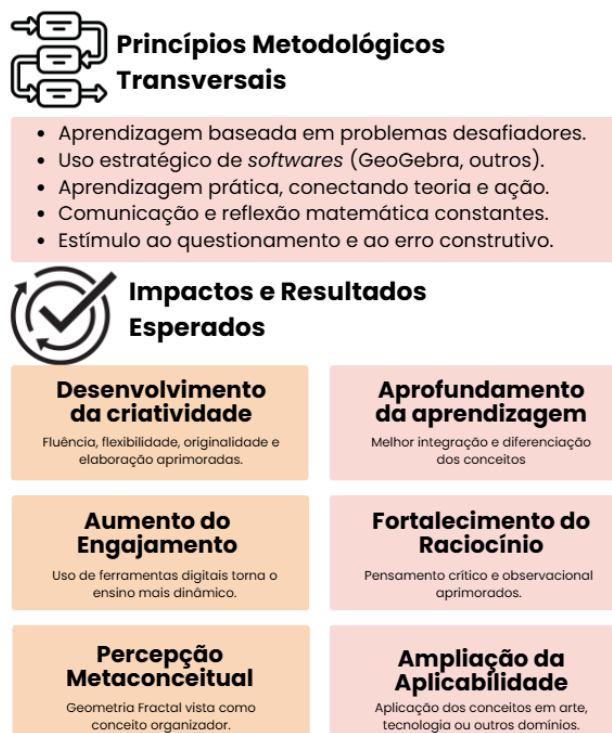
O MECSM representa um avanço conceitual que, se aplicado, poderá não apenas otimizar a compreensão da Geometria Fractal, mas também inspirar uma nova geração de pensadores e criadores matemáticos, aptos a desvendar a complexidade do mundo que os cerca. Segue o esquema do MECSM:



Fonte: autora (2025)



Figura 31 – Esquema do MECSM (continuação)



Fonte: autora (2025)



CAPÍTULO 5 - METODOLOGIA DA PESQUISA

Neste capítulo foram elaborados quatro subtópicos organizados em abordagem da pesquisa, que contextualizam o modelo adotado para realizar a investigação, trazendo os conceitos da pesquisa qualitativa e a característica dos métodos e técnicas da pesquisa-ação utilizadas na construção do processo de desenvolvimento. E, tópicos que abordam os critérios de seleção dos participantes, a descrição do campo da pesquisa e a metodologia de análise dos dados e metadados.

5.1 Abordagem da Pesquisa

Para Minayo (2016, p. 17) a metodologia de pesquisa “inclui simultaneamente a teoria de abordagem (o método), os instrumentos de operacionalização do conhecimento (as técnicas) e a criatividade do pesquisador (sua experiência, sua capacidade crítica e sua sensibilidade)”. Nesta definição a autora, descreve a metodologia de pesquisa como um processo dinâmico e reflexivo no âmbito das concepções teóricas, científicas, práticas, conceituais, entre outros que vão além da técnica.

A abordagem qualitativa, segundo Creswell (2014), começa:

[...] com pressupostos e o uso de estruturas interpretativas/teóricas que informam o estudo dos problemas de pesquisa, abordando os significados que os indivíduos ou grupos atribui a um problema social ou humano. Para estudar esse problema, os pesquisadores qualitativos usam uma abordagem qualitativa da investigação, a coleta de dados em um contexto natural sensível às pessoas e os lugares e estudo e a análise dos dados que é tanto indutiva quanto dedutiva e estabelece padrões ou temas. O relatório final ou a apresentação inclui as vozes dos participantes, a reflexão do pesquisador, uma descrição complexa e interpretação do problema e a sua contribuição para literatura ou chamado à mudança (Creswell, 2014, p. 49-50).

A primeira frase desta citação traz ênfase “os significados que os indivíduos ou grupos atribui a um problema social ou humano”. O que vem de acordo com a técnica da pesquisa-ação como metodologia estratégica, modelo no qual delineou-se esta investigação, visando desenvolver um trabalho colaborativo.

Do mesmo modo, de acordo com a definição de Creswell, o escopo do procedimento de coleta está definido na área da Educação Matemática, em um contexto natural da sala de aula, como o campo da situação real, propondo uma estratégia que tanto a pesquisadora quanto os participantes atuem ativamente no processo de investigação para a solução do problema da



pesquisa. Thiollent (2011), apresenta o conceito de pesquisa-ação, em forma de ação participativa e colaborativa, afirmando que:

[...] é um tipo de pesquisa social com base empírica que é recebida e realizada em estreita associação com uma ação ou com a resolução de um problema coletivo e no qual os pesquisadores e os participantes representativos da situação ou do problema estão envolvidos de modo cooperativo ou participativo (Thiollent, 2011, p. 20).

Os aspectos da pesquisa-ação são puramente qualitativos e de acordo com Thiollent (2011, p.24) apresenta condição necessária na “elucidação dos objetivos, [...] da relação existente entre os objetivos de pesquisa e os objetivos da ação”. Para isso o autor faz referência a dois tipos de objetivos: o objetivo prático e o objetivo de conhecimento.

O objetivo prático visou contribuir com o problema geral da pesquisa no levantamento de possíveis “soluções”, buscando ações correspondentes para a compreensão do desenvolvimento da Criatividade em Matemática. E quanto ao objetivo de conhecimento, visou a obtenção de informações sobre a aprendizagem da Geometria dos Fractais, aumentando o conhecimento conceitual e os significados.

Trazendo o cenário da pesquisa para este contexto, temos que, esta pesquisa foi desenvolvida com vistas a transformar o olhar científico da pesquisadora e de uma turma de futuros professores de Matemática do IFRR *campus* Boa Vista, agregando significados por meio dos conhecimentos associados a um ideal concebido de modo aberto e participativo, nas aulas do componente curricular de Aplicações da Geometria dos Fractais na Educação Básica.

Para Thiollent (2011, p. 26-27) na pesquisa-ação existem: “[...] objetivos práticos de natureza bastante imediata: propor soluções quando for possível e acompanhar ações correspondentes, ou, pelo menos, fazer progredir a consciência dos participantes no que diz respeito à existência de soluções e de obstáculos”.

Na frase de Thiollent no “fazer progredir a consciência dos participantes”, podemos observar que a pesquisa-ação tem como premissa realizar uma transformação nos participantes e no ambiente local de desenvolvimento da pesquisa. O que também podemos observar nas concepções e no olhar da pesquisa-ação crítica de Ghedin e Franco (2011, p.213), corroboram para este mesmo objetivo “a pesquisa-ação crítica não pretende apenas compreender ou descrever o mundo da prática, mas sobretudo transformá-lo”. E para complementar, encerramos esse tópico, com as concepções de Nacarato (2000), corroborando acerca das transformações por meio da pesquisa-ação:



A busca constante do(a) professor(a) por situações de aprendizagem significativa dos alunos, vai exigir dele/a uma ação conjunta, partilhada, que culminará na produção coletiva de conhecimento, bem como da avaliação contínua dessa produção com vistas a novas transformações, num movimento de ação/reflexão/ação (Nacarato, 2000, p.23-24).

As atividades desenvolvidas para a turma foram pensadas com a proposta de conter a contribuição dos participantes para a melhoria do material a partir das contribuições, sugestões e desafios encontrados.

5.1.1 Caracterização da Metodologia

A pesquisa qualitativa nesta investigação foi fundamentada pela técnica da pesquisa-ação. No tópico acima, considera-se o conceito de Thiollent para a pesquisa-ação no contexto geral, mas nesse segundo olhar, traz uma abordagem conceitual do ponto de vista científico:

[...] a pesquisa-ação é uma proposta metodológica e técnica que oferece subsídios para organizar a pesquisa social aplicada sem os excessos da postura convencional ao nível da observação, processamento de dados, experimentação etc. Com elas introduz uma maior flexibilidade na concepção e na aplicação dos meios de investigação concreta (Thiollent, 2011, p. 30).

Na visão de Thiollent a pesquisa-ação é uma proposta metodológica e técnica. E na concepção de Nacarato (2000, p. 33) “uma pesquisa pode ser qualificada de pesquisa-ação quando houver realmente uma ação por parte das pessoas ou grupos implicados no problema sob observação”. Na citação a autora expressa “realmente uma ação por parte das pessoas”, a ação ou as ações quanto ao problema da pesquisa, converge para um problema no âmbito do setor da Educação e mais precisamente na Educação Matemática, voltada para a Criatividade em Matemática e a Aprendizagem Significativa de conceitos da Geometria dos Fractais para estudantes da Licenciatura em Matemática.

No escopo desta investigação, a colaboração ocorreu de forma conjunta entre a pesquisadora e os estudantes do curso de Licenciatura em Matemática. O material utilizado foi elaborado pela pesquisadora, alinhado ao paradigma da pesquisa-ação estratégica e fundamentado nos pressupostos teórico-metodológicos que norteiam a presente tese.

A pesquisa-ação estratégica, ocorre quando a “transformação for previamente planejada sem a participação dos sujeitos e apenas o pesquisador acompanhar os efeitos e avaliar os resultados de sua aplicação” (Ghedin e Franco, 2011, p.213).



Reunindo as concepções dos autores Thiollent (2011), Nacarato (2000) e Ghedin e Franco (2011), a investigação aborda desde o ponto de partida a observação, reunião/seminário de compartilhamento de ideias com temas da Aprendizagem Significativa e da Criatividade em Matemática. Almejou-se uma construção conjunta da pesquisadora e dos demais participantes.

O modelo da pesquisa-ação estratégica foi o modelo, que objetivou a transformação do pensamento matemático da pesquisadora e dos participantes em pensamento criativo matemático, com ênfase na estratégia didática com atividades de resolução de problemas de Geometria dos Fractais fundamentada na Teoria da Aprendizagem Significativa.

A escolha da técnica de pesquisa-ação estratégica para investigar o processo de assimilação da Aprendizagem Significativa por meio da resolução de problemas, visou alcançar uma Aprendizagem Significativa Receptiva, mas não desconsiderando a possibilidade por descoberta. Teve como finalidade gerar reflexões sobre a Aprendizagem Significativa e a Criatividade em Matemática, contribuindo para a formação de futuros(as) professores(as).

Para Ghedin e Franco (2011), a pesquisa-ação deve implicar a ação ativa dos participantes:

[...] as origens da pesquisa-ação com Lewin apontam para uma investigação cuja meta é a transformação de determinada realidade, implicando diretamente a participação dos sujeitos envolvidos no processo, atribuindo ao pesquisador os papéis de pesquisador e de participante e ainda sinalizando para a necessária emergência dialógica da consciência dos sujeitos, na direção da mudança de percepção e de comportamento (Ghedin e Franco, 2011, p.216).

Diante do exposto, ressalta-se a escolha da técnica da pesquisa-ação, considerando que, embora a pesquisa-ação possa ser vista como uma forma arbitrária de desenvolvimento de pesquisa, ela exige rigor científico e metodológico, especialmente quando associada à Resolução de Problemas. Neste sentido, foi delineado um ponto de partida, induzido pela pesquisadora, que seguiu a partir dos processos de recepção e ensaios por descoberta da Aprendizagem Significativa, culminando para uma visão emancipadora.

O que compõe mais uma característica desta técnica de pesquisa, conforme Ghedin e Franco (2011, p.214) a pesquisa-ação “[...] leva em conta a voz do sujeito, sua perspectiva, seu sentido, mas não apenas para registro e posterior interpretação do pesquisador [...]”. Seguindo a orientação dos autores, os materiais foram elaborados com problemas e atividades, as quais os participantes puderem sugerir melhorias.

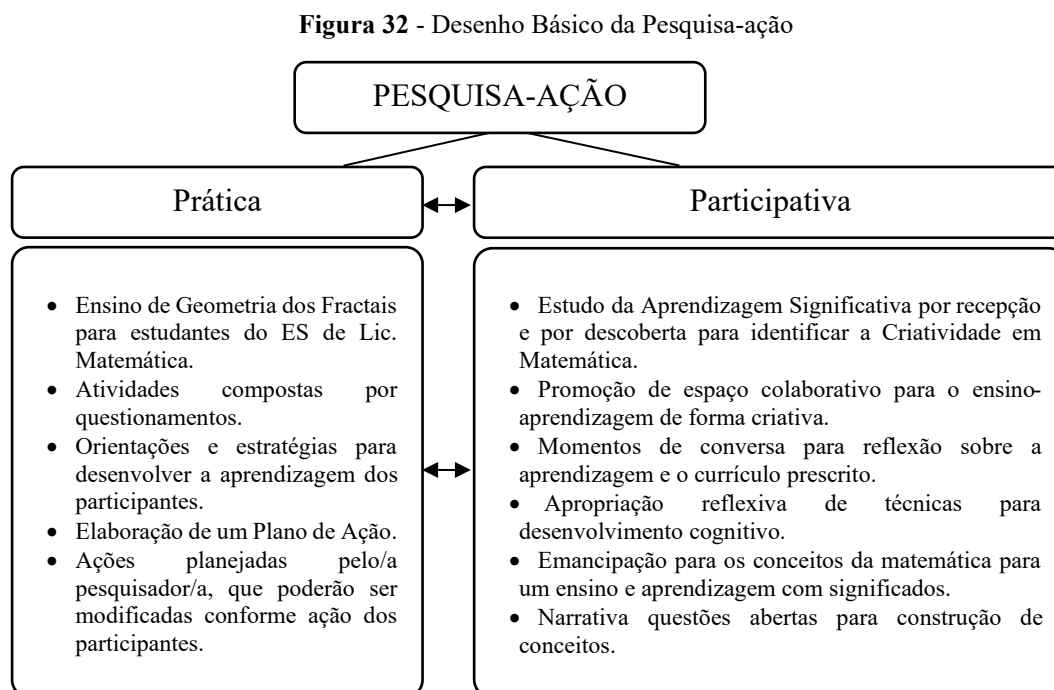


5.1.2 Desenho Básico da Pesquisa-ação

Na elaboração do desenho básico da pesquisa-ação desta investigação, buscou-se observar os objetivos de conhecimento potencialmente alcançáveis na concepção de Thiollent (2011) resumidos em seis pontos que as pesquisadoras consideraram ao elaborar a proposta de pesquisa no modelo pesquisa-ação:

- a) coleta de informação original acerca de situações ou de atores em movimento.
- b) a concretização de conhecimentos teóricos, obtida de modo dialogado na relação entre pesquisadores e membros representativos das situações ou problemas investigados.
- c) a comparação das representações próprias aos vários interlocutores, com aspecto de cotejo entre saber formal e saber informal acerca da resolução de diversas categorias de problemas.
- d) a produção de guias ou regras práticas para resolver problemas e planejar as correspondentes ações.
- e) os ensinamentos positivos ou negativos quanto a conduta da ação e suas condições de êxito.
- f) possíveis generalizações estabelecidas a partir de várias pesquisas semelhantes e com aprimoramento da experiência dos pesquisadores (Thiollent, 2011, p. 49).

Considerando, os objetivos potencialmente alcançáveis de Thiollent, as ações da pesquisa-ação foram transformadas em duas formas de ação característica da pesquisa-ação, desenvolvidas de forma paralela e complementar entre ambas com ação dos participantes, as formas prática e participativa. Vejamos o esboço na Figura 32:



Fonte: Adaptação, Sampieri, *et. al* (2011, p. 516): desenhos fundamentais de Creswell.



A **pesquisa-ação estratégica** é um método de pesquisa que une a prática à teoria para resolver problemas sociais ou organizacionais de forma colaborativa. Sua aplicação é estratégica por se concentrar na melhoria contínua de uma situação específica, envolvendo a reflexão constante dos pesquisadores e participantes no ciclo de planejamento, intervenção, observação e reflexão.

E para complementar o fluxo das principais ações desta investigação delineada na pesquisa-ação, considerou-se, cinco dos princípios para fundamentar a epistemologia da metodologia da pesquisa-ação, elaborados por Ghedin e Franco (2011):

- 1) a práxis social é ponto de partida e de chegada na construção/ressignificação do conhecimento;
- 2) o processo de conhecimento desenvolve-se nas múltiplas articulações com a intersubjetividade em dinâmica construção;
- 3) a pesquisa-ação deve ser realizada no ambiente natural da realidade a ser pesquisada;
- 4) a flexibilidade de procedimentos é fundamental e a metodologia deve permitir ajustes e caminhar de acordo com as sínteses provisórias que se vão estabelecendo no grupo;
- 5) o método deve contemplar o exercício contínuo de espirais cíclicas: planejamento→ ação→ reflexão→ pesquisa→ ressignificação→ replanejamento→ ações cada vez mais ajustadas às necessidades coletivas→ reflexões etc. (Ghedin e Franco, 2011, p.223-224).

Ghedin e Franco (2011, p. 236) afirmam que “o desenvolvimento da pesquisa-ação, a ênfase na flexibilidade, nos ajustes progressivos aos acontecimentos, fortalecendo a questão da pesquisa com ação”.

Do mesmo modo, considerou-se de acordo com Thiollent (2011) acerca do problema da pesquisa como principal no desenvolvimento e transformação dos saberes:

[...] o problema é de transformação colocado como passagem de uma situação inicial para situação final (ou desejada) é definido em função da estratégia ou dos interesses dos atores. O que exige que as normas ou critérios sejam constantemente evidenciados, tanto na busca de soluções quanto na seleção de soluções a partir das quais serão desencadeadas determinadas ações (Thiollent, 2011, p. 63).

Logo, o problema desta pesquisa foi o objeto que teve a função de levar a transformação do pensamento conceitual para o pensamento crítico e emancipatório no desenvolvimento do ensino e aprendizagem da Geometria Fractal por recepção ou por descoberta, com significados para a vida profissional docente.

A pesquisa foi organizada em duas fases de investigação envolvendo as principais diretrizes da pesquisa-ação estratégica e a composição da Teoria da Aprendizagem Significativa:



- a) fase 1 (exploratória): Aprendizagem Significativa Subordinada.
- b) fase 2 (o lugar da teoria): Aprendizagem Significativa Sobreordenada.

Na primeira, propôs-se desenvolver problemas com o objetivo de identificar os subsunçores e as aplicações realizadas no material de preparação dos organizadores prévios para a Geometria Fractal. Ainda nesta fase, buscou-se ensaiar as habilidades da Criatividade em Matemática para desenvolver o estágio da elaboração.

E na segunda, propôs-se desenvolver problemas simples de fractais, problemas abertos e entrevista semiestruturadas com o objetivo de compreender e identificar o desenvolvimento da Criatividade em Matemática na Aprendizagem Significativa. A figura 33, ilustra o resumo deste fluxo de pesquisa:

Figura 33 – Fases da Pesquisa-Ação Estratégica

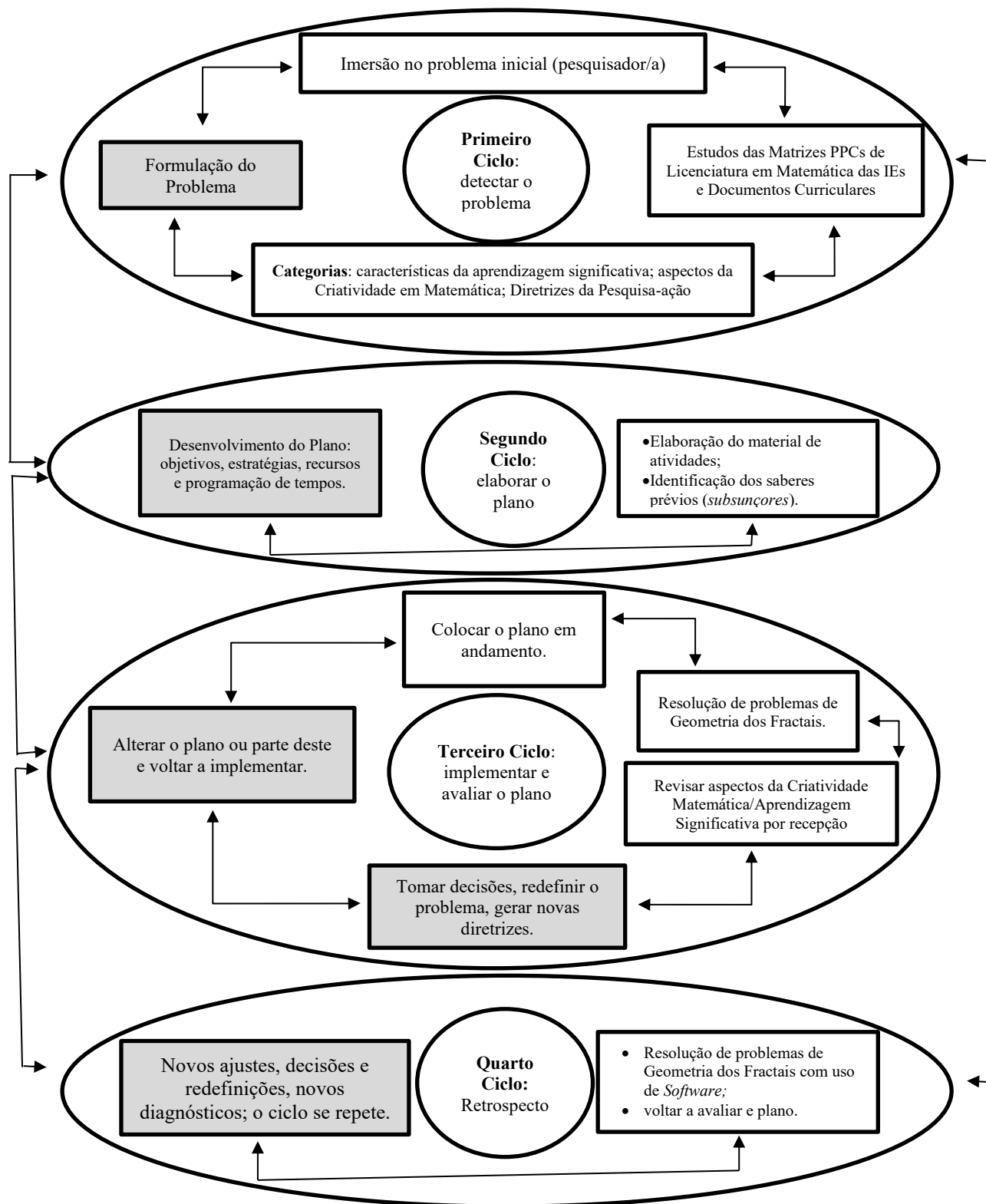


Fonte: autora, 2023



Para desenvolver as fases da pesquisa, as atividades foram organizadas em ciclos do primeiro ao quarto seguindo a estratégia a heurística da resolução de problemas (Figura 34):

Figura 34 - Fluxo da Pesquisa-ação: principais ações



Fonte: Adaptação, Sampieri, *et. al* (2011, p. 517)



A estratégia a heurística envolve os movimentos que podem levar a nova tomada de decisões ao perpassar de um ciclo para o outro. Cada ciclo teve o objetivo de ser avaliado de modo que seu resultado implique no próximo:

- a) Primeiro Ciclo: identificar o problema, momento em que se utilizou diversos estudos para a formulação do problema da pesquisa, neste ciclo foram estudados os aspectos teóricos e metodológicos da Aprendizagem Significativa, Criatividade em Matemática, o contexto da pesquisa entre outros instrumentos pertinentes;
- b) Segundo Ciclo: desenvolvimento do plano envolveu objetivos, estratégias, recursos e programação de tempos;
- c) Terceiro Ciclo: implementação e avaliação do plano, neste ciclo ocorreu a fase da coleta de dados. Destaca-se que a coleta de dados não ocorreu de maneira isolada, mas sendo assegurada pelo desenho da pesquisa e pelas fases de acompanhamento.
- d) Quarto Ciclo: Retrospecto, este ciclo representa a elaboração do relatório de análise da pesquisa.

