



**REDE AMAZÔNICA DE EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA
PÓLO ACADÊMICO DO AMAZONAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA**

**OS CONTEÚDOS DE DIVISIBILIDADE NOS LIVROS DIDÁTICOS DE
MATEMÁTICA DO 6º ANO E DOCUMENTOS CURRICULARES DO
ENSINO FUNDAMENTAL ANOS FINAIS**

**BELÉM – PA
2018**

GLADYS MARIA BEZERRA DE SOUZA

**OS CONTEÚDOS DE DIVISIBILIDADE NOS LIVROS DIDÁTICOS DE
MATEMÁTICA DO 6º ANO E DOCUMENTOS CURRICULARES DO
ENSINO FUNDAMENTAL ANOS FINAIS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática (PPGECM) da Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática (REAMEC), como requisito parcial para a obtenção do título de Doutora em Educação em Ciências e Matemática.

Linha de Pesquisa: Fundamentos e Metodologias para a Educação em Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Franco de Sá.

Dados Internacionais de Catalogação na fonte

S729c SOUZA, GLADYS M. B..

OS CONTEÚDOS DE DIVISIBILIDADE NOS LIVROS
DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA DO 6º ANO E
DOCUMENTOS CURRICULARES DO ENSINO
FUNDAMENTAL ANOS FINAIS / GLADYS M. B. SOUZA.
2018

462 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Franco de Sá.
Tese (doutorado) - Universidade Federal de Mato
Grosso, Rede Amazônica de Educação em Ciências e
Matemática, Programa de Pós-Graduação em Educação em
Ciências e Matemática, Cuiabá, 2018.

Inclui bibliografia.

1. Divisibilidade no Sexto Ano de Matemática. 2. Livro
Didático de Matemática. 3. Educação Matemática. 4. Ensino
Fundamental Anos Finais.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Permitida a reprodução parcial ou total, desde que citada a fonte.

*“A Matemática é a rainha das ciências
e a Aritmética é a rainha da Matemática”.*

Carl Friedrich Gauß

DEDICO

*Aos meus amados filhos que em espírito
estão sempre presentes na minha vida: Laiza
(1988-1995) e Krishna (1993-1995), para
sempre em meu coração, na saudade eterna
que sinto deles (in memoriam).*

*Às minhas filhas Larissa Suyanne e Lara
Suyanne e netas Maria Eduarda e Lunna
Maria – meus mais valiosos tesouros.*

AGRADECIMENTOS

Agradecer é um ato que deveríamos fazer a cada dia que começa e a cada noite que finda, pois devido ao mistério que envolve o viver e morrer é como um grande milagre acordar para a vida a cada dia que se inicia.

Primeiramente agradeço a Deus, em nome de *Bhagavan Sri Sathya Sai Baba* que com seus ensinamentos sagrados deu sentido à minha forma de ver e viver esta existência humana neste planeta. Ao *Dr. Hansen*, entidade espiritual que me deu apoio e conforto após minha tragédia pessoal – a perda de meu filho mais novo Krishna, (de dois anos) e minha filha Laiza (de sete anos), além dos valiosos ensinamentos espirituais que me possibilitaram seguir vivendo forte e com esperança.

Agradeço a Deus por ter me permitido continuar nesta existência com minhas filhas *Larissa Suyanne e Lara Suyanne* e, ainda ter me presenteado com minhas netas *Maria Eduarda e Lunna Maria*, amores da minha vida e o motivo maior para lutar pelo progresso, pela prosperidade e pela busca do aprimoramento.

Agradeço à minha família: Minha Mãe Dorvalina, meus irmãos: Grace Mary, Gladstone, Helia e a minha sobrinha *Grace Anne* por estarem sempre presentes na minha vida. Aqui, quero fazer um agradecimento especial à minha querida “Mãe Dova” (Dorvalina), que sempre foi uma grande fonte de inspiração e admiração pela sua dedicação aos filhos.

Meus agradecimentos à família Paiva em nome de Maria das Graças Paiva.

Meus agradecimentos às minhas melhores amigas (desde a juventude) que sempre me apoiaram *Nelgia Miranda e Edleni Peixoto*, e à *Solange Almeida* que desde a graduação tem me ajudado e acompanhado nesta caminhada acadêmica compartilhando conhecimentos.

Meus agradecimentos aos coordenadores pedagógicos e aos professores de Matemáticas das escolas estaduais de Roraima que se propuseram generosamente a colaborar cedendo seu tempo e materiais didáticos para este trabalho.

Meus agradecimentos aos alunos licenciados em Matemática (UFRR) Adjairon Coelho e Denise Silva que gentilmente disponibilizaram seus livros didáticos de matemática para minha pesquisa.

Meus agradecimentos aos colegas de doutoramento que compartilharam amizade, informações e muito apoio uns aos outros nesses quatro anos de doutorado.

Em nome da Prof^a Dra. Marta Maria Pontin Darsie meus agradecimentos a todos os professores da rede REAMEC que se disponibilizam para tornar esse sonho realidade.

Meu mais que especial agradecimento ao meu orientador prof. Dr. *Pedro Franco de Sá* que com sua generosidade se propôs a me orientar.

Meus agradecimentos aos membros da banca avaliadora por disporem de seu tempo, por sua grande generosidade e suas valiosas contribuições ao meu trabalho, professores doutores: Antonio José Lopes (Bigode), José Messildo Viana Nunes, Maria de Lourdes S. Santos, Marta Maria P. Darsie.

Meus agradecimentos à minha instituição: Universidade Federal de Roraima (UFRR) por me proporcionar esta magnífica experiência e aos colegas professores do curso de *Licenciatura em Educação do Campo de Roraima (LEDUCARR)* pela *colaboração e apoio*.