A conclusão do quarto ciclo, as análises do esquema deverão responder cada um dos ciclos anteriores, quantos aos aspectos da compreensão, a interpretação do plano e validação.

Unindo os objetivos potencialmente alcançáveis de Thiollent e os princípios para fundamentar a epistemologia da metodologia da pesquisa-ação de Ghedin e Franco, foi elaborado o fluxo das principais ações no desenvolvimento da pesquisa-ação.

5.1.3 Procedimentos para a geração de registro dos dados

A pesquisa foi aprovada em 29 de setembro de 2023 pelo CEP/UFRR, sob CAAE: 74339123.7.0000.5302 e foi desenvolvida no semestre 2023.2 com uma turma de Licenciandos de Matemática do IFRR *Campus* Boa Vista, por meio da abordagem qualitativa. Na concepção de Creswell (2014, p. 121) a coleta de dados “significa obter permissões, conduzir uma boa estratégia de amostragem qualitativa, desenvolver meios para registrar as informações e prever questões éticas que possam surgir”. Nesta citação, observou-se que a coleta de dados é um processo criterioso que agrega muitas responsabilidades para o pesquisador.

O processo de coleta desta investigação, compôs-se pelo desenho e objetivo da pesquisa-ação estratégica. Como já mencionamos em outros tópicos, a pesquisa-ação tem por finalidade resolver problemas e melhorar práticas. Na dimensão metodológica, a pesquisa-ação de acordo com Ghedin e Franco (2011):



[...] passa se fundamentalmente a exigência de procedimentos articuladores da ontologia com a epistemologia da pesquisa-ação. Independentemente das técnicas a serem utilizadas, há que caminhar para uma metodologia que instaure no grupo uma dinâmica de princípios e práticas dialógicas, participativas e transformadoras (Ghedin & Franco, 2011, p.223).

Nesta dimensão metodológica da pesquisa-ação na concepção de Ghedin e Franco (2011), os trabalhos foram desenvolvidos por meio de material de atividades composto por problemas, com o objetivo de colaborar para a reflexão do futuro professor de Matemática, com questionamentos elaborados pela pesquisadora:

- a) Problemas para identificar os saberes prévios (sequências, triângulos de pascal, geometria plana e espacial).
- b) Resolução de Problemas com lápis e papel (elaboração de fractais simples) e uso de *Softwares* dinâmico de Matemática (elaboração de fractais clássicos e de livre criação dos participantes).
- c) Entrevista semiestruturada individual.

Por meio das atividades a pesquisadora desenvolveu as estratégias da pesquisa-ação, unindo as características da Aprendizagem Significativa e da Criatividade em Matemática, a indução da pesquisadora foi com mero intuito que os participantes obtenham uma aprendizagem com visão crítica e criativa com significado.

Quanto a entrevista semiestruturada foi realizada após o período das atividades práticas na sala de aula, em local reservado no *campus*, onde esteve presente somente a pesquisadora e um participante por vez. O momento foi registrado com captura de gravação de áudio.

Esperava-se que no período da investigação houvesse maior envolvimento de docentes do curso de Licenciatura em Matemática do IFRR *Campus* Boa Vista, considerando a possibilidade de alcançar mudanças nesse grupo de professores, conforme a afirmação de Nacarato (2000, p.38) “o agente externo na pesquisa-ação, tem o papel de gerar professore(a)s reflexivo(a)s”. No entanto, o período escolhido não foi propício a participação dos demais docentes do curso, por estarem envolvidos com outras atividades do *campus*. Porém, os professores participaram da apresentação da pesquisa no colegiado e fizeram contribuições na elaboração das atividades puderam contribuir na melhoria dos problemas.

Para garantir a validação dos dados quanto a credibilidade e a confiabilidade, a presença da pesquisadora foi desenvolvida de forma que suas crenças e opiniões não interferissem, em preferências dos participantes. Todos os participantes tiveram a mesma atenção conforme o seu nível de dificuldades para requisitar a presença, mesmo que suas opiniões e atitudes manifestasse contrárias ao objetivo da pesquisa.



5.2 Critérios de seleção dos participantes

A amostra da pesquisa foi não-probabilística e intencional, voltada essencialmente para a pesquisa qualitativa e do tipo teórica ou conceitual, no entanto, a pesquisa não é puramente teórica, envolve a coleta de dados. A pesquisa foi realizada no período de 2023.2, com uma turma de futuros professores Matemática do IFRR, regularmente matriculados no componente eletivo de Aplicações da Geometria dos Fractais na Educação Básica do Curso de Licenciatura em Matemática do IFRR *campus* Boa Vista.

Como relação às estratégias de amostragem, nos estudos qualitativos Sampieri (2011) apresenta algumas definições que complementam este estudo na descrição da unidade de análises classificadas da forma:

- 1) classifica a turma de licenciatura em Matemática do IFRR, como um grupo de indivíduos na ocasião únicos, diferentes e acessíveis;
- 2) os indivíduos são representantes do Curso de Licenciatura em Matemática do IFRR, considerando-se um grupo social de uma mesma cultura; e
- 3) grupo escolhido faz parte de um sistema com critérios estabelecidos, em especial por estarem cursando Licenciatura em Matemática e especificamente a disciplina de Geometria dos Fractais.

Como base na fundamentação metodológica de Sampieri (2011), observou-se a existência de vários tipos de desafios típicos na seleção do grupo (indivíduos), como por exemplo, identificar os informantes apropriados e ganhar sua confiança. Como também garantir a homogeneidade da amostra, com finalidade de que outras características não representem distração. Neste sentido, os licenciandos foram considerados como grupo apropriado, tendo já cursado outro componente curricular com a pesquisadora, os quais já estavam familiarizados com a presença.

Quanto às estratégias de amostragem na pesquisa qualitativa desta investigação, compreende-se que na pesquisa-ação o grupo escolhido é considerado uma amostra representativa, enquanto, que pela fenomenologia está caracterizada pelos critérios estabelecidos como: acadêmicos de curso de Licenciatura e Componente Curricular de Aplicações da Geometria dos Fractais na Educação Básica em um mesmo contexto.

A amostra dos participantes não caracteriza apenas um grupo de onde serão coletados os registros, mas objetiva-se a participação ativa destes no processo de investigação, bem como a pesquisadora na atuação com os participantes. Thiollent (2011) mostra que os participantes são fundamentais para que a pesquisa ocorra dentro dos seus aspectos característicos:



[...] a pesquisa-ação não deixa de ser uma forma de experimentação em situação real, na qual os pesquisadores intervêm conscientemente. Os participantes não são reduzidos a cobaia e desempenham um papel ativo. Além disso, na pesquisa em situação real, as variáveis não são isoláveis. Todas elas interferem no que está sendo observado (Thiollent, 2011, p. 28).

A escolha da amostragem é fator de extrema importância na pesquisa científica e o método de registros dos dados, que nesta investigação foi estruturado em dois instrumentos, como: material (atividades de resolução de problemas) e entrevista semiestruturada. Os instrumentos foram associados aos requisitos essenciais de confiabilidade e validade.

Quadro 23 - Participantes da Pesquisa

Participante	Código	Quantidade
Estudantes do Curso de Lic. Matemática regularmente matriculados em Eletiva II 2023.2	E1 até E7	07

Fonte: autora (2023)

Quanto às questões éticas, todos registros coletados ficarão sob guarda da pesquisadora que se compromete manter sigilo e mesmo em publicações parciais não serão reveladas as identidades dos participantes, exceto com o consentimento assinado. A pesquisa não colocou participante em risco de saúde física, mas pode ter se tornado invasiva a ponto de gerar constrangimento, na coleta de dados das vivências na coleta dos saberes prévios e no desenvolvimento do novo conhecimento.

Ressalta-se que a pesquisa não teve a intenção de criar relações de poder sobre os participantes ou torná-los vulneráveis, portanto, foram deixados livre para participar ou solicitar o desligamento em qualquer tempo durante o processo. Todos os instrumentos utilizados foram comuns de uso pedagógico e não apresentaram risco de acidentes ou de contaminação.

Os processos foram compostos por ações e questões éticas. Antes de iniciar o estudo, foram realizados diversos diálogos no âmbito dos setores do IFRR *campus* Boa Vista em sete ações até a submissão ao Comitê de Ética. Na iniciação da condução do estudo junto aos estudantes e durante a coleta de dados, foram utilizadas as ações pertinentes ao respeito ético.

Quanto a análise dos dados e os relatos, o seguimento de ações imparciais e não fazer uso de qualquer forma de interferência para a alteração dos resultados. E por fim, garantir que a pesquisa seja tornada pública resguardando a privacidade dos participantes e da instituição.

Para apresentar as soluções possíveis quanto às questões éticas, elaborou-se uma tabela como forma de demonstrar os caminhos de controle para eventuais situações, nos baseamos no modelo implementado por Creswell (2014, pp.59-60), simplificado para esta investigação



Quadro 24, essas são as principais diretrizes cautelares para o direcionamento e compromisso ético que serão seguidos pela pesquisadora em seis processos.

Quadro 24 - Caminhos para evitar possíveis questões éticas

Onde no processo de pesquisa ocorre	Ações para tratar as questões éticas
Antes de conduzir o estudo	1) Aprovação do/a Orientador/a; 2) Solicitar autorização da Direção Geral do <i>Campus</i> Boa Vista; 3) Submissão do Projeto ao Comitê de Ética; 4) Apresentação ao Colegiado de Matemática; 5) Apresentar o Plano de Ação na Coordenação do Curso; 6) Permissão dos participantes; 7) Solicitar ciência dos participantes sempre houver possibilidade de publicação (autorias).
Iniciando a condução do estudo	1) Apresentação para os participantes o propósito do estudo; 2) Não pressionar os participantes a assinarem formulários de consentimento; 3) Respeitar as normas e estatutos das sociedades nativas; 4) Ser sensível a situações vulneráveis durante o processo.
Coletando dados	1) Respeitar o local e perturbar o menos possível; 2) Evitar ludibriar os participantes; 3) Respeitar os participantes, como colaboradores do processo; 4) Não “usar” os participantes, coletando os dados e deixando o local sem dar retribuição.
Analisando os dados	1) Ser parcial no trato das ações dos participantes e não tomar partido; 2) Trazer a realidade dos dados, mesmo que sejam negativos; 3) Respeitar o tempo e a privacidade dos participantes.
Relatando os dados	1) Falsificação de autoria, evidências, dados, achados e conclusões; 2) Não publicar informações que venham ser prejudiciais aos participantes; 3) Comunicar-se de forma clara e objetiva.
Publicando o estudo	1) Fornecer cópias dos relatórios aos participantes, exceto as que porventura sejam prejudiciais. 2) Não duplicar ou fragmentar publicações; 3) Compartilhar os resultados com os gestores da instituição e comunidade acadêmica; 4) Divulgar sempre que possíveis os atores colaboradores externos da pesquisa.

Fonte: Adaptação, Creswell (2014, p.59-60).

5.2.1 O perfil dos estudantes participantes da pesquisa

Os participantes da turma selecionada eram compostos por três mulheres, com idades entre 25 e 55 anos, e quatro homens, com idades entre 22 e 50 anos, todos já estavam exercendo ocupações no mundo trabalho, sendo em trabalhos efetivos ou temporários. Dentro desse grupo, havia dois participantes com mais idade da turma. De acordo com o perfil dos estudantes, duas



das mulheres, estavam cursando Licenciatura em Matemática para obter uma graduação, e afirmaram não terem interesse em seguir carreira docente, mas escolheram o curso de Matemática para ter mais chance nas provas de concursos. A terceira mulher, por outro lado, fazia o curso por motivo de realização pessoal, pois já estava em sua terceira graduação, sendo a Matemática a segunda na área de exatas, e informou que sempre teve o desejo de se formar como professora de Matemática, relatou que desde criança tinha afeição pela Matemática e o desejo de realizar o curso para conhecer mais e poder trabalhar como professora após sua aposentadoria.

Em contraste, os homens estavam mais engajados em seguir a profissão de professor de Matemática. Dois deles já trabalhavam como professores em escolas particulares, enquanto os outros dois tinham empregos em outros setores. No entanto, sempre demonstraram motivação para seguir a carreira docente quando questionados. Dois dos estudantes homens, demonstravam muito interesse pela formação acadêmica, um deles sempre comentava que quando aprendia algo legal nas aulas do curso, levava para suas turmas. E o outro foi medalhista da OBMEP no ensino médio.

5.2.2 Critério de Exclusão

- a) Instituição de Ensino Superior cujo Projeto Pedagógico dos Curso não contemplam o componente de Geometria Fractal ou Geometria não Euclidiana;
- b) Estudantes que não comprovarem matrícula no componente de Eletiva II (2023.2);
- c) Participantes que não aceitarem participar da pesquisa antes de iniciar ou em qualquer tempo.

5.3 Descrição do campo da pesquisa

O Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Roraima (IFRR) é originário da extinta Escola Técnica, instituído legalmente em 29 de dezembro de 2008, a Lei nº 11.892 instituiu a Rede Federal de Educação Profissional, Científica e Tecnológica, criando os Institutos Federais de Educação, Ciências e Tecnologias, formados pela adesão das Universidades Agrícolas e dos Centros Federais de Educação Tecnológica (CEFETs) com suas Unidades de Ensino (UNEDs), assim, foi criado o IFRR com seus respectivos *campi*.

Atualmente, o IFRR está estruturado com uma Reitoria e cinco *campi* distribuídos pelo estado: a) *Campus* Boa Vista localizado na região central da cidade Boa Vista; *Campus* Boa



Vista Zona Oeste localizado na região periférica da Capital; *Campus* Novo Paraíso, localizado na região sul do Estado, c) *Campus* Amajari, localizado na região norte do Estado e) *Campus* Bonfim, localizado na região norte do Estado.

O IFRR é uma instituição autárquica integrante do sistema federal de ensino, está vinculada ao Ministério de Educação e supervisionada pela Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica (Setec), com sede e foro na cidade de Boa Vista e atuação no Estado de Roraima. A missão da instituição de acordo com o Plano de Desenvolvimento Institucional (PDI) para o quadriênio 2024-2028 é promover formação humana integral, por meio da educação, ciência e tecnologia, em consonância com os arranjos produtivos locais, socioeconômicos e culturais, contribuindo para o desenvolvimento sustentável.

O *Campus* Boa Vista é originário do processo de formação do atual IFRR. O *Campus*, na prática, nasceu da Escola Técnica federalizada por meio da Lei nº 8.670, passando a chamar-se Escola Técnica Federal de Roraima (ETF-RR), que posteriormente foi transformada em Centro Federal de Educação Tecnológica de Roraima (Cefet-RR), por meio do Decreto Presidencial de 13 de novembro de 2002.

Figura 35 – Faixada ETF-RR (1997) e Cefet-RR (2002)



Fonte: acervo da Assessoria de Comunicação do IFRR (1997; 2002)

A partir da Lei nº 11.892 ficou instituída a Rede Federal de Educação Profissional, Científica e Tecnológica no âmbito do sistema federal de ensino, vinculada ao Ministério da Educação e Cultura (MEC). A consolidação dessa nova institucionalidade exigiu mudanças na estrutura organizacional, uma vez que o IFRR possui uma estrutura *multicampi*, a partir de então a sede do CEFET-RR passou a denominar-se *Campus* Boa Vista.



Figura 36 – Faixada principal do *Campus Boa Vista*



Fonte: Ramom Queiroz (2024)

Neste novo marco, foram criados e implantados os cursos de graduação: Licenciatura em Educação Física, Tecnologia em Análise e Desenvolvimento de Sistemas, Gestão em Serviços de Saúde, Licenciatura em Letras-Espanhol e Literatura Hispânica, Saneamento Ambiental, Licenciatura em Ciências Biológicas e Licenciatura em Matemática.

O curso de Licenciatura em Matemática foi autorizado pela Resolução nº 038 de 02 de maio de 2011 do Conselho Superior do IFRR, com regime de matrícula Modular Semestral com 35 vagas anuais, com duração de oito módulos semestrais, com carga horária de 3.270 horas, sendo 2.180 horas dos componentes curriculares, 90 horas para o trabalho de conclusão de curso, 400 horas para o Estágio Curricular Supervisionado obrigatório, 400 horas de Prática Pedagógica e 200 horas de Atividades Complementares.

A proposta de formação profissional pelo IFRR no Curso Superior de Licenciatura em Matemática, segundo o que consta no Plano de Curso, visa formar professores com habilidade para atuar no mundo de trabalho em escolas públicas ou privadas, a partir do 6º ano da educação básica até o ensino médio.

Desse modo, o IFRR busca reafirmar o seu compromisso de contribuir com o desenvolvimento social e econômico da região Amazônica, colaborando na formação de professores licenciados em Matemática. Após aprovação, o curso foi imediatamente implantado no segundo semestre de 2011 com uma turma de 29 licenciandos, e no segundo semestre de 2012 ingressou a segunda turma com um total de 30 matriculados. Nos anos seguintes os períodos de entradas foram alterados para anuais por meio de processo seletivo de vestibular.

E, em 2017 foi autorizado o Curso de Licenciatura em Matemática na modalidade a distância, com cinco turmas que já integralizaram em cinco Polos. Em 2022.1 houve o ingresso de mais uma turma na modalidade a distância.



5.4 Abordagem Estratégica na Análise de Dados

Neste tópico, os aspectos metodológicos para a análise dos dados tiveram como objetivo levar a compreensão do objeto de estudo, por meio da Análise de Conteúdo (Bardin, 2011; Franco, 2018), organizados conforme os três polos cronológicos: a) pré-análise, b) exploração do material e c) o tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação. E para compor esta análise na prática, os resultados da coleta foram analisados na estrutura da linguagem com a estrutura do acontecimento das atividades em sala de aula.

De acordo com Franco (2018, p.13) “[...] a Análise de Conteúdo, assenta-se nos pressupostos de uma concepção crítica e dinâmica da linguagem”. Assim, a linguagem (oral, escrita, imagens, modelos algébricos, modelos geométricos), não será o único, mas o meio pelo qual serão utilizados os caminhos para compreender a linguagem composta nos conceitos novos dos futuros professores(as) utilizados na aprendizagem da Geometria Fractal para a Criatividade em Matemática na Aprendizagem Significativa.

Neste contexto, os significados interligados que a pesquisa busca desvendar e interpretar a partir da linguagem dos participantes, podem revelar não apenas o que eles dizem, mas como suas perspectivas e ideias moldam o sentido de suas expressões no contexto específico da aprendizagem da Geometria Fractal.

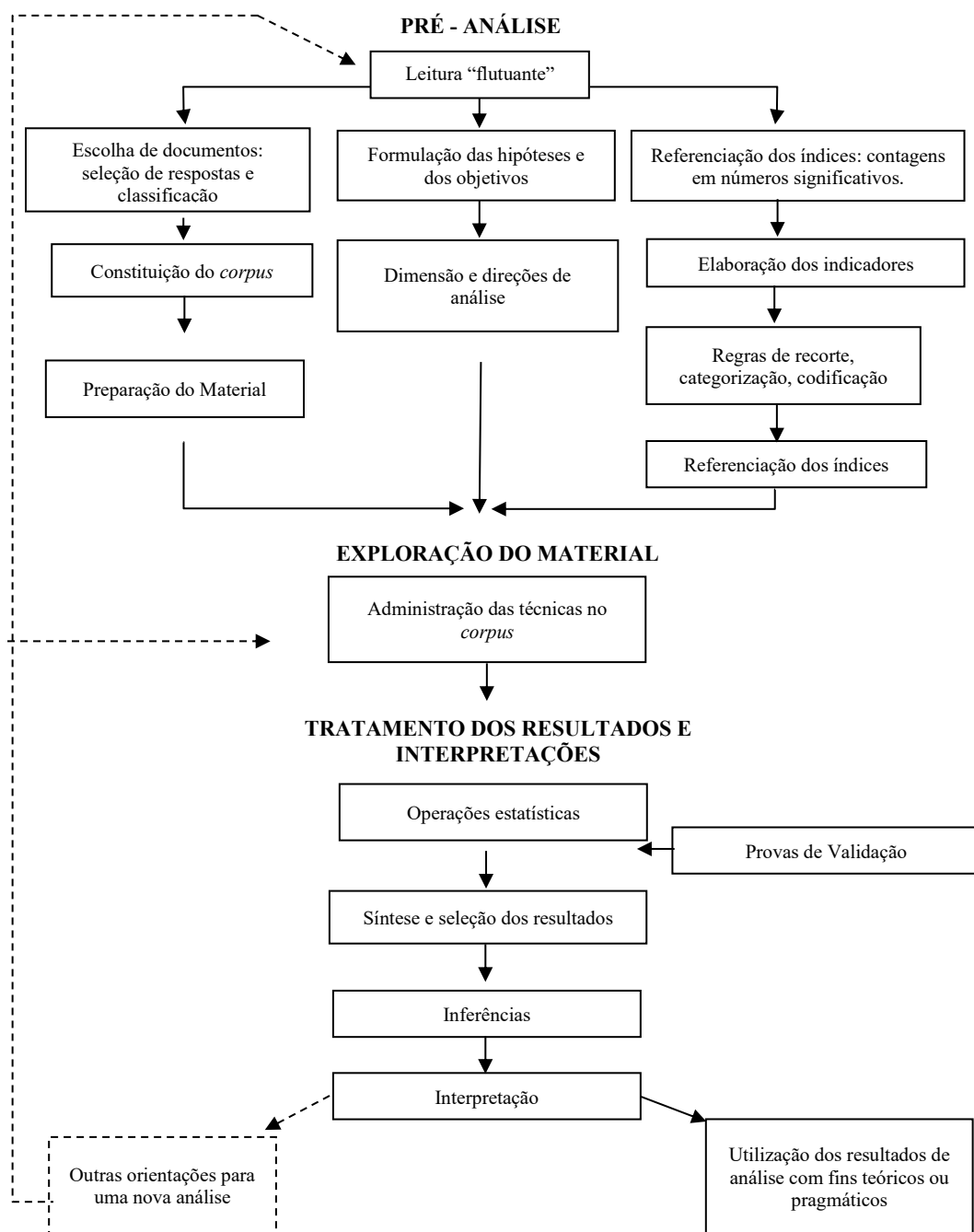
A análise do conteúdo foi realizada no *corpus* dos estudos à luz da Teoria da Aprendizagem Significativa integrada aos estágios da Criatividade em Matemática. De acordo com Franco (2018, p.21) “o ponto de partida da Análise de Conteúdo é a mensagem, seja ela verbal (oral ou escrita), gestual, silenciosa, figurativa, documental ou diretamente provocada. Necessariamente ela expressa um significado e um sentido”. Nesta pesquisa a Análise de Conteúdo vem para explicar o processo da constituição do sentido harmônico entre os estágios da Criatividade em Matemática e da Teoria da Aprendizagem Significativa.

Os registros de dados obtidos pelos materiais, incluindo as resoluções dos problemas em forma de imagem dos fractais, as descrições das questões e as respostas da entrevista, são as unidades de análises que irão fundamentar os significados observados no âmbito da pré-análise, da exploração do material e do tratamento dos resultados, na inferência e na interpretação. Para Bardin (2011, p. 131) “os resultados brutos são tratados de maneira a serem significativos (percentagem), ou mais complexas (análise fatorial), permitem estabelecer quadros de resultados, diagramas, figuras e modos, os quais condensam e põem em relevo as informações fornecidas pela análise”.



Esses significados serão extraídos tanto dos relatos tangíveis das entrevistas e dos escritos, quanto das resoluções dos problemas envolvendo estruturas abstratas da Geometria Fractal. A análise dos registros percorreu o desenvolvimento da Análise de Conteúdo, almejando identificar os elementos quem venham contribuir para as interpretações necessárias à compreensão do processo da produção da linguagem e do processo de análise por meio deste método. Veja Figura 37:

Figura 37 – Desenvolvimento da Análise do Conteúdo



Fonte: Bardin, 2011, p.132



Para melhor compreensão do fluxo do desenvolvimento da análise do conteúdo Figura 36, Bardin (2011, p.132) foi elaborado o Quadro 25, aborda as fases com maior detalhamento das ações e atividades desenvolvidas para alcançar os objetivos de cada fase.

Quadro 25 – Detalhamento do fluxo do desenvolvimento da análise do conteúdo

Fase Principal	Ação/Atividade	Descrição	Status / Escala / Objeto
<i>1. Pré-análise</i>	Leitura Flutuante Constituição do Corpus Formulação das Hipóteses e Objetivos Elaboração de Indicadores Preparação do Material	Primeira leitura do material para familiarização e identificação de impressões iniciais. Definição e organização dos documentos a serem analisados (exaustivo, representativo, homogêneo, pertinente). Revisar e refinar as questões de pesquisa e os objetivos da análise. Definição prévia das categorias ou temas, se aplicável, ou preparação para identificação emergente. Transcrições, digitalização, organização física/digital para facilitar a codificação.	Identificação da quantidade de objetos a serem analisados. Transcrição das respostas Classificação em quadros
<i>2. Exploração do Material</i>	Codificação Escolha das Unidades de Registro (UR) e de Contexto (UC) Categorização	Identificação das unidades de registro (UR) e atribuição de códigos. Definir as partes menores de conteúdo para codificar (UR) e o contexto para compreendê-las (UC). Classificação das unidades de registro codificadas em categorias (temáticas, semânticas, etc.). As categorias devem ser mutuamente exclusivas, exaustivas, homogêneas e objetivas.	Codificação dos participantes Codificação das dimensões de análise Organização das dimensões dos estágios da Aprendizagem Significativa e Criatividade em Matemática. Intepretação das respostas
<i>3. Tratamento dos Resultados, Inferência e Interpretação</i>	Quantificação e/ou Qualificação Inferência Interpretação	Contagem de frequências (quantificação) e/ou descrição detalhada do conteúdo das categorias (qualificação). Tirar conclusões e generalizações a partir dos dados organizados e descritos. Dialogar os resultados com o referencial teórico, as hipóteses e os objetivos da pesquisa, construindo o conhecimento e dando sentido aos achados.	Mensuração em escala <i>likert</i> Mensuração qualitativa, descrições subjetivas dos significados. Análise Considerações.

Fonte: Adaptação, desenvolvimento da Análise do Conteúdo Bardin (2011, p.132).



5.4.1 O roteiro da pré-análise

Os metadados foram organizados conforme as duas fases de desenvolvimento da pesquisa, na fase 1 Aprendizagem Significativa Subordinada, foram trabalhados cinco problemas por sete estudantes da graduação, extraídas as respostas por meio de recorte de imagens (recorte /prints /fotos) transcrição de resposta, categorização das respostas, qualificação no âmbito dos estágios da Criatividade em Matemática e Aprendizagem Significativa. Portanto, na fase 1 foram desenvolvidos cinco problemas e colhidas 29 respostas, na fase 2 Aprendizagem Significativa Sobreordenada, foram trabalhados cinco problemas e obtidas 31 respostas, sendo colhidas 56 figuras de fractais. E da entrevista foram utilizadas dez questões semiestruturadas e colhidas as respostas dos sete participantes, sendo obtidas 68 respostas em formato de texto. O *corpus* organizado e pré-analisado compõe no total um volume de 184 objetos de análises.

O desenvolvimento da Pesquisa-ação estratégica ocorreu no âmbito da concepção de Thiollent (2011) organizado seguindo a heurística da resolução de problemas de Polya, sendo que:

1) **Compreender o problema:** nos levou ao estudo diagnóstico do conhecimento prévio dos estudantes/participantes. Neste sentido, buscou-se em várias pesquisas realizadas compreender o nível de criatividade dos participantes por meio das respostas dos problemas desenvolvidos para a formação do conceito da Geometria Fractal.

2) **Elaboração do modelo de análise:** para esta fase, foram elaborados problemas para formalização, concepção e demais para alcançar Aprendizagem Significativa.

3) **Resolução:** após a elaboração da estratégia a solução do modelo que levará as análises dos resultados dos problemas.

4) **Retrospecto:** Plano Estratégico de respostas às análises das etapas anteriores.

A análise da Criatividade em Matemática foi realizada considerando o aspecto do grupo de participantes escolhido nesta pesquisa, no que se sobressai de novo nas respostas dos problemas no grupo. Diferente da criatividade considerada como processo de criação de um “produto, validado por uma sociedade de determinado período da história, de forma diretamente resultante das condições cognitivas, emotivas e de personalidade do indivíduo que cria” (Gontijo, *et.al* p.22).

Os resultados foram analisados independentemente de serem reconhecidos socialmente, as criações do grupo foram consideradas criações menores e subcategoria, neste caso a



criatividade cotidiana em contribuições interessantes com impacto menor na sociedade, mas com significado para o estudo da tese.

5.4.2 Exploração do material: Categorização dos dados

As análises dos dados foram divididas em duas categorias macro: Criatividade em Matemática e Aprendizagem Significativa. Os subtópicos seguintes irão discorrer sobre os modelos de análise nas fases da pesquisa de acordo com o modelo da Análise de Conteúdo para a exploração do material, visando melhor tratamento dos resultados.

5.4.2.1 Criatividade em Matemática na fase da Aprendizagem Significativa Subordinada

Todos os materiais coletados nas fases do desenvolvimento da pesquisa, como os resultados dos problemas e as respostas das questões abertas, foram transcritos e organizados em quadros. O Quadro 26, foi elaborado para extrair os dados que identifiquem a Criatividade em Matemática por meio do Estágio da preparação ou Estágio I e indícios da Aprendizagem Significativa por meio das dimensões da aquisição de significados subordinados:

Quadro 26 – Formulário de análise dos problemas da fase 1

Problema	Objetivo	Conceitos Matemáticos	Criatividade em Matemática	Aprendizagem Significativa Subordinada
Descrição de identificação do problema/ atividade Ex.: Problemas (1 a 5)	Objetivo relacionado aos problemas. Ex.: Recordar sequências numéricas compostas nas potências, Geometria Plana.	Listagem dos conceitos da matemática / Geometria Fractal envolvidos no contexto dos problemas	Estágio I Preparação: Processo de atividades práticas e mentais. Categorias: Dimensão Fluência (NFlu.): identificação dos conceitos da matemática. Flexibilidade (NFlx.): resolução dos problemas aplicando os conceitos do objetivo e novas formas. Originalidade (GOGI.): identificação de aplicações inéditas nas respostas. Elaboração (NELb.): busca identificar os padrões utilizados nas respostas. Análise quantitativa: Escala <i>likert</i> [1,5]	Aquisição de significado subordinado a' ou A': Relacionada a e assimilada na interação: novo significado e ideias estabelecidas Categorias: Dimensão. Compreensão (GCp): Grau de entendimento dos conceitos. Integração (CIn): Capacidade de integrar os conceitos. Dissociação (CDs): Capacidade de distinguir e separar conceitos ou informações semelhantes, mas diferentes. Análise qualitativa: Descrição sobre as reações no contexto da elaboração, descrito pelos estudantes e observados pela pesquisadora.



O Quadro 27 aborda o nível das dimensões da Criatividade em Matemática em relação a compreensão para iniciar o processo de preparação e as primeiras elaborações do conceito da Geometria Fractal, quanto as categorias fluência, flexibilidade, originalidade e elaboração.

Quadro 27- Dimensões da Criatividade em Matemática

Nível (Escala <i>Likert</i>)	Fluência (NFlu)	Flexibilidade (NFlx)	Originalidade (GOgI)	Elaboração (NElb)
1	Encontrou 1-2 soluções.	Utilizou apenas um método para resolver o problema.	Solução comum e frequentemente utilizada por outros alunos	Explicação muito básica , com poucos detalhes e pouca clareza.
2	Encontrou 3-4 soluções.	Utilizou dois métodos diferentes.	Solução ligeiramente diferente , mas ainda comum	Explicação básica, com alguns detalhes , mas ainda faltando clareza.
3	Encontrou 5-6 soluções.	Utilizou três métodos diferentes.	Solução moderadamente inovadora , raramente utilizada por outros alunos	Explicação moderadamente detalhada e clara .
4	Encontrou 7-8 soluções.	Utilizou quatro métodos diferentes.	Solução bastante inovadora e única	Explicação detalhada e clara , com a maioria dos passos bem explicados.
5	Encontrou 9 ou mais soluções.	Utilizou cinco ou mais métodos diferentes	Solução extremamente inovadora e nunca vista antes	Explicação extremamente detalhada e clara , com todos os passos bem explicados e justificados.

Legenda: NFlu: Fluência (Número total de soluções encontradas); NFlx: Flexibilidade (Número de métodos diferentes utilizados); GOgI: Originalidade (Grau de inovação e raridade da solução proposta); NElb: Elaboração (Nível de detalhamento e clareza na explicação dos passos e raciocínios envolvidos).

O nível foi mensurado por escala *Likert*, um tipo de escala amplamente utilizada em pesquisas de abordagem sociais e educacionais para medir atitudes, opiniões e comportamentos. Ela permite a atribuição de um valor numérico a diferentes níveis de desempenho ou resposta, facilitando a quantificação e análise dos dados qualitativos.

A escolha da escala *Likert* deu-se por ser considerada uma ferramenta poderosa para a avaliação de critérios subjetivos, neste sentido, foram aplicados nas dimensões das categorias da Criatividade em Matemática e da Aprendizagem Significativa. As descrições das dimensões específicas foram elaboradas para cada nível de desempenho de acordo com cada categoria, com o objetivo de garantir uma avaliação mais objetiva e consistente.

Desse modo, essa escala permitiu a quantificação dos dados qualitativos, facilitando a análise e a interpretação dos resultados. Além disso, forneceu uma visão inicial do desenvolvimento das habilidades na identificação dos *subsunçores* dos futuros professores ao longo desta fase da pesquisa.



5.4.2.2 Estágio da Aprendizagem Significativa Subordinada

A Aprendizagem Significativa Subordinada refere-se ao processo pelo qual novos conhecimentos são assimilados e subordinados a conceitos já existentes na estrutura cognitiva do estudante. Quando se considera a dimensão de dissociação, o foco centra na capacidade de o estudante distinguir e separar conceitos de sequências numéricas ou informações que são semelhantes, mas que possuem diferenças importantes.

As dimensões para avaliação da Aprendizagem Significativa Subordinada, tem foco na compreensão, integração e dissociação foram elaboradas para serem mensuradas por meio da escala *Likert* conforme Quadro 28:

Quadro 28– Dimensões da Aprendizagem Significativa Subordinada

Nível (Escala <i>Likert</i>)	Compreensão (GCp)	Integração (CIn)	Dissociação (CDs)
1	Compreensão muito limitada , com muitos conceitos pouco entendidos e confusos.	Incapaz de integrar novos conhecimentos com conhecimentos prévios, com confusões entre conceitos semelhantes.	Incapaz de distinguir e separar conceitos semelhantes.
2	Compreensão básica , com alguns conceitos pouco entendidos e confusos.	Integra novos conhecimentos de forma limitada e com dificuldades, com algumas confusões entre conceitos semelhantes.	Distingue conceitos semelhantes de forma limitada e com dificuldades.
3	Compreensão moderada , com a maioria dos conceitos bem entendidos, mas algumas confusões.	Integra novos conhecimentos de forma moderada , com algumas dificuldades e poucas confusões entre conceitos semelhantes.	Distingue conceitos semelhantes de forma moderada , com algumas dificuldades.
4	Compreensão boa , com quase todos os conceitos bem entendidos e poucas confusões.	Integra novos conhecimentos de forma eficaz , com poucas dificuldades e raras confusões entre conceitos semelhantes.	Distingue conceitos semelhantes de forma eficaz , com poucas dificuldades.
5	Compreensão excelente , com todos os conceitos bem entendidos e sem confusões.	Integra novos conhecimentos de forma excelente e sem dificuldades, distinguindo claramente conceitos semelhantes.	Distingue conceitos semelhantes de forma excelente e sem dificuldades.

Legenda: **GCp:** Grau de entendimento dos conceitos apresentados, com foco na capacidade de distinguir conceitos semelhantes; **CIn:** Capacidade de integrar novos conhecimentos com conhecimentos prévios, distinguindo conceitos semelhantes; **CDs:** Capacidade de distinguir e separar conceitos ou informações semelhantes, mas diferentes.

5.4.2.3 Categorização dos dados resultados dos problemas elaborados com uso do software GeoGebra



Para a organização e análise das respostas dos problemas elaborados com softwares foi elaborado o modelo no Quadro 29, para analisar os seis estágios da Aprendizagem Significativa Sobreordenada e os quatro estágios da Criatividade em Matemática.

A abordagem dos conceitos foi planejada para ser analisada conforme as respostas nas dimensões da Criatividade em Matemática (estágios II e III) e da Aprendizagem Significativa (estágios II e III), buscando identificar os significados relevantes nas respostas da solução dos problemas e nas respostas das questões objetivas e subjetivas dos problemas.

Quadro 29– Formulário de análise dos problemas de Geometria Fractal

Problema	Objetivo	Conceitos Matemáticos	Criatividade em Matemática	Aprendizagem Significativa Sobreordenada
Descrição de identificação do problema	Objetivo relacionado aos problemas.	Progressão Aritmética, Progressão Geométrica, modelos algébricos.	Estágios I e II: Incubação e Iluminação: Progressão Geométrica e padrões de figuras geométricas ou numéricas, serão relacionadas aos novos conceitos de iteração, similaridade e dimensão. Com aspectos específicos dissociados das outras geometrias. Categorias: Dimensão Fluência: identificar das iterações das partes similares e a dimensão fractal. Flexibilidade: resolução do problema aplicando outros conceitos além do proposto. Originalidade: identificação de respostas incomuns além do proposto. Elaboração: identificar os padrões utilizados nas respostas.	Aprendizagem posterior e retenção inicial de A' e Diferenciação posterior de A': novo significado para iteração, similaridade e dimensão fractal. Desvinculação dos organizadores prévios para a forma fractal em sua análise de composição, reformulação e expansão com conceitos mais complexos. Categorias: Dimensão. Compreensão: indícios de compreensão dos conceitos iteração, similaridade e dimensão fractal. Integração: Desvinculação dos organizadores e conhecimentos prévios para a forma fractal. Dissociação: análise de composição, reformulação e expansão com conceitos mais complexos.
Ex.: Problemas (5 a 8)	Ex.: desenvolver o conceito de fractal a partir dos problemas proposto para resolução e elaboração da imagem em Software dinâmico.	Conceitos da Geometria Fractal: Iteração, similaridade e dimensão fractal		

Fonte: autora (2025)

Os problemas desta fase envolvem maior complexidade nos conceitos da Geometria Fractal, as respostas dos problemas serão analisadas observando as respostas desenvolvidas tanto com uso de lápis e papel quanto as que forem desenvolvidas com uso de software, com o objetivo de fortalecer a compreensão e a evidência de significados.

O Quadro 30, foi elaborado com quatro motivos para identificar as evidências no desenvolvimento das habilidades cognitivas no discurso dos estudantes:



Quadro 30 – Modelo Categorias das respostas quanto aos significados

MOTIVOS EXPLICITADOS	Quantidade respostas
1.Relacionados aos conhecimentos prévios	
2.Relacionados ao conhecimento novo	
3.Relacionados ao uso do Geogebra para aquisição de significado subordinado e sobreordenado	
4.Relacionados ao uso do Geogebra para retenção do significado	

Fonte: autora (2025)

Os motivos devem ter ligações com o ensino/aprendizagem desde o início do processo, mais precisamente o período com uso de *Software* e parte das questões abertas relacionado aos problemas e parte das entrevistas as quais mencionam o uso do GeoGebra ou uso de tecnologias para facilitar a aprendizagem da Geometria Fractal.

5.4.2.3 Modelo de estrutura para categorização das respostas da entrevista

Quadro 31, perguntas e objetivos da entrevista:

Quadro 31 – perguntas semiestruturadas desta pesquisa

Perguntas	Objetivo
1. Comente como foi a sua experiência sobre as aulas que levaram você a construir o primeiro fractal.	-Identificar subsunçores possíveis estratégias diferenciadas de resoluções de problemas.
2. O que mais motivou você nas aulas e quais foram os conteúdos novos da Matemática que agora somam sua “bagagem de conhecimentos”? Comente.	-Avaliar a pré-disposição para desenvolver a Criatividade em Matemática com a Geometria Fractal, memórias mais duradouras.
3. Como a resolução de problemas lhe ajudou a construir o seu fractal?	-Analisar a estratégia da resolução de problemas no estudo de fractais.
4. Quais os significados mais relevantes que você aprendeu e o que eles representam após este estudo?	-Avaliar os indícios de significados da Geometria Fractal.
5. Destaque os momentos em que você teve os pensamentos necessários para resolver os problemas apresentados durante o estudo de Geometria dos Fractais.	-Identificar momentos de iluminação que ajudaram na resolução dos problemas.
6. Como foi a sensação de conhecer a Geometria dos Fractais na sala de aula, você fez relações com algo da sua rotina? Explique.	-Identificar indícios de criatividade e aprendizagem com significado.
7. Aponte os pontos fortes e pontos fracos na sua aprendizagem de Geometria dos Fractais com o uso do Software Geogebra.	-Identificar por meio do olhar dos participantes avaliação dos materiais e da estratégia metodológica.
8. Descreva como você diferencia a Geometria dos Fractais das outras geometrias.	-Identificar os indícios de indissociabilidade dos conceitos das Geometrias em relação a Geometria Fractal.
9. Como a Geometria dos Fractais trouxe contribuições para a sua formação e qual o seu olhar após o estudo? Destaque exemplos.	-Analisar as contribuições no olhar dos participantes para sua vida acadêmica.
10. Você desenvolveria o conteúdo de Geometria dos Fractais em sua sala de aula no futuro? E como este conteúdo poderá ajudar os estudantes a desenvolverem a criatividade.	-Avaliar a predisposição dos participantes frente ao conteúdo da Geometria Fractal em sala de aula no futuro.

Fonte: autora (2025)



As questões buscam aprofundar na experiência dos participantes, investigando como a construção de fractais, a resolução de problemas e a reflexão sobre os conceitos contribuíram para a aquisição de novos conhecimentos e a atribuição de significados relevantes.

As perguntas visam compreender como o contato com a Geometria dos Fractais estimulou o pensamento criativo, a capacidade de fazer conexões com o cotidiano e a percepção dos estudantes sobre o potencial desta área para a inovação e o ensino futuro da matemática.

5.4.3 Tratamento dos Resultados, a Inferência e a Interpretação

As características esperadas das atividades na solução dos estudantes serão observadas pelas formas de descrição, detalhes, aplicação de conceitos da Matemática e ainda em formas de resolução diferentes pelos participantes do grupo.

Quanto aos critérios de avaliação das dimensões fluência e flexibilidade serão mensuradas em intervalos conforme o quantitativo de soluções encontradas e a quantidade de métodos diferentes esperados por cada nível. Enquanto a originalidade e a elaboração serão classificadas em grau de inovação e nível de detalhamento das respostas. Os critérios de avaliação por dimensão tiveram o objetivo de direcionar a análise para no foco dos critérios do problema em relação as dimensões da Criatividade em Matemática, buscando uma correlação entre si de acordo com o desempenho da atividade.

O Quadro 32 demonstra o modelo para o resumo da análise quantitativa das dimensões por estudante, na forma de análise descritiva com o intuito de elaborar uma relação com outra categoria.

Quadro 32 – Critérios de avaliação por dimensão da Criatividade em Matemática

Dimensão	Característica esperada da Atividade	Critérios de Avaliação
Fluência	Listar todas as maneiras de solução do problema.	Número total de soluções encontradas .
Flexibilidade	Descrever as possíveis estratégias de uso da Matemática para resolver o problema (geometria, álgebra, trigonometria)	Número de métodos diferentes utilizados.
Originalidade	Descrever as formas comuns de solução, deixando oportunidade para o estudante compor uma forma inovadora de resolver o problema.	Grau de inovação ¹⁵ e raridade ¹⁶ da solução proposta.
Elaboração	Descrever os detalhes mínimos esperados e como ponto de partida para observar o processo de resolução do problema pelo estudante.	Nível de detalhamento e clareza na explicação dos passos e raciocínios envolvidos.

Fonte: autora (2024)

¹⁵ Respostas dos problemas contendo novas formas de solução, a utilização de técnicas e estratégias da matemática não utilizadas por outros do mesmo grupo.

¹⁶ Respostas únicas contendo grau de complexidade mais elevado utilizadas no mesmo grupo.



As respostas dos problemas foram analisadas conforme o nível das categorias, observando as dimensões qualitativas e quantitativas da Criatividade em Matemática e da Aprendizagem Significativa. O tratamento dos resultados dos problemas, foram compostos em média aritmética, frequência e desvio padrão.

A média aritmética ($\bar{M}$) das dimensões foi elaborada com o intuito de mensurar a frequência e definir o intervalo de confiança. Para o conjunto (n) foi considerado aqui como a população amostral de sete estudantes. Os valores por dimensão em escala *Likert* de cada estudante foram (x_1, x_2, x_3, x_4), o desvio padrão (s) para amostra:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Onde:

(s) é o desvio padrão da população.

(n) é o número total de valores na amostra.

(x_i) são os valores individuais dos estudantes.

($\bar{x}$) é a média da amostra, calculada como ($\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$).

A frequência é uma medida fundamental na estatística descritiva, sua função indica a quantidade de vezes que um determinado valor ou categoria aparece em um conjunto de dados. As funções da frequência nesta análise compõem-se:

a) distribuição dos dados: entender como os níveis da Criatividade em Matemática e da Aprendizagem Significativa estão distribuídos, mostrando quais valores são mais ou menos comuns.

b) identificação de padrões: identificar tendências, modas (valores mais frequentes) e possíveis *outliers* (valores atípicos) nas respostas.

c) visualização: composição de base para criar gráficos como histogramas e gráficos de barras, que facilitam a compreensão visual dos dados.

d) tomada de decisões: auxilia na tomada de decisões baseadas na ocorrência de eventos específicos.

O desvio padrão é uma medida de dispersão que indica o quanto os valores em um conjunto de dados se afastam da média. As funções do desvio padrão nesta análise, serão:



a) variabilidade dos dados: quantifica a dispersão dos dados em relação à média das dimensões categóricas da Criatividade em Matemática e Aprendizagem Significativa, indicando se os valores estão muito espalhados ou concentrados;

b) confiabilidade da média: Um desvio padrão baixo indica que a média é mais representativa do conjunto de dados;

c) detecção de *outliers*: valores que estão a mais de 2 ou 3 desvios padrão da média, podem ser considerados *outliers*, dependendo do contexto;

d) comparação entre conjuntos: permite comparar a variabilidade da Criatividade em Matemática e da Aprendizagem Significativa, mesmo que tenham médias diferentes;

e) intervalos de confiança: é usado para calcular intervalos de confiança em inferência estatística;

f) normalização de dados: útil para padronizar dados de diferentes escalas, facilitando comparações;

g) análise de risco: em finanças e gestão de projetos, o desvio padrão é frequentemente usado como uma medida de risco ou incerteza.

A frequência e o desvio padrão fornecem uma visão mais completa da distribuição dos dados, permitindo uma análise mais robusta e informativa. A frequência ajuda a entender a ocorrência de valores específicos, enquanto o desvio padrão oferece uma medida da dispersão geral dos dados. O Quadro 33, apresenta o modelo para exposição da análise descritiva da Criatividade em Matemática na Aprendizagem Significativa Subordinada.

Quadro 33 – Análise descritiva da Criatividade em Matemática

Estudante	Fluência	Flexibilidade	Originalidade	Elaboração	Média (M)	Frequência (Freq)	Desvio Padrão (Dp)
E1	$NFlu_{E1}$	$NFlx_{E1}$	$G Ori_{E1}$	$NElb_{E1}$	$\overline{ME1}$	$Freq_{E1}$	Dp_{E1}
E2	$NFlu_{E2}$	$NFlx_{E2}$	$G Ori_{E2}$	$NElb_{E2}$	$\overline{ME2}$	$Freq_{E1}$	Dp_{E2}
E3	$NFlu_{E3}$	$NFlx_{E3}$	$G Ori_{E3}$	$NElb_{E3}$	$\overline{ME3}$	$Freq_{E1}$	Dp_{E3}
E4	$NFlu_{E4}$	$NFlx_{E4}$	$G Ori_{E4}$	$NElb_{E4}$	$\overline{ME4}$	$Freq_{E1}$	Dp_{E4}
E5	$NFlu_{E5}$	$NFlx_{E5}$	$G Ori_{E5}$	$NElb_{E5}$	$\overline{ME5}$	$Freq_{E1}$	Dp_{E5}
E6	$NFlu_{E6}$	$NFlx_{E6}$	$G Ori_{E6}$	$NElb_{E6}$	$\overline{ME6}$	$Freq_{E1}$	Dp_{E6}
E7	$NFlu_{E7}$	$NFlx_{E7}$	$G Ori_{E7}$	$NElb_{E7}$	$\overline{ME7}$	$Freq_{E1}$	Dp_{E7}
Média (M)	$\overline{NFlu}$	$\overline{NFlx}$	$\overline{G Ori}$	$\overline{NElb}$	$\overline{MG}$		

Legenda: **NFlu**: Número total de soluções encontradas dos estudantes de E1 até E7; **NFlx**: Número de métodos diferentes utilizados pelos dos estudantes de E1 até E7; **G Ori**: Grau de inovação e raridade da solução proposta dos estudantes de E1 até E7; **NElb**: Nível de detalhamento e clareza na explicação dos passos e raciocínios envolvidos nas respostas dos estudantes de E1 até E7; $\overline{NFlu}$: média flexibilidade; $\overline{NFlx}$: média flexibilidade; $\overline{G Ori}$: média originalidade; $\overline{NElb}$: média elaboração; $Freq$: frequência dos estudantes de E1 até E7; Dp : desvio padrão dos estudantes de E1 até E7.



As avaliações dos estudantes serão compostas neste quadro por meio das respostas dos problemas resolvidos, obtendo em cada dimensão da Criatividade em Matemática a indicação de um valor que levará ao nível da escala *likert*.

Na definição das dimensões e indicadores da Aprendizagem Significativa objetivou-se obter uma avaliação detalhada e estruturada da aprendizagem dos estudantes, nas três dimensões da teoria: a compreensão, a integração e a dissociação. Utilizando essas dimensões e escalas, pretender-se obter uma visão geral do processo de aprendizagem, permitindo identificar as fragilidades, dificuldades e as oportunidades de melhoria. Com as características esperadas dos resultados dos problemas e dos critérios de avaliação, se prevê facilitar o *feedback* construtivo e direcionado da pesquisa, promovendo um ambiente de aprendizagem que valorize a compreensão profunda, a aplicação prática e a capacidade de distinguir e separar conceitos semelhantes.

Quadro 34 – Definição das dimensões e indicadores da Aprendizagem Significativa

Dimensões	Característica esperada nos problemas	Crítérios de Avaliação
Compreensão	Capacidade de explicar conceitos em suas próprias palavras. Habilidade de resolver problemas aplicando os conceitos aprendidos.	Subsunçores claros e objetivo, nas resoluções dos problemas e aplicações práticas.
Integração	Capacidade de conectar novos conhecimentos com conhecimentos prévios. Habilidade de aplicar conceitos em contextos interdisciplinares.	Identificação de conexões, relevância na aplicação prática e clareza descrição dos conceitos.
Dissociação	Capacidade de distinguir entre conceitos similares. Habilidade de identificar erros em problemas resolvidos.	Identificação de diferenças, inconsistência, análise crítica, explica a diferença entre conceitos, soluções variáveis, autonomia.

Neste sentido, elaborou-se o modelo de análise estatística para a avaliação da Aprendizagem Significativa Subordinada estruturada para mensurar as dimensões de compreensão, integração e dissociação dos dados coletados a partir dos problemas resolvidos. Para cada dimensão, foram definidos os indicadores específicos para mensurar a resolução dos problemas e as respostas das questões abertas contidas em alguns dos problemas:



Quadro 35 – Critérios de Avaliação por Dimensão da Aprendizagem Significativa

Nível (Escala Likert)	Compreensão (NCp)	Integração (NIn)	Dissociação (NDi)
1	Resposta incipiente	Nenhuma conexão realizada	Não identifica diferenças entre conceitos
2	Subsunções limitados e não definidos	Baixa conexão entre os conceitos.	Identifica algumas diferenças entre conceitos, sem análise crítica
3	Subsunções moderadamente definidos	Conexões moderadas entre os conceitos	Identifica diferenças gerais , com análise crítica superficial
4	Subsunções suficiente	Conexões refinadas entre os conceitos	Identifica diferenças detalhadas e análise crítica sólida.
5	Subsunções possuem forma concreta e suficiente.	Conexões plenas demonstrando completo domínio	Identifica diferenças detalhada entre os conceitos com precisão e análise crítica completa.

Legenda: NCp: nível de compreensão; NIn: nível de integração; NDi: Originalidade (Grau de inovação e raridade da solução proposta).

Quadro 36 – Definição das dimensões e indicadores da Aprendizagem Significativa

Estudante	Tarefa	Escala Likert	Compreensão (GCp)	Integração (CIn)	Dissociação (CDs)	Média (M)	Frequência (Freq)	Desvio Padrão (Dp)
E1	[T01,T05]	[1, 5]	GCp_E1	CIn_E1	CDs_E1	$\overline{M_E1}$	Freq_E1	Dp_E1
E2	[T01,T05]	[1, 5]	GCp_E2	CIn_E2	CDs_E2	$\overline{M_E2}$	Freq_E2	Dp_E2
E3	[T01,T05]	[1, 5]	GCp_E3	CIn_E3	CDs_E3	$\overline{M_E3}$	Freq_E3	Dp_E3
E4	[T01,T05]	[1, 5]	GCp_E4	CIn_E4	CDs_E4	$\overline{M_E4}$	Freq_E4	Dp_E4
E5	[T01,T05]	[1, 5]	GCp_E5	CIn_E5	CDs_E5	$\overline{M_E5}$	Freq_E5	Dp_E5
E6	[T01,T05]	[1, 5]	GCp_E6	CIn_E6	CDs_E6	$\overline{M_E6}$	Freq_E6	Dp_E6
E7	[T01,T05]	[1, 5]	GCp_E7	CIn_E7	CDs_E7	$\overline{M_E7}$	Freq_E7	Dp_E7
Média (M)			$\overline{GCp}$	$\overline{CIn}$	$\overline{CDs}$			

Legenda: GCp: grau de compreensão, CIn: capacidade de integração, CDs: capacidade de dissociação.

Objetiva-se nesta análise estatística fornecer uma visão mais abrangente da Aprendizagem Significativa Subordinada, permitindo identificar nas dimensões escolhidas as fragilidades, dificuldades e pontos positivos na aprendizagem da Geometria dos Fractais. Utilizando essas informações, a pesquisadora poderá dispor de argumentos fundamentados para promover ajuste na estratégia de ensino para promover a Aprendizagem Significativa.

As análises da entrevista semiestruturada serão realizadas baseando-se em perguntas heurísticas e a análise em si na circunscrição do conceito de Geometria Fractal, conforme os estágios da Criatividade em Matemática, interpretadas pela análise *a priori*, da Teoria da Aprendizagem Significativa. O modelo da análise da fase da entrevista, ocorreu de acordo com o fluxo da Análise de Conteúdo, percorrendo o modelo de espiral: Descrição → Interpretação → Ampliação do *Corpus*.



CAPÍTULO 6 – TRATAMENTO DOS RESULTADOS, INTERPRETAÇÃO E DISCUSSÕES

Neste capítulo, são apresentados problemas de Geometria Fractal resolvidos tanto com o uso de lápis e papel quanto por meio do *software* GeoGebra, com o objetivo de favorecer a investigação, a experimentação e a visualização de padrões complexos. Ademais, examina-se o potencial dessas práticas a partir da análise de perguntas semiestruturadas, possibilitando compreender de que maneira os estudantes articulam conceitos, estratégias e percepções ao longo do processo de aprendizagem.

6.1 Criatividade e Aprendizagem Significativa no Desenvolvimento da Compreensão da Geometria Fractal

Os problemas de (1) a (5) foram analisados de acordo com seus objetivos para desenvolver as habilidades Matemáticas. O problema (1) Triângulo de Pascal teve como objetivo, recordar sequências numéricas compostas nas potências, pois os conceitos matemáticos envolvidos, consistiram em: a) relacionar os padrões de números identificados na malha, indicando as posições, usando os termos: vertical, horizontal e diagonal, b) relacionar sequências ou combinações de números em diversas posições, e c) descrever como foi o nível da atividade para si, como: muito fácil, fácil, moderado, difícil.

Na Criatividade em Matemática, esperou-se no estágio da preparação, que os estudantes pudessem identificar no mínimo três sequências numéricas ou combinações curiosas, e que elaborassem alguns questionamentos sobre o problema em relação aos fractais. As sequências identificadas nas respostas dos estudantes, foram analisadas de acordo com as dimensões: fluência, flexibilidade, originalidade e elaboração, atribuindo a partir desta análise um nível de alcance de 1 a 5 para cada uma das dimensões das habilidades criativas.

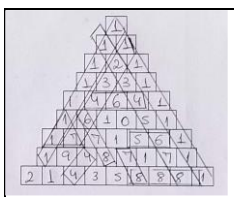
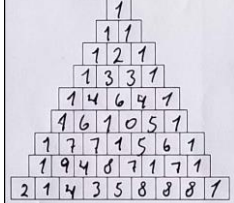
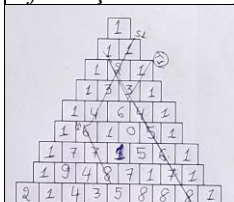
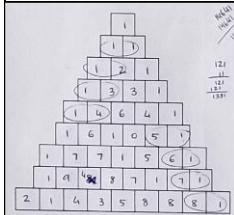
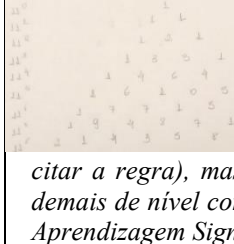
Na Aprendizagem Significativa Subordinada, esperou-se o estabelecimento de uma relação com o novo significado para as ideias estabelecidas, com base nas dimensões: compreensão, integração e dissociação. Do mesmo modo, atribuiu-se a mesma escala.

6.1.1 Análise temática dos problemas

O Quadro 37 reúne essas respostas com tratamento que envolve o código do estudante, parte das respostas em iconografia e transcritas e análise do conteúdo por meio dos conceitos de matemática:



Quadro 37 - Análise qualitativa das respostas do Problema (1)

	Estudante [1], Resposta: a) Sequência de números 1, sequência de números naturais, <u>seqüências de números 8</u>, <u>seqüência de números primos</u>. b) Em alguns casos a somatória em forma triangular remetem ao resultado 9; c) Moderado; e d) Sem resposta. Análise do Conteúdo: <i>identificou-se quatro seqüências, a seqüência de números primos citada, não foi identificada. Classificou o nível moderado, para si. Usou baixa descrição em linguagem matemática. Fez o preenchimento da pirâmide com as somas equivocadas a partir da linha 6. Citou uma seqüência finita de números 8 de apenas três números 8.</i> <i>Demonstrou poucos indícios de integração e dissociação, suas análises foram incipientes na atividade.</i>
	Estudante [2], Resposta: Diagonal: $D_1 = 1, 1, 1, 1, \dots$ e $D_2 = 1, 2, 3, 4, \dots$ Horizontal: Palíndromo $P_1 = 1, 3, 3, 1$ e $P_2 = 1, 4, 6, 4, 1$ Vertical: Somas $1+2 = 3$, $1+1 = 2$, $4+1=5$, $0+5 = 5$ e $7+1 = 8$ Seqüência: $N. = 1, 1, 1, 1, \dots$ e $a_{n+1} = 1, 2, 3, 4, 5 \dots$ Combinações: penúltimo + último de cada linha. Fácil (não envolve cálculos complicados, apenas um pouco longo e repetitivo. Fazer com outros números além do 11; incentivar a competitividade para quem encontra mais padrões; dar continuidade em ângulos diferentes; colorir os padrões. Análise do Conteúdo: <i>observou-se nível mais refinado na descrição ordenada de conjuntos e seqüências numéricas, classificou como fácil.</i> <i>Demonstrou domínio dos conceitos abordados, expressou linguagem matemática com boa fluência em relação aos conceitos, levando a boa compreensão na integração dos conceitos que já conhecia, alcançando nível de flexibilidade e originalidade. Concluiu a atividade, não fez questionamentos ou esboçou alguma curiosidade.</i>
	Estudante [3], Resposta: Seqüência dos N^*; a soma dos números da direita para esquerda, resultam no número abaixo. Sem resposta. Difícil, mas muito interessante. Não tenho sugestões no momento. Análise do Conteúdo: <i>Identificou a seqüência dos números naturais e ainda a formação da construção da linha horizontal abaixo da primeira fileira pela fórmula do Stiefel, mas sem citar essa regra, os traços da tarefa estão confusos, não houve descrição em linguagem matemática, classificou como difícil para si. Declarou não recordar as seqüências numéricas, demonstrou baixo nível de fluência, alcançado baixa compreensão para integrar os conceitos que já conhecia na formação de um objeto por meio das seqüências numéricas.</i>
	Estudante [4], Resposta: Vertical: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8; Horizontal: nº 1 na 1ª fileira; 3ª fileira: 1, 2; 4ª fileira: 1, 3; Diagonal: última fileira da esquerda para a direita só tem o nº 1. Seq1: 1, 2, 3; Seq2: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8; Seq3: 2, 3, 4, 5; Triângulo: 1, 2, 3. Difícil, eu não conhecia essa atividade. Indicar os conceitos (padrões de números) e objetivo das perguntas. O que se espera que seja respondido não ficou muito claro pra mim, nas letras a, b e c. Análise do Conteúdo: <i>classificou a tarefa como difícil e descreveu a seqüência de forma simples sem o apoio da linguagem matemática. Observou-se dificuldades na afirmação que o modelo de tarefa era novo, fez a identificação de algumas seqüências mais comuns, em uma das respostas abertas informou ter tido dificuldade na interpretação nas questões.</i>
	Estudante [5], Resposta: números naturais; na horizontal, tomando as duas primeiras casas de cima para baixo: 11, 12, 13, 14. Últimas casas a partir da linha 6: 15, 16, 17, 18. A soma de todos os números de uma linha horizontal é par. $2^0, 2^1, 2^2, 2^3 \dots$ padrão numérico da 1ª a 5ª linha. Moderada (trabalhosa). Indicar o tempo nas questões de análise também, acho que elas são mais importantes do que o cálculo da pirâmide, que algo mais exato. Análise do Conteúdo: <i>Identificou-se os conceitos de números naturais, potência de base 2, combinação curiosa, visto que ela não se encontra facilmente visível. Apresentou fluência e nível de compreensão que alcançou um nível de flexibilidade e originalidade mais elevado, classificou em moderada (trabalhosa), conseguiu integrar os significados.</i>
	Estudante [5], Resposta: Seqüência de números 1 nas diagonais externas. Na segunda diagonal da esquerda para a direita, a soma dos dois últimos números da linha horizontal, resultam no número imediatamente abaixo. {1, 3, 3, 1}; {1, 4, 1, 1, 7, 8}; {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}. Moderada. Sem resposta. Análise do Conteúdo: <i>trouxe a resposta descrevendo os números naturais, a seqüência de Stiefel (sem citar a regra), mas nenhuma combinação curiosa. Quanto aos conceitos apresentou resposta similar aos demais de nível comum e moderado, não houve avanço nas dimensões da Criatividade em Matemática e na Aprendizagem Significativa.</i>

Fonte: Produção da autora (2024)



As respostas obtidas no problema (1), foram organizadas com o recorte de imagens, transcrição e análise qualitativa, dados que permitiram a classificação dos níveis alcançados nas dimensões da Criatividade em Matemática e da Aprendizagem Significativa. Na análise qualitativa, as respostas no geral se apresentaram confusas, os estudantes apresentaram dúvidas, mas não externaram verbalmente, percebeu-se um silêncio, apenas dois estudantes elaboraram diálogos soltos, como: “tá difícil lembrar”, “eu ainda estou tentando aqui” esse comportamento pode ter sido expresso devido ao cansaço mental dos estudantes em virtude das atividades laborais diurnas. Os demais ficaram concentrados em silêncio, expressando apenas olhares fixos no problema.

O silêncio expressou momento de concentração e possível busca de memórias correlatas. Os estudantes que afirmaram que “tá difícil lembrar” e “eu ainda estou tentando aqui” expressaram-se dessa forma após a professora pesquisadora questionar se estavam com alguma dificuldade para compreender o problema após um tempo em silêncio.

Observou-se, por parte da pesquisadora, uma preocupação inicial no estágio de contato dos estudantes com problemas de natureza não convencional. Embora o silêncio constitua uma etapa intrínseca ao processo de resolução de problemas, sua prolongação para além do período esperado pode gerar desconforto e resultar em respostas menos elaboradas ou confusas, impulsionando os estudantes a focar meramente na obtenção de uma solução, em detrimento de uma compreensão aprofundada.

Salientamos que a proposta do problema (1) não visava à celeridade na obtenção de uma resposta, mas sim a propiciar um ambiente permissivo no qual o erro e a dúvida fossem elementos integrantes do processo de aprendizagem. Tal abordagem tinha como finalidade encorajar os estudantes à superação de desafios intrínsecos, colaborando ativamente para a ativação de conhecimentos prévios e a organização das estruturas cognitivas, preparando-as para a assimilação de novos conceitos.

Dentre as seis respostas analisadas, evidências significativas de flexibilidade, integração e dissociação foram observadas em duas, as quais se distinguiram das demais. Quantitativamente, dois estudantes atingiram níveis de fluência e originalidade na Criatividade em Matemática, enquanto apenas um demonstrou o nível de elaboração, sendo o único do grupo a fazê-lo. Consequentemente, apenas este estudante demonstrou a capacidade de estabelecer relações com significado.

Embora aparentemente simples, o problema revelou-se desafiador para a maioria dos participantes. Contudo, os estudantes que apresentaram desempenho superior nas respostas



foram capazes de evidenciar a relevância dos conhecimentos prévios para o desenvolvimento da criatividade em matemática para a formação de significados.

A Tabela 1 reúne o resultado quantitativo alcançado no problema (1), a classificação descritiva dos dados nos níveis de desenvolvimento na mesma ordem dos dados qualitativos:

Tabela 1 - Resultado quantitativo do Problema (1)

E	Inter	Criatividade em Matemática				Aprendizagem Significativa Subordinada		
		Fluência	Flexibilidade	Originalidade	Elaboração	Compreensão	Integração	Dissociação
E1	[1, 5]	2	1	1	1	2	1	2
E2	[1, 5]	3	2	2	3	5	3	5
E3	[1, 5]	1	1	1	1	2	1	1
E4	[1, 5]	2	1	1	1	2	1	1
E5	[1, 5]	3	2	3	4	5	3	4
E6	[1, 5]	1	1	1	1	1	1	1
E7	[1, 5]	2	1	1	1	3	1	3

Legenda: E – Estudante; Inter – Intervalo.

Fonte: autoras (2024)

Nas dimensões da Aprendizagem Significativa, obteve-se níveis de compreensão e dissociação, respectivos dos estudantes que alcançaram nível mais elevado na Criatividade em Matemática. Dos demais apenas um ficou acima da média e três tiveram níveis moderados de compreensão, que não conseguiram desenvolver um nível de integração e dissociação com significado utilizando as sequências numéricas.

Considera-se o alcance destes níveis aceitáveis por ser ainda o primeiro problema que os estudantes precisaram recordar os conceitos da Matemática necessários para a solução, mas observou-se as dificuldades dos estudantes para identificar as sequências em linguagem de símbolos matemáticos.

No problema (2), objetivou-se construir um triângulo a partir dos coeficientes das expressões algébricas de produtos notáveis. Esperava-se que os estudantes, pudessem identificar o padrão numérico existente. E na aprendizagem posterior e retenção inicial do significado fractal, esperou-se alcançar novo significado, dissociável das sequências numéricas, associando a imagens de triângulos construídos a partir dos padrões numéricos.

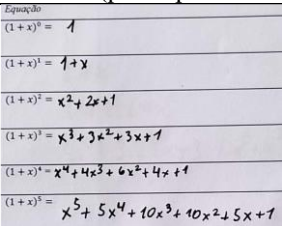
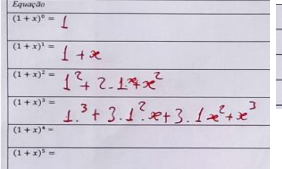
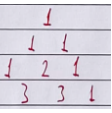
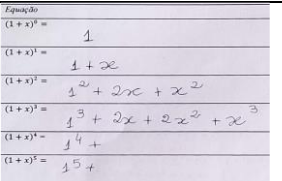
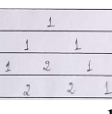
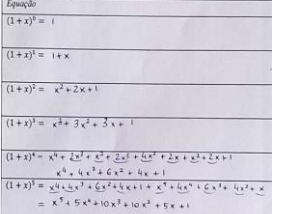
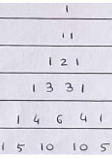
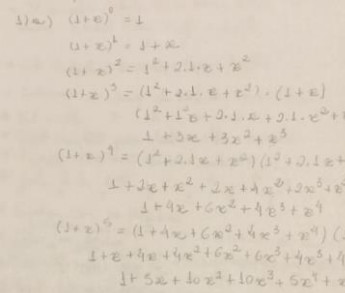
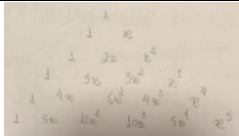
O problema possuía apenas uma forma de solução, por este motivo a análise da habilidade fluência foi realizada conforme o nível de conclusão da resposta, sendo observadas as etapas de crescimento exponencial da expressão e a construção do triângulo numérico a partir dos coeficientes obtidos. Observou-se que os estudantes recordaram com facilidades conceitos



de subsunçores, talvez por abordar as expressões algébricas, conceito mais recorrente na Matemática. O que pode ter influenciado o aumento no nível de fluência.

No problema (2), Triângulo Algébrico de Pascal, foram colhidas cinco respostas, organizadas para demonstrar a análise qualitativa, Quadro 38:

Quadro 38 - Análise qualitativa das respostas problema (2)

Não tem (participante ausente) Estudante [1] Não se aplica.	
	Estudante [2] , sem análise descritiva realizada pelo estudante. Análise do Conteúdo: expansão das expressões algébricas correta e completa, nenhum fato curioso identificado, a não ser a construção do triângulo a partir dos expoentes, mas não ficou claro se foi intencional ou equivocada, ao invés de listar os “coeficientes”, listou os “expoentes”, não apresenta o padrão de Pascal. As explicações e os traços com nível de baixa compreensão, integração e dissociação moderadas.
	 Estudante [3] , sem análise descritiva realizada pelo estudante, nas respostas a e b. Análise do Conteúdo: expansão das expressões algébricas confusa a partir do nível 2, nenhum fato curioso, construiu o triângulo sem listar “coeficientes”. Explicações textual insuficiente, obtendo nível de baixa compreensão, integração e dissociação moderadas.
	 Estudante [4] , sem análise descritiva. O estudante conseguiu realizar a expansão das expressões até a linha 4 corretamente, no entanto, as linhas 5 e 6 não conseguiu completar. Análise do Conteúdo: atividade realizada até a linha 4, as demais não foram concluídas, triângulo elaborado até a linha 3, mas com termos errados.
	 Estudante [5] , sem análise descritiva realizada pelo estudante. O estudante resolveu a questão até o 5º grau do produto notável de forma organizada. Análise do Conteúdo: a composição algébrica dos termos, foi bem elaborado alcançando todos os níveis, transcreveu os coeficientes formando o Triângulo de Pascal.
Não tem (participante ausente) Estudante [6] Não se aplica.	
	 Estudante [7] , sem análise descritiva realizada pelo estudante; b) Na resposta o participante transpôs não apenas os coeficientes, mas os termos da expressão algébrica. E não fez descrições sobre o resultado. Análise do Conteúdo: a composição algébrica dos termos foi bem elaborada, alcançando todos os níveis. O triângulo foi composto pelas expressões, mas nota-se os coeficientes semelhantes ao Triângulo de Pascal.

Fonte: autoras (2024)

O estudante E2, fez a expansão das expressões algébricas de forma correta e completa, porém nenhum fato curioso foi identificado, a não ser a construção do triângulo com os expoentes, mas não ficou claro se a elaboração foi intencional ou equivocada, pois ao invés de listar os “coeficientes”, listou os “expoentes”, o triângulo numérico elaborado, não apresenta o padrão de Pascal. Os conceitos foram aplicados corretamente, embora a elaboração do triângulo



tenha sido diferente, não atende a resposta do problema, mas considera-se uma resposta diferente da convencional, descobriu uma outra sequência existente. No entanto, as explicações e os traços observados não foram suficientes para avaliar os níveis de compreensão, integração e dissociação, a qual foram consideradas moderadas.

Os estudantes E3 e E4, desenvolveram os produtos notáveis até o 3º grau, talvez por estes conceitos serem comuns nos livros didáticos, observou-se melhor relação com os conceitos prévios para solucionar o problema. Aplicaram os conceitos corretamente, mas não concluíram as duas últimas respostas, um dos estudantes afirmou “não recorro mais dessas regras”, para a expressão de 4º grau. O que pode se considerar, um nível de fluência incipiente para obter compreensão dos significados e que fica subentendido que neste momento o estudante ainda estava apenas em busca da resposta do problema e não de uma solução com concepção criativa, visto que os padrões gerados não dependiam de cálculos exaustivos, mas de compreensão a partir das análises das sequências geradas.

Os estudantes E5 e E7, desenvolveram a expansão dos produtos notáveis em todas as expressões. Os conceitos foram aplicados corretamente, demonstraram facilidade para recordar os conhecimentos prévios, expressando explicações moderadamente detalhadas. Quanto aos significados apresentaram nível de integração moderado e de dissociação na distinção dos conceitos semelhantes aos resultados da formação do Triângulo de Pascal.

Os resultados de todos os estudantes neste problema, demonstraram mais facilidade na utilização dos subsunçores, melhor compreensão com as expressões algébricas, nas dimensões da Criatividade em Matemática e da Aprendizagem Significativa subordinada, obteve três estudantes com alcance de nível 5 e um ficou acima da média, o nível de flexibilidade foi muito baixo, mas foram identificadas respostas únicas no grupo.

A Tabela 2, reúne os resultados dos estudantes, quanto aos níveis alcançados:

Tabela 2 – Resultado quantitativo do problema (2)

E	Inter	Criatividade em Matemática				Aprendizagem Significativa Subordinada		
		Fluência	Flexibilidade	Originalidade	Elaboração	Compreensão	Integração	Dissociação
E1	[1, 5]	1	1	1	1	1	1	1
E2	[1, 5]	5	1	3	3	4	3	3
E3	[1, 5]	2	1	1	1	2	2	2
E4	[1, 5]	3	1	1	1	2	2	2
E5	[1, 5]	5	2	3	3	5	3	4
E6	[1, 5]	1	1	1	1	1	1	1
E7	[1, 5]	5	2	1	3	5	2	4

Legenda: E – Estudante; Inter – Intervalo.

Fonte: autora (2024)



O problema (3) foi o primeiro que relacionou sequências com similaridade a um objeto geométrico, teve o objetivo de construir o Triângulo de Pascal utilizando o artifício de Michel Stiefel, abordando as sequências numéricas existentes, relacionando os padrões numéricos identificados em malha de papel quadriculado, indicando o posicionamento dos números, usando os termos: vertical, horizontal e diagonal, relacionando as sequências ou combinações de número em diversas posições de retas ou trincas de números. E, descrever o nível de dificuldade para si em “muito fácil”, “fácil”, “moderado”, “difícil”.

Quanto as habilidades da Criatividade em Matemática, esperou-se que os estudantes pudessem identificar no mínimo três sequências numéricas ou combinações curiosas, visando melhorar o estágio da preparação, incubação e a iluminação no momento das descobertas dessas sequências. O problema admite várias respostas possibilitando observar a flexibilidade, intenciona que os estudantes possam apresentar diferentes maneiras de resolver ou visualizar o conceito, para que possa relacionar com os fractais.

Problemas que admitem múltiplas soluções possuem o potencial de estimular os estudantes a identificarem padrões não triviais. Ainda que tais padrões possam divergir das abordagens convencionais de resolução, essa manifestação apresenta um caráter de originalidade na construção cognitiva individual do estudante.

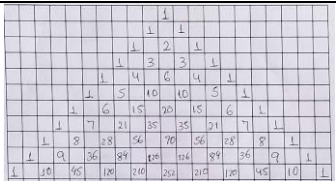
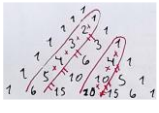
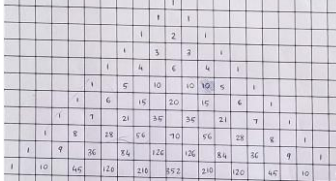
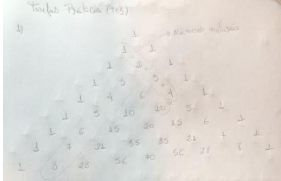
Na Aprendizagem Significativa, o problema teve objetivo de observar a aprendizagem posterior e a retenção inicial do significado de fractal, para alcançar um novo significado por meio das sequências numéricas. A proposição deste problema, que articulou sequências numéricas e elementos implícitos da geometria plana, demarcou o início do processo de dissociação conceitual das sequências numéricas em relação à estrutura fractal, promovendo um discernimento entre os conhecimentos prévio e novo conceito de uma “nova” geometria.

Neste problema, foram colhidas seis respostas, juntou-se dados iconográficos das construções dos estudantes, foram realizados grifos nas respostas abertas identificando a relevância dos conceitos de Matemática e nas expressões descritivas, a busca de significados para estes conceitos, utilizando nos recortes, destaques com recursos “sublinhados” e “realce”.

O Quadro 39, reúne os dados das análises qualitativa e quantitativa que levaram a identificação dos estágios da Criatividade em Matemática e da Aprendizagem Significativa, alcançados pelos estudantes neste problema (3).



Quadro 39 - Análise qualitativa das respostas problema (3)

	Estudante [1] a) Sequência de números 1, nas diagonais, sequência de números naturais nas diagonais, sequência de múltiplos nas diagonais, progressão nas horizontais; b) Somatória de resultados 9 e 90 na forma triangular; c) Difícil; d) Sequência de números naturais, <u>números primos</u>, progressões geométricas, números inteiros; e) Sim, <u>estimulou pontos dos quais não recordava</u> em relação a análises de combinações; f) A perspectiva sobre as sequências vai além do conjunto padrão de diagonal, vertical e horizontal, quando se pretende formar combinações numéricas; g) Sem sugestões.
	Estudante [2] a) Horizontal: todos os quadrados são palíndromos; b) Soma das linhas: $\begin{array}{r} \text{Soma das linhas} = 2^n \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ 1 \quad 10 \quad 45 \quad 120 \quad 210 \quad 252 \quad 210 \quad 120 \quad 45 \quad 10 \quad 1 \end{array}$ c) Muito fácil: os cálculos são bem simples e é fácil entender a premissa, d) Números naturais, Números triangulares, além das somas.  e) Sim, até relaxante. É interessante construir e depois procurar os padrões das sequências; f) Sim, existem várias formas de enxergar uma única coisa. E que podemos transformar alguma ideia simples em complexa; g) Apresentar outras formas de abordar o tema: Ex.: relacionar com outros temas e aplicações.
	Estudante [3] a) Sim, todos os números naturais. Horizontal: todos palíndromos; b) Sequência dos números naturais; c) Difícil; d) Não tem; e) Sequência dos números naturais; f) Mais difícil que a primeira e g) Não tenho sugestões no momento.
	Estudante [4] a) Diagonal (sem mais descrições); b) Sequência diagonal de 1 a 10 esquerda e direita. Sequência diagonal, soma com os naturais (1+2 = 3+3 = 6...); c) Moderado; d) Números naturais. Soma 1+2 = 3+3 = 6+4 = 10+5 = 15+6 = 21+7 = 28+8 = 36...; e) Sim. Desperta a curiosidade de formar o triângulo; f) Sim, melhora a adição e g) No momento, sem sugestões.
	Estudante [5] a) As diagonais externas são compostas por 1, as diagonais internas mais externas expressam os <u>números naturais, os números de uma pirâmide cujo topo se encontra numa das diagonais externas são um reflexo da pirâmide que externa a linha que dá a base de ambos os triângulos</u>; b) A soma dos números de uma linha é o dobro da soma dos números da linha anterior (ou linha 1 = 2⁰, linha 2 = 2¹, linha 3 = 2², ..., linha n = 2ⁿ⁻¹). A segunda diagonal mais externa (1, 3, 6, 10, 15, 21) expressa $a_n = a_{n-1} + n$; c) Fácil; d) Números naturais, progressão geométrica e recorrência; e) Sim, pois abordou assuntos que estavam perdidos na minha memória; f) Sim, algumas relações não fizeram sentido na atividade anterior e g) Calcular o tempo de análise.
Não tem.	Estudante [6] -----
	Estudante [7] a) Sem resposta; b) Moderada; c) Números naturais; d) Sim, apenas de conhecermos o Triângulo de Pascal e todas as aplicações, não paramos com frequência para analisar suas sequências e números; e) Aprendi a treinar meu raciocínio lógico e f) Sem resposta.

Fonte: autora (2024)



Na análise das respostas do problema (3), obteve-se que o estudante E1, identificou as sequências: sequência de números 1, nas diagonais, sequência de números naturais nas diagonais, sequência de múltiplos nas diagonais, progressão nas horizontais. Destacou a somatória de resultados 9 e 90 na forma triangular, não identificada nos dados da resposta. Classificou como difícil. Afirmou que a atividade o estimulou a “pontos dos quais não recordava” em relação a análises de combinações. Destacou que a perspectiva sobre as sequências vai além do conjunto padrão de diagonal, vertical e horizontal, quando se pretende formar combinações numéricas.

Mesmo não tendo identificado muitas das sequências existentes, o estudante expressou que recorreu aos conhecimentos prévios para ajudar na identificação das sequências e na tentativa de encontrar algo novo, essa atitude expressa uma busca para aumentar a sua flexibilidade e a integração de conceitos. Para Minayo et. al (2016, p. 103) a “atitude é o conceito básico, entendendo-a como predisposição, relativamente estável e organizada, para reagir sob forma opinião (verbal), ou de atos (comportamental)”.

Neste sentido, os significados de conjunto padrão de diagonal, vertical e horizontal, demonstrou um estímulo para o estudante E1, na identificação de outros padrões de sequências mais complexas.

O estudante E2, afirmou que “todos os quadrados são palíndromos”. Na soma das linhas, identificou o padrão 2^n , $s = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4} + \dots$, destacado na relação da Figura 38:

Figura 38 - Soma das linhas do triângulo numérico

Handwritten mathematical work showing the sum of rows of a Pascal's triangle. The title is "SOMA DAS LINHAS = 2^n ". Below it, four rows are shown with their sums: Row 1: 1 = 2^0 ; Row 2: 1+1 = 2 = 2^1 ; Row 3: 1+2+1 = 4 = 2^2 ; Row 4: 1+3+3+1 = 8 = 2^3 .

Fonte: Estudante (E2)

Nos enunciados do estudante E2, classificou esse problema como muito fácil, descreveu “os cálculos são bem simples e é fácil entender a premissa”, fato que o levou a identificação de várias sequências e fez a demonstração por indução Matemática. Afirmou que a atividade é “até relaxante é interessante construir e depois procurar os padrões das sequências”, pode-se identificar que o problema o levou a reflexões para além dos conceitos e padrões da Matemática.

Continuou afirmando que “existem várias formas de enxergar uma única coisa. E que podemos transformar alguma ideia simples em complexa”. A expressão do estudante em relação aos conceitos e ao conteúdo demonstra que foi compreendida quando ele afirma



“transformar alguma ideia simples em complexa”, muito provavelmente devido a sua identificação de sequências comuns e incomuns mesmo na rotina acadêmica do estuante de Matemática. O estudante sempre demonstrava expressão corporal de alegria quando descobria algo novo, e com um simples problema pôde trazer ou abordar diversos conceitos.

Esses momentos podem ser considerados como momentos de construção de conceitos com significados, em aplicações na própria Matemática. Abordando os estágios de aprendizagem em tela a esta pesquisa, identificou-se o termo “palíndromo” observado por este estudante, o conceito de potência em cada linha e citou os números triangulares, mas não destacou na resposta. Seus resultados levam ao nível moderado de fluência, flexibilidade, originalidade e elaboração. Quanto aos significados, os conceitos de sequências foram bem definidos, alcançou boa compreensão, fez uma integração moderada e distinguiu os conceitos de forma eficaz.

O estudante E3, em sua resposta descreveu a identificação dos números naturais, no sentido horizontal “todos palíndromos”, mas não fez demais descrições. A insuficiência das descrições levou as análises a classificação de baixo nível de fluência, neste problema, conseguiu identificar mais de uma sequência, alcançando um nível de flexibilidade superior aos obtidos nos problemas anteriores. Classificou como “mais difícil que a primeira”, o fato de classificação como difícil, demonstra que o estudante tem dificuldades de relacionar os conceitos prévios ao problema, neste sentido, os significados, os conceitos foram incipientes para resolver este problema, alcançando baixo nível de compreensão, ainda em expressão verbal o participante, afirmou “não me recordo de muita coisa”, apesar de estar cursando o oitavo módulo do curso.

A declaração verbal do participante “não me recordo de muita coisa” o impeliu a uma reflexão sobre suas vivências educacionais, abrangendo não apenas o período acadêmico atual. Cabe ressaltar que o estudante E3 reingressou no ambiente universitário após um período de trinta anos de afastamento do ensino formal. Adicionalmente, a jornada de trabalho diurna pode ter constituído um fator influente, resultando em uma diminuição da reatividade cognitiva atribuível à fadiga física e mental.

O estudante E4, descreveu que identificou as sequências na diagonal de 1 a 10 esquerda e direita. Sequência diagonal, soma com os naturais ($1 + 2 = 3 + 3 = 6 \dots$). Classificou a atividade como moderada. Fez as conjecturas com os números naturais: $1 + 2 = 3 + 3 = 6 + 4 = 10 + 5 = 15 + 6 = 21 + 7 = 28 + 8 = 36 \dots$. Afirmou que o problema lhe despertou a curiosidade de formar o triângulo.



Destaca-se esse momento como um avanço do estágio da preparação importante para a formação de conceitos com significados. As conjecturas elaboradas para a formação dos triângulos indicam que o estudante está engajado na formulação de uma combinação curiosa ou inédita em sua trajetória acadêmica, motivado pela busca da compreensão do conceito de fractal. Em outras palavras, a incubação desses conceitos possui o potencial de transformar-se em conceitos com significado pleno mediante o processo de iluminação.

Portanto, as habilidades da Criatividade em Matemática, levaram a composição da sequência de números naturais, não definida, mas citada na frase “sequência diagonal de 1 a 10 esquerda e direita”, regra de Michel Stiefel demonstrou um nível mais elevado nas habilidades em relação aos problemas anteriores realizada por E4. E quanto aos significados, os conceitos identificados foram pertinentes a atividade, distinguidos de forma moderada, demonstrando avanço no discernimento entre os conhecimentos prévios e os novos de fractais.

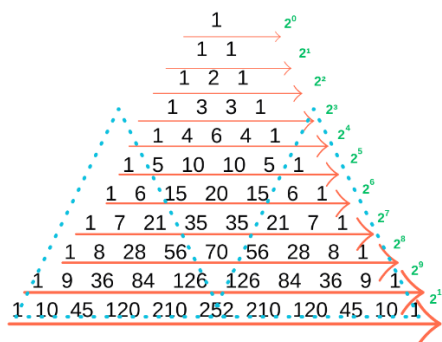
O estudante E5, identificou que “as diagonais internas geram os números naturais”, “os números de uma pirâmide cujo topo se encontra numa das diagonais externas, são um reflexo da pirâmide que forma a linha que dá a base de ambos os triângulos” essa última descrição destaca uma descoberta única do grupo.

A citação “a soma dos números de uma linha é o dobro da soma dos números da linha anterior” (ou linha $1 = 2^0$, linha $2 = 2^1$, linha $3 = 2^2$,..., linha $n = 2^{(n-1)}$). A segunda diagonal mais externa (1, 3, 6, 10, 15, 21,...) expressa $a_n = a_{(n-1)} + n$. Classificou como fácil, afirmou que a atividade lhe fez lembrar os conceitos “sim, abordou assuntos que estavam na minha memória”, a expressão verbal é particularmente relevante ao considerar o notável interesse do participante pela disciplina de Matemática, fator que pode ter contribuído para a facilidade de recordar de diversos conceitos matemáticos.

Para ilustrar as expressões do pensamento do estudante E5, identificadas como originais no grupo e elaboradas pelos modelos algébricos e em sua descrição verbal, foi elaborada a Figura 39, reconstrói a “os números de uma pirâmide cujo topo se encontra numa das diagonais externas, são um reflexo da pirâmide que forma a linha que dá a base de ambos os triângulos”, destaque pontilhado azul de dois triângulos paralelos de mesma base. E “a soma dos números de uma linha é o dobro da soma dos números da linha anterior”, destaca-se a sequência da potência de base 2, reproduzida até a linha onze do triângulo numérico de Pascal.



Figura 39 – Ilustração das ideias do estudante E5



Fonte: autora (2025)

Quanto aos elementos da Criatividade em Matemática na resposta deste estudante, identificou-se os conceitos de progressão geométrica e dos termos de uma sequência numérica. Nos significados, demonstrou compreender os conceitos utilizados na solução, apresentou formas algébricas para demonstração, na dissociação observou-se que sua forma de distinguir os conceitos com poucas dificuldades.

Do mesmo modo, foi reconstruída a sequência identificada por este mesmo estudante, ao expressar na sua descrição “a segunda diagonal mais externa (1, 3, 6, 10, 15, 21,...) expressa $a_n = a_{n-1} + n$ ”, temos:

$$a_n = a_{n-1} + n \quad \text{para} \quad n = \{1, 2, 3, 4, 5 \text{ e } 6\}$$

- | | | | | | |
|----|---------------------|----|---------------------|----|---------------------|
| a) | $a_1 = a_{1-1} + 1$ | b) | $a_2 = a_{2-1} + 2$ | c) | $a_3 = a_{3-1} + 3$ |
| | $a_1 = a_0 + 1$ | | $a_2 = a_1 + 2$ | | $a_3 = a_2 + 3$ |
| | $a_1 = 0 + 1$ | | $a_2 = 1 + 2$ | | $a_3 = 3 + 3$ |
| | $a_1 = 1$ | | $a_2 = 3$ | | $a_3 = 6$ |
| d) | $a_4 = a_{4-1} + 4$ | e) | $a_5 = a_{5-1} + 5$ | f) | $a_6 = a_{6-1} + 6$ |
| | $a_4 = a_3 + 4$ | | $a_5 = a_4 + 5$ | | $a_6 = a_5 + 6$ |
| | $a_4 = 6 + 4$ | | $a_5 = 10 + 5$ | | $a_6 = 15 + 6$ |
| | $a_4 = 10$ | | $a_5 = 15$ | | $a_6 = 21$ |

A projeção do modelo foi realizada para que pudesse revelar as representações dos indícios da flexibilidade nas ideias do estudante E5, e pontos raros de elaboração identificados no grupo. Que, traz como contribuição para a pesquisa, que os conceitos elaborados fortalecem os significados quando compreendidos, integrados e dissociados, os quais levam ao melhor discernimento dos novos conceitos.



O estudante E7, não trouxe rabiscos e nem descrições destacadas de sequências nos dados iconográficos, classificou o problema com nível de moderada. Afirmou que a atividade lhe fez refletir que “apesar de conhecermos o Triângulo de Pascal e todas as aplicações, não paramos para analisar suas sequências e números”, “aprendi a treinar meu raciocínio lógico”. As expressões descritas, demonstram, no grifo “apesar de conhecermos o Triângulo de Pascal”, que o contexto do problema não foi algo novo, mas que agregou algum significado com a expressão da segunda citação “aprendi[...]” demonstra uma possibilidade de identificação em novas observações pelo estudante.

Quanto as habilidades da Criatividade em Matemática, as descrições nas respostas foram incipientes para análise, identificou-se na imagem apenas uma única sequência destacada, supõe-se que, pode não ter sido uma experiência nova para o estudante, logo, não se encontrou motivação para explorar novos conceitos. E quanto aos significados, observou-se o destaque da menção a técnica do Triângulo de Pascal como algo significativo e conhecido para o participante.

Com a conclusão das análises qualitativas do problema (3), obteve-se destaque no progresso dos estudantes E2 e E5, um alcance de maior nível na compreensão, mesmo que os outros estudantes tenham obtido níveis inferiores, mas em relação aos seus próprios desempenhos tiveram progresso significativos em relação as respostas anteriores, identificou-se novos conceitos nas expressões verbais e descritivas.

A Tabela 3 foi composta pelos resultados das análises qualitativa das respostas do problema (3), e que permitiu novamente observar o aumento nos níveis de Criatividade em Matemática e Aprendizagem Significativa.

Tabela 3 - Resultado quantitativo do problema (3)

E	Inter	Criatividade em Matemática				Aprendizagem Significativa Subordinada		
		Fluência	Flexibilidade	Originalidade	Elaboração	Compreensão	Integração	Dissociação
E1	[1, 5]	3	1	1	1	2	2	1
E2	[1, 5]	3	3	2	3	4	3	4
E3	[1, 5]	1	2	2	1	2	1	1
E4	[1, 5]	2	2	2	2	3	2	2
E5	[1, 5]	4	4	4	4	5	4	4
E6	[1, 5]	1	1	1	1	1	1	1
E7	[1, 5]	3	2	1	3	3	2	2

Legenda: E – Estudante; Inter – Intervalo.

Fonte: Produção da autora (2024)



O problema (4), aborda a construção do Triângulo de Sierpinsk, objetivou-se construir a primeira ideia de fractal, reforçando o conceito de similaridade, a serem observados nos padrões das trincas dos números 1s e 0s. No Quadro 40, cinco respostas foram analisadas:

Quadro 40 - Análise qualitativa das respostas do problema (4)

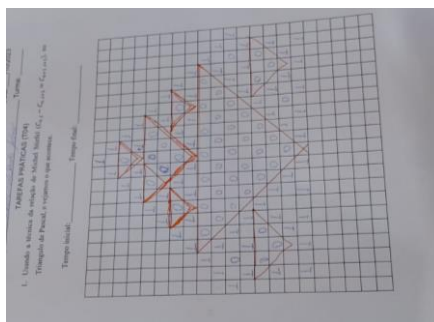
Estudante [1], Resposta: Padrão de leitura binária, matrizes. Matriz e PG. Não, significativa em relação ao desenvolvimento e abordagem ao triângulo de Pascal. Sim, consegui identificar padrões e leituras matemáticas em várias formas até então, desconhecidas para mim.
Estudante [2], Resposta: Diagonal: (1, 1, 1, 1, 1, ...), (1, 0, 1, 0, 1, 0, ...), (1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, ...), (1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, ...). Os uns e zeros formam triângulos . Sequência, Geometria, Alternância, padrões, simetria, base 2. Já durante as aulas dessa mesma disciplina, porém continua sendo uma nova experiência. Sim, novas explicações de conceitos vistos anteriormente. Geometria, simetria, sequência. Não sei, ainda.
Estudante [3], Resposta: Algumas sequencias numéricas. Nenhum. Não, me senti uma criança sem imaginação . Sim, olhar mais atentamente as atividades. Não sei . Novo tempo.
Estudante [4], Resposta: Formas geométricas triangulares. Sequências numéricas. Não, a experiência foi um pouco diferente das atividades do cotidiano. Sim. Identificar padrões a partir da observação. Sequências, Técnica da Relação de Michel Stiefel, triângulo de Pascal . Apresentar nas instruções os conceitos de relação de Michel Stiefel de forma mais compreensível .
Estudante [5], Resposta: Sem descrição. Matemática básica, subtração, soma e raciocínio lógico. Não, significativa em relação ao desenvolvimento e abordagem de um triângulo. Sim, consegui observar padrões e leis de formação , até então desconhecidas por mim. Matemática básica e raciocínio lógico. Sem descrição.

Fonte: autoras (2024)

Neste problema a construção do triângulo com os números de sequências numéricas não eram mais novidade, mas a identificação dos padrões de 1s e 0s, foi uma nova abordagem para integrar o conceito de similaridade e iterações. Conceitos fundamentais na Geometria Fractal. E o Triângulo de Sierpinsk foi utilizado para essa integração dos conceitos dos organizadores prévios ao conceito inicial de fractais, para fortalecer o discernimento destes conceitos.

Os momentos do problema (4), tiveram pouquíssimos registros, a Figura 40, aborda o ensaio da construção da imagem do Triângulo de Sierpinsk do estudante (E3):

Figura 40 – Identificação da similaridade



Fonte: Estudante (E3)



As análises desse problema trouxeram resultados mais expressivos quanto as dimensões da Criatividade em Matemática e da Aprendizagem Significativa Subordinada, certamente a resolução do problema (3) colaborou significativamente para a compreensão do problema (4), visto que os estudantes levaram minutos para elaborar suas respostas. Dos sete participantes dois estiveram ausente, aos que estiveram presentes demonstraram um avanço significativo, conforme a Tabela 4, o nível de fluência obteve maior avanço:

Tabela 4 - Resultado quantitativo do nível do problema (4)

E	Inter	Criatividade em Matemática				Aprendizagem Significativa Subordinada		
		Fluência	Flexibilidade	Originalidade	Elaboração	Compreensão	Integração	Dissociação
E1	[1, 5]	4	3	3	2	4	3	3
E2	[1, 5]	5	3	2	2	5	3	3
E3	[1, 5]	5	2	1	3	2	2	1
E4	[1, 5]	4	3	2	2	4	3	3
E5	[1, 5]	4	3	3	2	5	3	2
E6	[1, 5]	1	1	1	1	1	1	1
E7	[1, 5]	1	1	1	1	1	1	1

Legenda: E – Estudante; Inter – Intervalo.

Fonte: autoras (2024)

Apenas o estudante E3, não alcançou nível similar aos demais, porém, em relação ao seu próprio desenvolvimento, desenvolveu melhor a fluência alcançando o nível mais elevado. Os demais todos tiveram progressos que elevaram os níveis nas dimensões da Criatividade em Matemática e Aprendizagem Significativa.

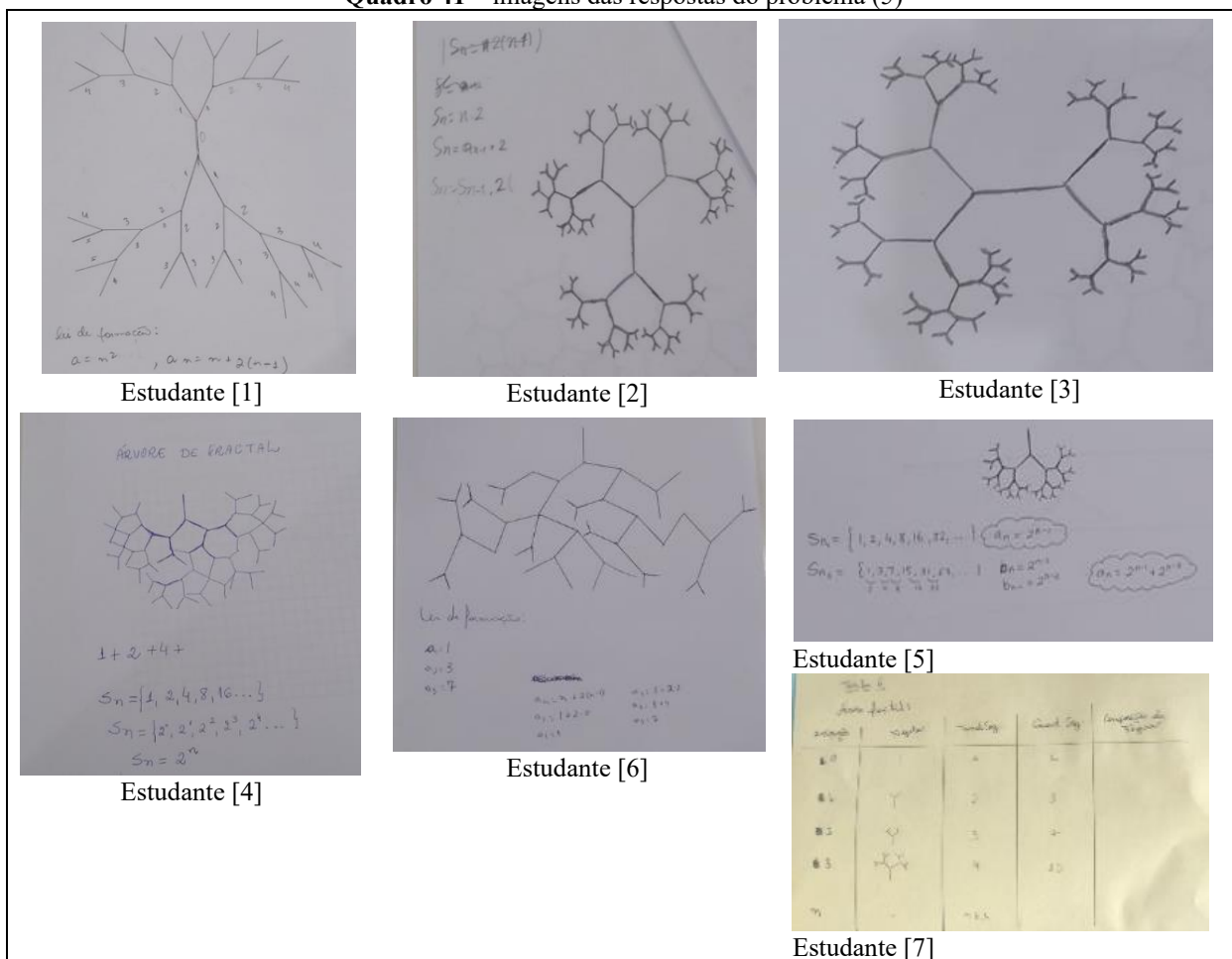
O problema (5), da “árvore fractal”, denominado desta forma para ilustrar a ideia de uma árvore, que tem sua origem em uma semente, que gerada por apenas um broto, dá origem a estrutura, como o tronco e seus galhos, etc. A ideia central deste problema, teve objetivo de construir uma estrutura para representar a similaridade, o número de segmentos e o número de iterações a partir de um segmento de reta.

Para a resolução deste problema foi esperado que os estudantes pudessem reunir os conceitos já aplicados na resolução dos problemas anteriores, como progressão geométrica, padrões, segmento de reta, ângulo. A partir destes conceitos já estudados, esperou-se que a fluência e a flexibilidade pudessem obter melhor desenvolvimento.

O Quadro 41, compõe as iconografias de seis respostas do problema (5), o desenho da simulação das árvores e os modelos matemáticos identificados pelos estudantes:



Quadro 41 – imagens das respostas do problema (5)



Fonte: autoras (2024)

O estudante E1, elaborou os segmentos enumerados possivelmente identificando o número de iterações da “árvore”. Na Criatividade em Matemática, identificou-se a lei de formação que destacou $a = n^2$, $a_n = n + 2(n - 1)$, apresentou duas equações distintas, mas somente uma soluciona parte do problema o número da soma dos segmentos da “árvore” em cada iteração de n .

Nos significados, a análise destacou um nível moderado de dissociação do estudante em relação ao conceito de iteração com a lei de formação. Desse modo, percebe-se que a compreensão foi incompleta ou os termos foram descritos de forma equivocada, ao invés de uma potência de base 2, descreveu uma potência de base n e talvez, para calcular a quantidade dos segmentos conforme as iterações, elaborou uma equação com duas variáveis n que geram uma sequência diferente.

A resposta demonstra possível equívoco na utilização dos subsunçores com os termos “padrões” para a “iteração” da árvore fractal. Seu desenho foi elaborado com duas “copas” com ângulos aparentemente semelhantes. Vale ressaltar que para elaboração da atividade foi



entregue somente uma folha de papel A4 em branco para cada estudante, e percebeu-se que alguns ficaram aguardando o momento em que seriam orientados para elaborar o próprio problema. Foi realizada uma breve explicação sobre a formação das árvores, comparando a uma árvore real com estrutura robusta com raízes e copa firme. E, após essa explanação os estudantes foram desafiados e reproduzir uma árvore de segmentos de reta, observar o padrão de crescimento em forma do senso comum de bifurcação, para a sequência elaborar uma lei de formação.

Na resolução do estudante E2 os segmentos elaborados tiveram dimensões maiores e foi diminuindo a proporção conforme o nível de iterações, mas não identificou o nível de iteração no desenho. As fórmulas apresentadas foram:

$$S_n = n \cdot 2 \quad (1)$$

$$S_n = a_{n-1} \cdot 2 \quad (2)$$

$$S_n = s_{n-1} \cdot 2 \quad (3)$$

Nenhuma das fórmulas apresentadas tem solução para encontrar a quantidade de segmentos em determinada iteração, mas os ensaios tiveram um bom início. Nos significados, apresentou baixa dissociação do conceito de iteração com a lei de formação. Não houve descrições suficiente para identificar a compreensão do estudante quanto ao conceito de fractal.

O estudante E3, elaborou a “árvore fractal” sem identificação do número de iterações, partindo do centro com um segmento maior e diminuindo a proporção do tamanho nos demais níveis. Não descreveu a lei de formação. Para avaliação da Criatividade em Matemática, os conceitos foram incipientes não obtendo a identificação das habilidades. Quanto aos significados, apresentou baixa dissociação do conceito de iteração neste problema, a partir de análise dos dados iconográficos e a lei de formação elaborada.

O estudante E4 construiu um segmento central, não identificou o nível de iteração, mas rabiscou a miniatura da construção até a quarta iteração, quanto ao tamanho do segmento não manteve padrão, desenvolveu a generalização. Na quantidade de segmentos em cada iteração, esboçou até a generalização da lei de formação. Apresentou as descrições no âmbito dos conjuntos:

$$S_n = \{1, 2, 4, 8, 16, \dots\} \quad (1)$$

$$S_n = \{2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4 \dots\} \quad (2)$$

$$S_n = 2^n \quad (3)$$



Nos significados, apresentou moderada dissociação do conceito de iteração. Os subsunçores da lei de formação ainda não estavam totalmente dissociados para realizar a integração de similaridade e iteração da árvore fractal, mas os modelos matemáticos identificados estavam convergindo para a solução correta. Mostra um avanço significativo para este estudante, demonstrando traços de elaboração e integração de conceitos.

O estudante E5 fez um esboço da “árvore fractal” iniciando com o pequeno segmento, crescendo os níveis para baixo. Fez a análise completa:

$$S_{n1} = \{1, 2, 4, 8, 16, 32 \dots\}, a_n = 2^{n-1} \quad (1)$$

$$S_{n2} = \{1, 3, 7, 15, 31, 63 \dots\}, a_n = 2^{n+1} \text{ e } b_n = 2^{n+2} \quad (2)$$

Apresentou sequências construídas de cada nível de iteração, fez a composição algébrica. Apresentou maior nível de flexibilidade para a estrutura fractal, as relações algébricas foram minuciosamente descritas o que demonstra habilidade de elaboração e discernimento dos conceitos. A resposta apresenta boa dissociação do conceito de iteração com a lei de formação da progressão. Os subsunçores foram suficientes para integrar a similaridade e a iteração, chegou muito perto de elaborar a lei de formação completa para as iterações e a soma da quantidade de segmentos.

O estudante E5 fez a seguinte observação verbal “agora faz sentido para mim, eu não tenho dificuldade com o conceito de PG, mas, agora, compreendi uma aplicação real”. Ao analisar essa fala, percebe-se que, para esse estudante, naquele momento, apenas conhecer o conceito do modelo matemático não era suficiente para resolver o problema de forma significativa. Assim, conforme a percepção do significado matemático, a sua resolução adquiriu sentido, quando vinculou a um constructo, como ele próprio afirmou “faz sentido”.

Nesse contexto, é possível considerar que o significado da Progressão Geométrica permanecerá na memória do estudante, associado ao conceito da “árvore fractal”. Tal relação favorece a recuperação dessa informação de maneira mais eficaz, indicando, portanto, a formação de um novo subsunçor.

Do mesmo modo, é possível evidenciar o momento em que expressa o termo “faz sentido” como um indício do estágio de iluminação, que o conceito de Progressão Geométrica se tornou significativo a partir da compreensão em uma aplicação para resolver um problema.

O estudante E6, elaborou os segmentos da “árvore fractal” em tamanhos similares, perdeu a ordem da sequência a partir da terceira iteração. Quanto a lei de formação apresentou o modelo:



$$a_n = n + 2(n - 1)$$

Identificou os três primeiros termos da sequência:

$$a_n = 1 \rightarrow a_n = 3.$$

O elemento da elaboração da lei de formação representou uma PA:

$$a_n = n + 2(n - 1).$$

Quanto a Criatividade em Matemática, na construção da árvore a resposta foi semelhante às dos outros estudantes, no entanto elaborou uma resposta que gera o número de segmentos em cada iteração. Na Aprendizagem Significativa, apresentou moderada dissociação do conceito de iteração, os ensaios da lei de formação contêm moderada integração e dissociação. Observa-se um progresso significativo nas respostas do estudante.

E o estudante E7, esboçou a figura conforme o nível de iterações, identificou que o tamanho do segmento seria a sequência de 1 a 4, generalizando $n + 1$. Na quantidade de segmentos esboçou a sequência, $\{1, 3, 7, 15, \dots\}$. Não realizou nenhuma elaboração completa de modelo da lei de formação. Apresentou nível de integração limitado e do mesmo modo a dissociação do conceito de iteração, apresentou forma limitada.

As dimensões da Criatividade em Matemática e da Aprendizagem Significativa na Tabela 5, apresentou um avanço nos níveis, o que implica que houve desenvolvimento significativo dos estudantes com relação a integração dos subsunçores na formação do conceito de Geometria Fractal. Ainda que alguns tenham apresentado dificuldades, a maioria obteve nível mais elevado a cada problema resolvido.

Tabela 5 - Resultado quantitativo do problema (5)

E	Inter	Criatividade em Matemática				Aprendizagem Significativa Subordinada		
		Fluência	Flexibilidade	Originalidade	Elaboração	Compreensão	Integração	Dissociação
E1	[1, 5]	3	2	2	2	4	3	3
E2	[1, 5]	4	4	3	1	4	3	3
E3	[1, 5]	2	1	1	1	2	1	1
E4	[1, 5]	4	3	3	2	4	3	2
E5	[1, 5]	5	5	4	4	5	4	4
E6	[1, 5]	3	2	2	2	3	2	2
E7	[1, 5]	3	2	2	2	3	2	2

Legenda: E – Estudante; Inter – Intervalo.

Fonte: autora (2024)



O problema (5), trouxe novos desafios para os estudantes, alguns tiveram dificuldades, mas os resultados apresentam-se mais ascendente em relação aos problemas anteriores. Os resultados trouxeram indícios algébricos interessantes na construção dos modelos matemáticos.

6.1.2 Análise descritiva das respostas dos problemas

Para a análise descritiva (Apêndice F) dos resultados dos cinco problemas solucionados pelos estudantes, foram utilizados os parâmetros: média da escala *Likert* 2,5, quantidade de pontos para obtenção da curva em formato de sino 100 pontos e média de (+4dp) e (-4dp), média padrão para obtenção da curva. E, para identificação das frequências em cada nível alcançado do intervalo da escala *Likert* tanto das dimensões da Criatividade em Matemática quanto na Aprendizagem Significativa.

Nas dimensões da Criatividade em Matemática obteve-se a frequência relativa, Tabela 6 das habilidades criativas:

Tabela 6 – Frequência relativa dos níveis de habilidades criativas

Intervalo	Fluência	Flexibilidade	Originalidade	Elaboração
1	8	15	17	16
2	6	11	9	9
3	9	6	7	7
4	6	2	2	3
5	6	1	0	0

Fonte: autora (2024)

Por meio das frequências, e os dados informados no início deste tópico, obteve-se os demais parâmetros de análise, os quais tiveram como objetivo de identificar a função de probabilidade máxima e posteriormente elaborar o gráfico do desvio padrão correlacionado a distribuição de probabilidade entre as habilidades criativas, Tabela 7:

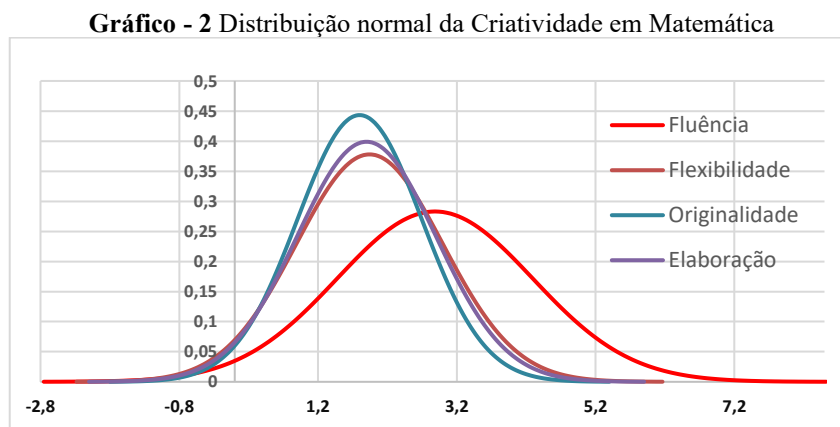
Tabela 7 – Parâmetros descritivos das habilidades criativas

	Fluência	Flexibilidade	Originalidade	Elaboração
Média	2,9	1,9	1,8	1,9
Desvio Padrão	1,4	1,1	0,9	1,0
Média +4dp	8,5	6,2	5,4	5,9
Média -4dp	-2,8	-2,3	-1,8	-2,1
Qtde Pontos	100	100	100	100
Incremento	0,11	0,09	0,07	0,08

Fonte: autora (2024)



Foram elaborados os valores de resultado das funções de probabilidade máxima para gerar o Gráfico 2, que demonstra a distribuição normal dos níveis de desenvolvimento dos estudantes nas dimensões da Criatividade em Matemática. Foi utilizado um intervalo de confiança de 4 desvios padrão, estabelecendo o intervalo de $[(8,7); (-2,5)]$.



Fonte: autora (2024)

A distribuição encontra-se dentro da normalidade, a dimensão fluência apresentou menor dispersão em relação à média das habilidades criativas, e muito próximas estão a flexibilidade e a elaboração. Enquanto a originalidade encontra-se um pouco mais distante. O comportamento dos dados está convergindo para a média e se ajustando aos estágios da preparação e incubação do conceito de Geometria Fractal.

Compreende-se que o estágio da incubação está se estabelecendo observando o avanço nos níveis de flexibilidade, originalidade e elaboração. O que pode ser conferido na Tabela 8, que reúne a média e o desvio padrão das habilidades:

Tabela 8 – Análise descritiva das habilidades criativas dos problemas

	Criatividade em Matemática			
	Fluência	Flexibilidade	Originalidade	Elaboração
Média	2,9	1,9	1,8	1,9
Variância	2,0	1,1	0,9	1,0
Desvio Padrão	1,4	1,0	0,9	1,0

Fonte: autora (2024)

Observou-se na composição das análises das habilidades da Criatividade em Matemática, um avanço dos níveis maiores próximos da média geral 2,5 o que implica no desenvolvimento dessas habilidades. Portanto, compreende-se que os estudantes alcançaram



progresso no percurso das resoluções, considerando que a menor distância de pontuação da mediana foi de 0,7.

Quanto a variação e desvio padrão, observou-se menor dispersão na dimensão fluência, demonstrando um discernimento razoável, o que significa que a possibilidade de transposição foi incompleta, mas dentro do esperado nesta primeira fase da pesquisa.

Os níveis de flexibilidade, originalidade e elaboração, estão abaixo da mediana [3] da escala *Likert*, enquanto a fluência está mais próxima. Isso implica que quando a habilidade fluência ascende, os outros níveis são influenciados positivamente.

Os mesmos parâmetros foram utilizados nas dimensões da Aprendizagem Significativa, obteve-se a frequência relativa, Tabela 9:

Tabela 9 – Frequência relativa dos indicadores da Aprendizagem Significativa

Intervalo	Compreensão	Integração	Dissociação
1	6	12	12
2	9	9	9
3	5	12	7
4	7	2	6
5	8	0	1

Fonte: autora (2024)

Para identificar a função de probabilidade máxima e elaborar o gráfico do desvio padrão associado à distribuição de probabilidade entre as dimensões da Aprendizagem Significativa, foram utilizados os dados da Tabela 10. E, a partir desses resultados, obteve-se a média dos níveis das dimensões alcançadas pelos estudantes, bem como a variância e o desvio padrão.

Tabela 10 – Parâmetros descritivos da Aprendizagem Significativa

	Compreensão	Integração	Dissociação
Média	3,1	2,1	2,3
Desvio Padrão	1,4	0,9	1,2
Média +4dp	8,7	5,7	7,1
Média -4dp	-2,5	-1,5	-2,5
Qtde Pontos	100	100	100
Incremento	0,11	0,07	0,10

Fonte: autora (2024)

Na Aprendizagem Significativa, houve avanço dos níveis, com alcance muito próximos da média geral 2,5 o que implica no desenvolvimento significativo dos estudantes com relação



a integração dos organizadores prévios na formação do novo conceito relacionado ao conceito de Geometria Fractal, ainda que alguns tenham apresentado dificuldades na compreensão, a maioria obteve nível mais elevado em relação aos primeiros problemas.

Tabela 11 – Análise descritiva dos problemas (1 a 5)

	Aprendizagem Significativa Subordinada		
	Compreensão	Integração	Dissociação
Média	3,1	2,1	2,3
Variância	2,1	0,9	1,4
Desvio Padrão	1,4	0,9	1,2

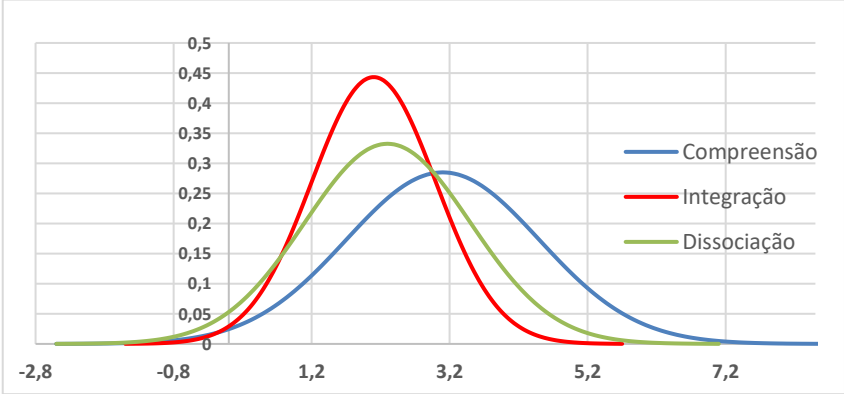
Fonte: autora (2024)

Na tabela 11, nas dimensões da Aprendizagem Significativa, a variância e o desvio padrão estão posicionadas mais próximas da média, exceto na dimensão integração. A integração está sendo relacionada e estabelecida nas conexões dos significados nos conceitos de álgebra, sequências, triângulo de Pascal, geometria plana da educação básica e na construção de um fractal geométrico com formas regulares.

Compreende-se que os estudantes alcançaram progresso no percurso das resoluções, quanto a variação e o desvio padrão, o que significa que a dissociação não está completa, mas dentro do esperado para a primeira fase da pesquisa.

Quanto a distribuição normal as dimensões da Aprendizagem Significativa Subordinada no Gráfico 2, encontra-se dentro da normalidade, apresenta comportamento convergente para a média, a dimensão compreensão apresentou menor dispersão em relação à média, a dissociação se aproxima levemente, o que significa maior avanço da capacidade de dissociar os conceitos. Enquanto a integração encontra-se um pouco mais distante.

Gráfico - 3 Distribuição normal da Aprendizagem Significativa



Fonte: autora (2024)



O comportamento dos dados está convergindo para a média e se ajustando aos estágios Aprendizagem Significativa Subordinada. Dos problemas do conjunto dos organizadores prévios, obteve-se que os conceitos foram sendo transformados e acomodados a cada resolução de problema. Três estudantes tiveram um progresso significativo para assimilar os conceitos da Geometria Fractal, mais especificamente nos problemas 4 e 5, abordando o conceito de similaridade e iterações, identificando o termo *fractus* e a autossimilaridade no Triângulo de Sierpinski.

Para concluir a análise descritiva, analisou-se o desvio da correlação entre as dimensões da Criatividade em Matemática e da Aprendizagem Significativa, que se mostrou bastante reduzido, representando um progresso dentro do esperado. Embora a integração das ideias, a identificação de traços originais e outros de forma incipiente, observou-se um resultado expressivo no progresso individual dos estudantes em comparação ao grupo analisado.

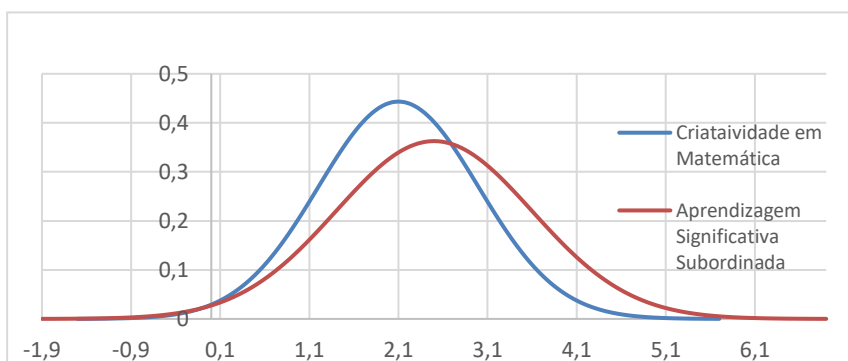
Tabela 12 – Correlação: Criatividade em Matemática e Aprendizagem Significativa Subordinada

	Criatividade em Matemática	Aprendizagem Significativa
Média	2,1	2,5
Desvio Padrão	0,9	1,1

Fonte: autora (2024)

Embora a Criatividade em Matemática esteja alguns pontos da média abaixo da Aprendizagem Significativa, não significa um desenvolvimento inferior, justifica-se que escala da média envolveu quatro dimensões em relação a três dimensões da Aprendizagem Significativa. O Gráfico 4 da distribuição, está dentro da normalidade, os estágios da Criatividade em Matemática estão se acomodando aos estágios da Aprendizagem Significativa com diferença de poucos pontos.

Gráfico - 4 Criatividade em Matemática e Aprendizagem Significativa



Fonte: autora (2024)



O gráfico apresenta o formato de sino em relação à média geral das respostas dos problemas, que representa uma correlação positiva. Significa que houve progresso na elaboração e acomodação dos organizadores prévios para aprendizagem significativa da Geometria Fractal. Observou-se uma relação harmônica entre fluência e a compreensão, implicando em respostas mais fluentes e a compreensão agregou mais significados.

As dimensões da Criatividade em Matemática mostraram-se relevantes para a compreensão dos novos significados relacionando os conceitos de potenciação, produtos notáveis, sequências, termo geral da sequência e relação de Stiefel, no contexto dos organizadores prévios voltados à aprendizagem significativa dos conceitos de Geometria Fractal.

Após a validação das respostas, as observações comparativas foram fundamentais para apresentar a curiosa relação do Triângulo de Pascal com o Triângulo de Sierpinski, construído a partir da relação de Stiefel. Nesta fase esperava-se que os conceitos estudados fossem transformados e acomodados prontos para serem novamente assimilado a novas experiências como novos ancoradouros para sustentar a definição da Geometria Fractal. Os estudantes tiveram a oportunidade de recriar os triângulos utilizando o Geogebra para compreender a introdução ao estudo de fractais.

6.1.3 Análise do ensino criativo em Matemática com significado

Os estágios da Criatividade em Matemática: Preparação, Incubação, Iluminação e Verificação, não seguem uma linha estritamente linear, mas interagem dinamicamente, influenciando-se mutuamente. Na Aprendizagem Significativa, os estágios da Criatividade em Matemática colaboram para facilitar e acelerar o processo de aprendizagem, para que os novos conhecimentos de Geometria Fractal sejam ancorados nos subsunçores, resultando em uma compreensão mais profunda, integrada e duradoura. O produto interacional, conforme descrito por Ausubel (1980), é a essência dessa geração de significado, onde as novas ideias são reformuladas e acomodadas na estrutura cognitiva do estudante.

Dos resultados dos problemas elaborados para os organizadores prévios, destacou-se os momentos observados na prática dos estudantes, que foi fundamental para identificar elementos da aprendizagem, que se sobressaíram que são pertinentes aos estágios da Criatividade em Matemática. Na Análise de Conteúdo, destaca-se como análise temática na perspectiva da autora, quanto ao cenário dos dados em cada um dos estágios, no Estágio da Preparação, no



problema (1):

“observou-se que as respostas no geral se apresentaram confusas, os estudantes apresentaram dúvidas, mas não externaram verbalmente, percebeu-se um silêncio [...]. Os demais ficaram concentrados em silêncio, expressando apenas olhares fixos na atividade. Este comportamento inicial reflete a fase em que o estudante está ativamente tentando acessar e organizar seu conhecimento prévio que abordam o problema” (recorte das análises da autora, 2025).

Na identificação de significado, o estágio da preparação é fundamental para a Aprendizagem Significativa, pois envolve a ativação e a reorganização dos subsunçores na estrutura cognitiva do estudante. Ao confrontar o novo conceito (fractal) com o que já sabe (conceitos e regras da matemática básica), o estudante inicia o processo de análise cognitiva necessário para avaliar a relevância do novo material.

Embora possa haver confusão inicial, esse esforço consciente de busca e articulação de conhecimentos existentes é o alicerce para que futuras conexões significativas possam ser estabelecidas, conforme Ausubel *et al.* (1980), onde a reestruturação do novo conceito aprendido é um processo ativo.

No Estágio da Incubação, no problema (1):

“O silêncio expressou momento de concentração e possível busca de memórias correlatas”. Este período de aparente inatividade ou concentração silenciosa, sem uma solução imediata, sugere que os estudantes estavam em fase que a mente processasse informações em um nível menos consciente. Menos consciente de sentido de realizar buscas aleatórias de conceitos de sequências numéricas” (recorte das análises da autora, 2025).

Na identificação de significado, embora a incubação não seja um estágio diretamente observável em termos de resultado, a incubação é fundamental para a Aprendizagem Significativa, pois facilita a harmonia com as ideias existentes na estrutura cognitiva do estudante.

Durante este período, a mente pode estar reorganizando e combinando as informações da fase de preparação de maneiras novas e não óbvias. Isso pode levar à resolução de contradições aparentes e à formação de novas ligações entre o conhecimento prévio e o novo, sem o esforço consciente direto, preparando o terreno para um *insight*. A quietude permite que os subsunçores sejam ativados e que a nova informação comece a se fundir na estratégia pessoal de referência do estudante (Ausubel *et al.*, 1980).

Na análise temática no Estágio da Iluminação, destaca-se múltiplos exemplos:



Múltiplos exemplos ilustram este estágio: No problema (3), o estudante E1 afirmou que a atividade o estimulou a pontos dos quais não recordava. No problema (3), o estudante E5 afirmou que a atividade lhe fez lembrar os conceitos afirmando que recordou assuntos que estavam na sua memória. O exemplo mais contundente surge no problema (5), árvore fractal, quando o estudante E5 verbaliza: agora faz sentido pra mim, eu não tenho dificuldade no conceito de PG, mas agora eu compreendi uma aplicação real (recorte das análises da autora, 2025).

A iluminação representa o momento do *insight*, o surgimento súbito de uma nova ideia ou a conexão que faz sentido. Na identificação de significado, para a Aprendizagem Significativa, isso significa que a ideia nova (*a*) foi assimilada pela ideia estabelecida (*A*), resultando em um produto interacional (*A'a'*) (Ausubel *et al.*, 1980). A clareza e a aplicação real dos conceitos, como a PG na árvore fractal, demonstram que o conhecimento foi integrado de forma profunda e pessoal em alguns participantes do grupo.

Este estágio marca a passagem de uma informação isolada para um significado compreendido, onde o estudante pode a partir deste estágio, relacionar o novo aprendizado com seu repertório intelectual de maneira mais rica e aplicável. É a evidência de que a reestruturação do material aprendido ocorreu de forma eficaz.

A análise temática no Estágio da Verificação, apresentou múltiplos exemplos:

A análise de conteúdo oferece evidências da verificação para obtenção de significado: No problema (1), o estudante E2 Demonstrou domínio dos conceitos abordados, expressou linguagem matemática com boa fluência [...] alcançando nível de flexibilidade e originalidade. No problema (3), o estudante E5 apresentou formas algébricas para demonstração, na dissociação observou-se que sua forma de distinguir os conceitos é eficaz com poucas dificuldades. No problema (5), o estudante E5 apresentou excelente dissociação do conceito de iteração com a lei de formação da progressão (recorte das análises da autora, 2025).

Este estágio é fundamental para consolidar o significado gerado. A capacidade de articular, aplicar, demonstrar e refinar o conhecimento, seja através da fluência na linguagem Matemática, da elaboração de demonstrações algébricas ou da eficaz dissociação entre conceitos, indica que a aprendizagem não foi mecânica, mas significativa. A verificação permite que o estudante teste e valide a nova ideia, confirmando sua integração na estrutura cognitiva.

A retenção posterior do significado (Ausubel *et al.*, 1980) é evidenciada pela capacidade do estudante de utilizar o novo conhecimento de forma autônoma e em diferentes contextos, solidificando a transformação da ideia nova sofrida as modificações (*a'*) em um subsunçor que poderá ancorar futuros aprendizados. Esse ciclo de verificação também pode retroalimentar



novas fases de preparação, tornando o processo de aprendizagem contínuo e aprimorado.

Em resumo, a intersecção dos estágios da Criatividade em Matemática com os indicadores da Aprendizagem Significativa revelou um caminho robusto para a construção de conhecimento significativo.

Os momentos de esforço e confusão inicial no estágio da preparação, o processamento subconsciente na incubação, os insight de compreensão no estágio da iluminação e a consolidação por meio da aplicação e demonstração na verificação, trabalham em conjunto para que as ideias novas sejam não apenas memorizadas, mas compreendidas e integradas na estrutura cognitiva dos estudantes, transformando-se em subsunçores que fazem sentido e que podem ser recuperados ou reaprendidos com mais facilidade, devido às suas múltiplas ancoragens, como sustenta a teoria de Ausubel.

6.2 Problemas de Geometria Fractal com uso de *Software*

Os resultados foram colhidos das respostas dos problemas com a proposta de recriar as formas fractais com estruturas planas. O tipo de análise destes resultados será pela análise temática que aborda a leitura de objetos iconográficos. Na construção do Triângulo de Sierpinski, teve o objetivo de compreender o conceito de iteração e autossimilaridade expresso nos objetos elaborados. Para elaboração da resposta os estudantes foram orientados dos procedimentos para “criar ferramentas” no GeoGebra, a ferramenta após criada, com apenas um clique o mouse ela pode ser agregada ao objeto na área plana.

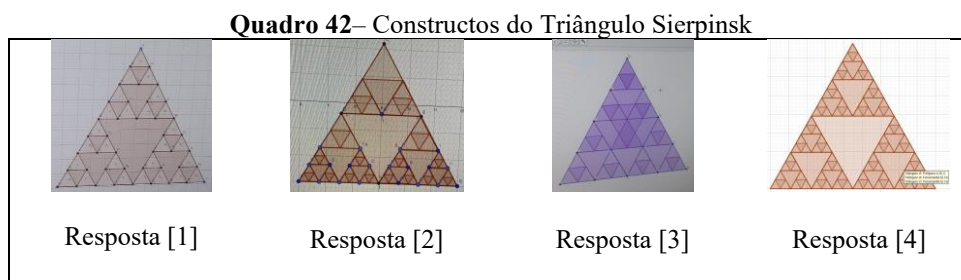
A análise dos resultados dos problemas, que envolviam a recriação de formas fractais bidimensionais no GeoGebra, foi conduzida por meio da análise temática, que se concentrou na leitura e interpretação dos objetos iconográficos produzidos pelos estudantes.

Especificamente, na atividade de construção do Triângulo de Sierpinski, o objetivo era que os estudantes compreendessem os conceitos de iteração e autossimilaridade, conforme expressos em suas construções. Esse momento ocorreu na aula após a elaboração com lápis e papel, a proposta, teve a intenção de elevar o número de iterações e observar os efeitos da imagem com maior perfeição e elaborada de maneira prática, recriando apenas uma parte que representa o todo, para fortalecer o conceito de similaridade ao construir apenas uma fração da imagem para ser replicado.

Para auxiliar na elaboração dessas respostas, os estudantes foram orientados sobre os



procedimentos para “criar ferramentas” no *software* GeoGebra. Uma vez criadas, essas ferramentas permitiam que, com apenas um clique do mouse nos pontos extremos do segmento base, a transformação desejada ocorre aplicada ao objeto na área de construção, conforme ilustrado no Quadro 42.



Fonte: material de análise, 2023

A resposta [1], apresenta uma imagem do Triângulo de Sierpinski na sua terceira iteração, onde o estudante criou a ferramenta no GeoGebra, conforme a orientação de traçar outro triângulo equilátero interno ao maior e aplicou as sequências do padrão nos triângulos das laterais. Na resposta [2], observou-se no processo de elaboração a ideia de composição de baixo para cima, onde o estudante preencheu os triângulos das laterais, elaborando até a quarta iteração.

A resposta [3] apresenta a mesma estrutura, mas identificou-se um equívoco no centro com um triângulo que perpassa a área do triângulo central. E quanto a resposta [4], o estudante completou a atividade aplicando a sequência, observando a quarta iteração e apresentou corretamente a ferramenta que comprova a similaridade.

Os estudantes que participaram desta elaboração, não apresentaram dificuldades na compreensão da estrutura do fractal simples Triângulo de Pascal, mas apresentaram dificuldades no manuseio das ferramentas para elaborar a ferramenta. Esse foi o primeiro fractal elaborado usando o GeoGebra.

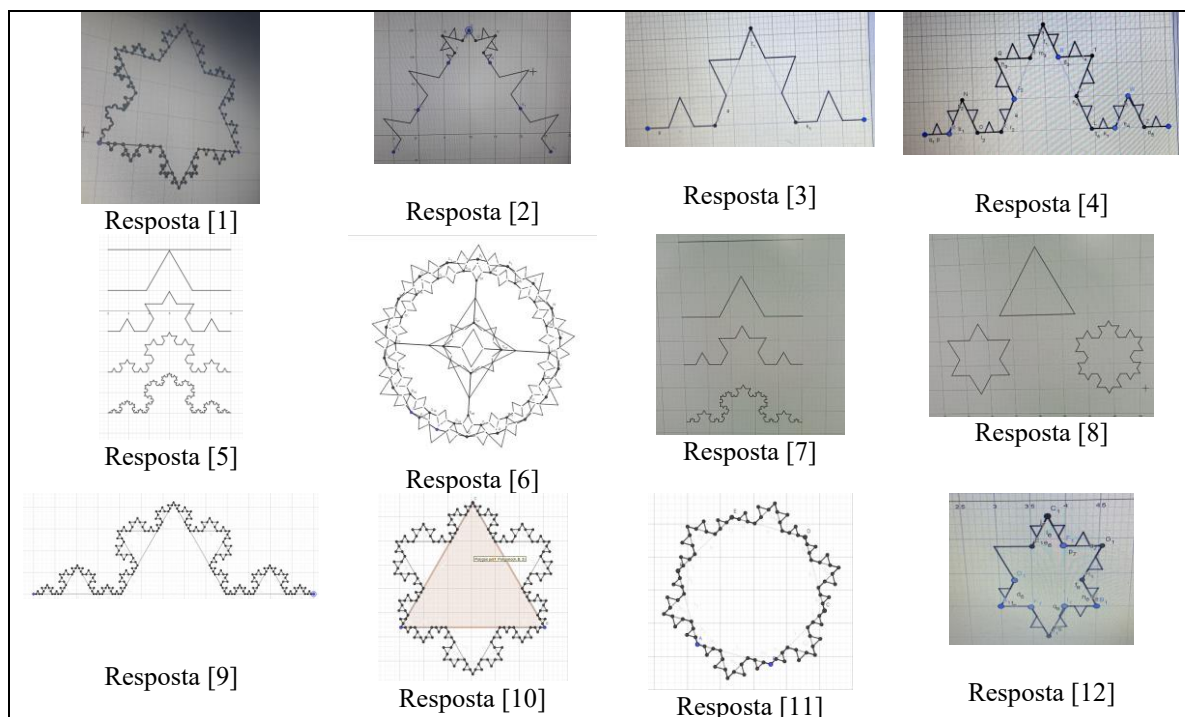
O segundo problema construído no GeoGebra foi a curva de Koch, essa construção foi bem mais tranquila que a primeira, pois as orientações sobre a elaboração de ferramentas já haviam sido explicadas no problema do Triângulo de Sierpinski.

A construção da Curva de Koch, teve objetivo de fortalecer a compreensão do conceito de iteração, autossimilaridade e dimensão, para completar a definição de fractais por três caracterizações que expressam a autossimilaridade, a dimensão e a complexidade infinita.

Segue imagem das respostas no Quadro 43:



Quadro 43 – Constructos da Curva de Koch



Fonte: autoras, 2025

A elaboração no GeoGebra foi realizada após elaboração com lápis e papel para compreender as iterações e a dimensão compostas em uma tabela de dados. As respostas [1], [5], [7], [9], [10] e [11] ganham nível de iterações mais alto para observar a formação da Curva. A curva foi uma dúvida apresentada pelo estudante E4, na construção com lápis e papel, que fez a seguinte reflexão “porque se chama curva, se é construído com retas?”, no momento da reelaboração no GeoGebra o argumento foi retomado para explicar conceito de complexidade infinita.

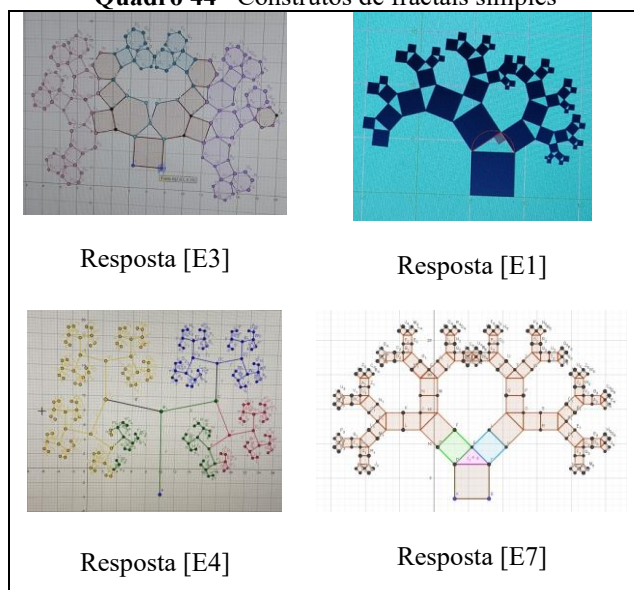
As ideias de iterações já estavam estabelecidas, o que levou a poucas dificuldades desta reelaboração no GeoGebra. A ideia nova ganhou força para dissociar das ideias estabelecidas. As respostas [2], [3], [4] e [12] apresentam o ensaio da elaboração, observa-se que elaboração trouxe constructos que não estão de acordo com a similaridade, a divisão não foi realizada obedecendo a divisão de três partes iguais com a inclusão das arestas de um triângulo equilátero. No entanto, considerou-se um ensaio para a compreensão do conceito de complexidade infinita.

A resposta [6] não é um fractal, é uma criação livre de um dos participantes no GeoGebra, que chamou de “mandala fractal”. Observou-se a aplicação da regularidade e da proporção para uma circunferência de segmentos, criado no centro uma espécie de rosa dos ventos. Essa elaboração livre foi destinada aos que já haviam finalizado e tiveram momento de criar suas próprias ferramentas no GeoGebra.



Além destes problemas foram elaborados no GeoGebra demais fractais simples como a reelaboração da árvore fractal, a árvore pitagórica entre outros registrados no (Apêndice G). Essas iconografias foram elaboradas de forma dinâmica, permitindo movimentos de visualização interativa, os quais os estudantes expressaram momentos de alegria ao concluir a atividade e visualizar os resultados.

Quadro 44– Construtos de fractais simples



Fonte: material de análise, 2023

Após estas novas construções um dos estudantes apresentou a possibilidade de criar os códigos em outro software o Javascript, visando facilitar a visualização conforme o modelo matemático. E para esse experimento foi utilizado a recriação da curva de Koch.

Para compreender essa experiência dos estudantes no GeoGebra, abordamos alguns recortes da entrevista semiestruturada, que expressaram a auto-observação das fragilidades e potencialidades na aprendizagem de Geometria dos Fractais com o uso do Software GeoGebra, que vem de encontro as atividades realizadas.

Considerou-se o momento das recriações no GeoGebra um ponto fundamental para fortalecer os conceitos da Geometria Fractal, as dificuldades do manuseio das ferramentas já estavam previstas, de modo que foi elaborado uma estratégia de elaborações de ferramentas (Apêndice C) para melhorar as habilidades do uso do software, envolvendo diversos modelos de fractais simples.

Os relatos, estão organizados em número de ordem crescente, porém a sequência das entrevistas ocorreu de forma aleatória. Os grifos identificam indícios que direcionam para a análise do impacto do uso do GeoGebra na motivação e engajamento, Quadro 45:



Quadro 45 - Resposta das entrevistas destaque com uso do GeoGebra

[...] **aprender o que é um fractal eu não tinha a profundidade do que seria.** [...] *não somente a curva de Koch, para mim foi conhecer diversos mecanismos e diversos cientistas que desenvolveram métodos de desenvolver um fractal.* [...] me ajudou a entender a construção de fractais e que não se existe somente uma maneira, tem n situações de desenvolver. (Estudante 1).

Eu já tinha visto sobre fractais, mas eu consegui vê-los de maneiras novas. [...] *o GeoGebra me ajudou a entender a Geometria Fractal, no momento de montar ficou mais fácil essa aplicação e poder deixar os desenhos dinâmicos e também observar a assimilação do conceito.* E achei bem mais interessante usar código de programação e adicionar no Geogebra, até me motivei a querer aprender programação. (Estudante 2).

[...]foi uma experiência nova. **Eu já tinha visto sobre fractais em documentários na internet, mas nunca ter chegado de eu ser a pessoa que iria construir um fractal a partir do zero,** ver isso do ponto de vista matemático, para mim foi muito legal, enxergar PA e PG no fractal eu não tinha olhado por esse ângulo, [...] *no GeoGebra, a parte de criar ferramentas e os outros conceitos da matemática para criar os fractais no GeoGebra foi bastante proveitoso* (Estudante 3).

[...] **eu não conhecia essa geometria** e nem mesmo pensava que ela estava na natureza, dos textos que foram colocados para leitura, aí eu passei a observar e vi que ela está em muitos lugares, [...]. *A maior dificuldade foi a minha falta de manuseio do Geogebra, onde localizar os comandos, mas eu aprendi um pouco, mas acho que se eu praticar eu consigo melhorar.* (Estudante 4).

[...] **eu não compreendi o conceito na primeira aula,** [...] eu reconheci alguns padrões que eu já conhecia antes. Na segunda etapa de aulas, eu consegui entender melhor o que era um fractal, e achar interessante, só a partir daí fez sentido para mim. *O uso do Geogebra, leva a pensar na construção dos objetos, embora com uso de papel exige maior concentração, espelhamento, sequência, etc.* [...] (Estudante 5).

[...] **eu tive um pouco de dificuldade com os fractais, porque eu nunca tinha visto.** *No Geogebra eu gostei mais, até para poder enxergar melhor o que estamos fazendo, pois se ficasse só no papel eu teria mais dificuldade de poder enxergar coisas que a gente viu.* Me ajudou a estimular meu cognitivo, pois tinha que ler, aplicar os conceitos (Estudante 6).

[...] no meu caso eu **tive bastante facilidade, porque eu já conhecia.** *O Geogebra ele facilita a visualização de alguns cálculos com certeza, mas não é um software muito fácil de se trabalhar.* (Estudante 7).

Fonte: autoras, 2025

A partir das respostas foram identificadas quatro categorias, que expressaram autodeclaração de aprendizagem de conceitos com significados. Nas afirmações sobre o que já conheciam, três respostas expressaram que já haviam tido algum contato com a Geometria Fractal ou fractal. E quatro respostas estão relacionadas com a aquisição de novo conhecimento.

Identificou-se nas respostas indícios da habilidade iluminação da Criatividade em Matemática, expressos nos enunciados dos estudantes, que versam a compreensão:

Estuante E3, “enxergar PA e PG no fractal eu não tinha olhado por esse ângulo”
estudante E2, “e poder deixar os desenhos dinâmicos e também observar a assimilação do conceito” e o Estudante E6 “Se ficasse só no papel eu teria mais dificuldade de poder enxergar coisas que a gente viu”.

Isso implica que, o uso do GeoGebra para aquisição de significado subordinado, foram essenciais nas seis respostas com indícios de aquisição de conhecimento com significados. Que gera uma categoria que destaca a colaboração do GeoGebra na facilitação da compreensão dos padrões e estruturas da Geometria Fractal.

A análise das respostas dos estudantes sobre a aprendizagem do conceito inicial de



Geometria Fractal com o uso do GeoGebra revelou reflexões significativas sobre como esse recurso pode enriquecer o processo de aprendizagem da Geometria Fractal. Foram elaboradas quatro categorias que destacaram maior frequência de respostas, relacionadas principalmente com os conceitos, significados e conhecimentos prévios:

Quadro 46 - Categorias das respostas quanto aos significados

MOTIVOS EXPLICITADOS	Nº
1.Relacionados aos conhecimentos prévios • Eu já tinha visto sobre fractais, mas eu consegui vê-los de maneiras novas • Eu já tinha visto sobre fractais em documentários na internet, mas nunca ter chegado de eu ser a pessoa que iria construir um fractal a partir do zero • no meu caso eu tive bastante facilidade, porque eu já conhecia.	3
2.Relacionados ao conhecimento novo • eu não tinha a profundidade do que seria • eu não conhecia essa geometria e nem mesmo pensava que ela estava na natureza • eu não compreendi o conceito na primeira aula • eu tive um pouco de dificuldade com os fractais, porque eu nunca tinha visto	4
3.Relacionados ao uso do Geogebra para aquisição de significado subordinado • não somente a curva de Koch, para mim foi conhecer diversos mecanismos e diversos cientistas que desenvolveram métodos de desenvolver um fractal. • [...] me ajudou a entender a Geometria Fractal, no momento de montar ficou mais fácil essa aplicação e poder deixar os desenhos dinâmicos e observar a assimilação do conceito. • a parte de criar ferramentas e também os outros conceitos da matemática que foram utilizados para criar os fractais foi bastante proveitoso. • [...] eu aprendi um pouco, mas acho que se eu praticar eu consigo melhorar. • [...] eu gostei mais, até para poder enxergar melhor o que estamos fazendo, pois se ficasse só no papel eu teria mais de dificuldade de poder enxergar coisas que a gente viu no Geogebra, na dimensão da figura. • [...] facilita a visualização de alguns cálculos com certeza, mas não é um software muito fácil de se trabalhar.	6
4.Relacionados ao uso do Geogebra para retenção do significado • ver isso do ponto de vista matemático, para mim foi muito legal, enxergar PA e PG no fractal eu não tinha olhado por esse ângulo, achei diferente, tomei um susto, sempre achei algo bonito que fazia parte da natureza. • eu consegui entender melhor o que era um fractal, e achar interessante, só a partir daí fez sentido para mim.	2

Fonte: autora, 2025

Embora, a experiência de aprendizagem não foi marcada por novas descobertas e uma compreensão mais profunda dos fractais a nível de conhecer o modelo matemático do fractal de Mandelbrot, os relatos apontam que o GeoGebra facilitou a visualização e manipulação dos conceitos matemáticos. O que infere a utilidade do software no desempenho de um papel importante na transformação de ideias abstratas em experiências concretas.

Os resultados indicam que o uso do GeoGebra no ensino de Geometria dos Fractais, alcançou impacto positivo na motivação dos estudantes. O estudo contribuiu para um ambiente de aprendizagem mais dinâmico e interativo, o que, por sua vez, aumentou o engajamento dos estudantes. A capacidade elaborar e manipular fractais em tempo real facilitou a exploração dos conceitos complexos da Geometria Fractal.



Os relatos dos estudantes mostraram que a utilização do GeoGebra despertou um interesse maior pela Geometria Fractal. A possibilidade de construir fractais com a criação de ferramenta possibilitou observar padrões matemáticos, proporcionou uma experiência de aprendizado mais significativo e novas maneiras, conectando-os com conceitos matemáticos como Progressões Aritméticas (PA) e Progressões Geométricas (PG), o que antes não era evidente para os estudantes.

O GeoGebra facilitou a visualização dos padrões auto semelhantes e das iterações que caracterizam os fractais. A construção interativa da Curva de Koch e do Triângulo de Sierpinski no GeoGebra, permitiu melhor compreensão do conceito de iteração e da dimensão fractal.

Os estudantes recriaram formas fractais, permitindo evidências de indícios de compreensão em relação aos conceitos teóricos e suas representações visuais. Portanto, o uso do GeoGebra no ensino da Geometria Fractal demonstrou ser uma ferramenta eficaz para aumentar a motivação e o engajamento dos estudantes. A capacidade de manipular e experimentar os fractais no GeoGebra proporcionou uma experiência de aprendizado mais significativa de acordo com os relatos dos estudantes.

6.3 Problemas abertos um ensaio criativo

A última seção dos problemas propostos abordou problemas abertos, culminando em uma proposição desafiadora para a criação de um fractal. Sendo proposto três problemas, os dois primeiros problemas, foram obtidas respostas elaboradas tanto com o auxílio do software GeoGebra quanto por meio de métodos tradicionais, utilizando lápis e papel. Contudo, para o desafio de criação, apenas uma resposta foi submetida.

A instrução para a elaboração não exigiu a utilização do software GeoGebra ou de quaisquer outros recursos digitais, sendo aceitas, contudo, quaisquer formas de representação. A única solução desenvolvida foi apresentada manualmente, em formato de desenho. Evidencia-se que o estudante possui domínio da técnica de desenho manual e optou por expressar sua concepção de forma autoral, conferindo um caráter de originalidade à sua produção.

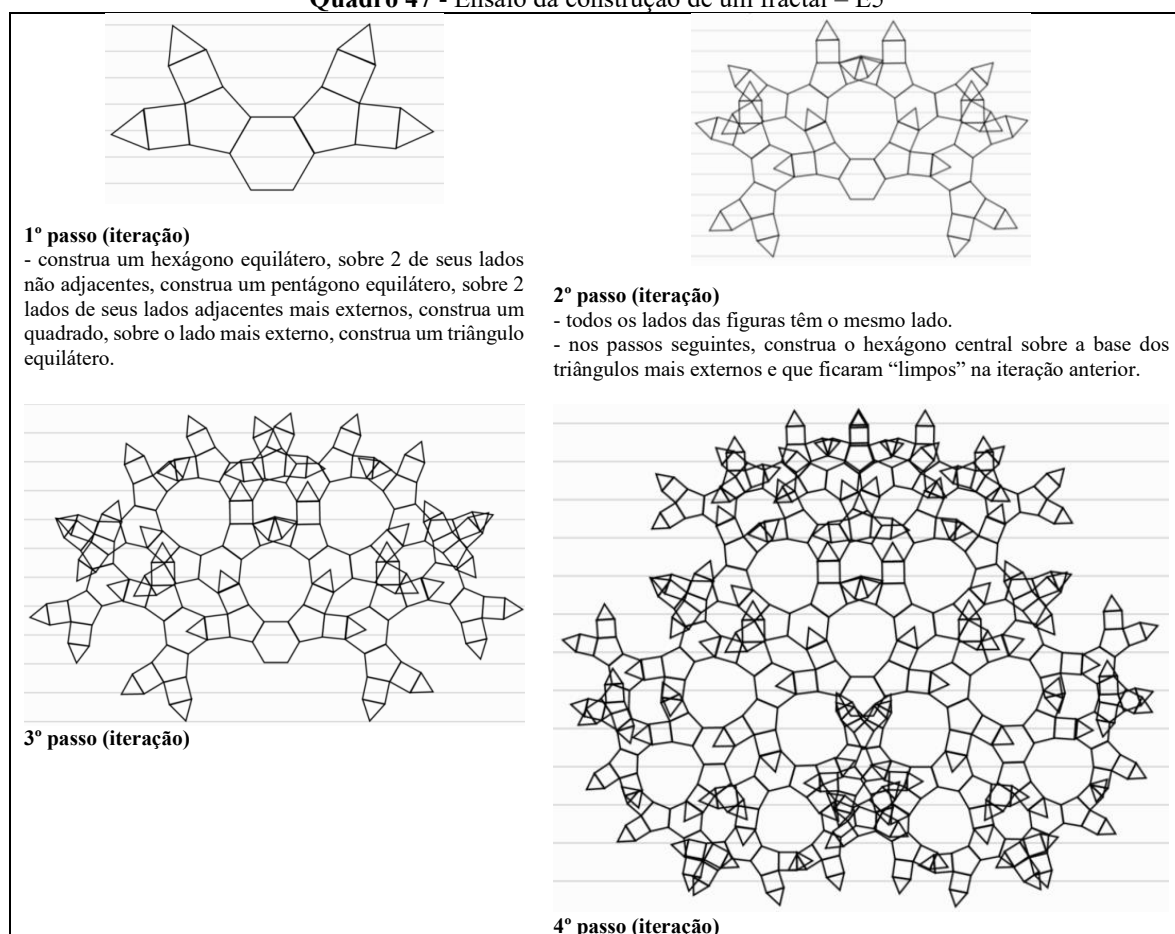
É relevante destacar que a execução desta atividade não ocorreu em ambiente de sala de aula, de modo que os participantes dispuseram de tempo para pesquisa e para o desenvolvimento de suas propostas, não possuindo, caráter avaliativo formal no componente curricular. Apesar de os demais estudantes não terem submetido formalmente suas soluções,



foram observados diversos ensaios e experimentações, inclusive com o emprego de outras ferramentas computacionais. Entretanto, o tempo foi insuficiente, culminando com o encerramento do semestre letivo e outros componentes que os estudantes estavam envolvidos os sobrecarregou com as entregas de trabalhos avaliativos e avaliações somativas.

A resposta do estudante E5, aborda o ensaio da construção de um fractal. Embora, o estudante tenha construído uma sequência de polígonos regulares, o padrão de iteração apresenta uma interseção da base de um triângulo e um dos lados de um hexágono, que pode ser observado no segundo passo da iconografia do estudante, Quadro 47:

Quadro 47 - Ensaio da construção de um fractal – E5



Fonte: Estudante [5], 2023

Este ensaio, embora, os dados iconográficos apresentem uma repetição de elementos geométricos (como triângulos, quadrados, pentágonos e hexágonos) e possua simetria, as partes menores não replicam a estrutura global do objeto. Se isolarmos e ampliarmos uma das “pontas” ou ramificações, por exemplo, ela não se parecerá com uma versão reduzida do modelo completo. A estrutura central é distinta das estruturas que se irradiam.