RESUMO

Esta pesquisa teve como objetivo verificar se houve redução expressiva dos conteúdos de Divisibilidade (múltiplos, divisores, critérios de divisibilidade, números primos, decomposição em fatores primos, máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum) nos livros didáticos de matemática do sexto ano e nos documentos curriculares de matemática do ensino fundamental anos finais. Em termos de aportes teóricos, ressalta-se a fundamentação em autores como, Chevallard, Chervel, Fiorentini, Miorim e Valente, para discutir o saber científico e o saber a ensinar do conhecimento matemático; e, em Resende (2007), Barbosa (2008), Fonseca (2015), para tratar a Teoria dos Números no ensino de Matemática. Numa abordagem qualitativa da pesquisa, foram analisados 27 livros didáticos de matemática do sexto ano, seis documentos curriculares de matemática do Ensino Fundamental dos anos finais e três planos de ensino de escolas estaduais de Boa Vista (RR). Metodologicamente, assume-se este estudo como uma pesquisa documental, sendo desenvolvida em duas etapas: na primeira etapa, analisamos a presença dos conteúdos de divisibilidade na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e nos documentos curriculares de seis estados brasileiros (Minas Gerais, Paraná, Pernambuco, Rio de Janeiro, Roraima e São Paulo); na segunda etapa, analisamos a presença dos conteúdos de divisibilidade nos sumários e no interior dos capítulos de 27 livros didáticos de matemática do sexto ano. Para a análise dos livros didáticos e dos documentos curriculares, elaboramos um roteiro com os conteúdos de divisibilidade, classificados como principais e secundários. Elaboramos, também, as categorias e os indicadores para computar a presença e ausência dos conteúdos de divisibilidade no interior dos capítulos dos livros do 6º ano de matemática. Como resultado da análise dos seis documentos curriculares pesquisados, constatamos haver, na maioria desses documentos, redução expressiva dos conteúdos de divisibilidade como indicação para o estudo no sexto ano. O resultado da pesquisa mostrou ausência moderadamente expressiva dos conteúdos de divisibilidade na maioria dos 27 livros didáticos de matemática analisados e, principalmente, nos dois últimos PNLD (2014 e 2017). Apenas nos livros didáticos de matemática do primeiro período (1926 a 1979) encontramos a presença da maioria dos conteúdos de divisibilidade. O resultado da análise dos referenciais de Matemática da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) apontou que não há indicação de todos os conteúdos principais de divisibilidade para o sexto ano, o que configurou redução expressiva. Ao considerar a BNCC (2017) como o referencial adotado para a reformulação dos documentos curriculares de todos os estados brasileiros, é provável que futuramente haja redução expressiva dos conteúdos de divisibilidade nos livros didáticos de matemática e, conseqüentemente, em sua aplicação em sala de aula, uma vez que os professores se baseiam nos documentos oficiais e nos livros didáticos para

fazerem seus planejamentos anuais, semestrais e diários. Entretanto, a escolha e aplicação dos conteúdos de divisibilidade em sala de aula dependerão de cada professor de matemática, sendo esse um tema a ser abordado em pesquisas futuras.

Palavras-chave: Divisibilidade no Sexto Ano de Matemática. Livro Didático de Matemática. Educação Matemática. Ensino Fundamental Anos Finais.

ABSTRACT

Divisibility contents (multiples, divisors, divisibility criteria, prime numbers, prime factor decomposition, maximum common divisor, and least common multiple) in sixth grade math textbooks and documents elementary school math curricula final years. In terms of theoretical contributions, it is emphasized the grounding in authors such as Chevallard, Chervel, Fiorentini, Miorim and Valente, to discuss the scientific knowledge and the teaching knowledge of mathematical knowledge; and, in Resende (2007), Barbosa (2008), Fonseca (2015), to deal with the theory of numbers in mathematics teaching. In a qualitative approach of the research, 27 sixth grade math textbooks, six elementary school math curriculum documents of the final years and three teaching plans of state schools of Boa Vista (RR) were analyzed. Methodologically, this study is assumed as a documentary research, being developed in two stages: in the first stage, we analyze the presence of the divisibility contents in the National Common Curricular Base (NCCB) and in the curricular documents of six Brazilian states (Minas Gerais, Paraná, Pernambuco, Rio de Janeiro, Roraima and São Paulo); In the second stage, we analyzed the presence of divisibility contents in the summaries and within the chapters of 27 math textbooks of the sixth grade. For the analysis of textbooks and curriculum documents, we prepared a script with the divisibility contents, classified as main and secondary. We also elaborate the categories and indicators to compute the presence and absence of the divisibility contents within the 6th grade math book chapters. As a result of the analysis of the six curricular documents researched, we found that, in most of these documents, there was a significant reduction in the divisibility contents as an indication for the study in the sixth year. The result of the research showed a moderately expressive absence of divisibility contents in most of the 27 mathematics textbooks analyzed and, mainly, in the last two PNLDs (2014 and 2017). Only in the math textbooks of the first period (1926 to 1979) did we find the presence of most divisibility contents. The result of the analysis of the National Common Curricular Base (NCCB) Mathematics references pointed out that there is no indication of all the main divisibility contents for the sixth year, which constituted a significant reduction. Considering the BNCC (2017) as the reference adopted for the reformulation of curricular documents of all Brazilian states, it is likely that in the future there will be a significant reduction in the divisibility contents in mathematics textbooks and, consequently, their application in the classroom, since teachers are based on official documents and textbooks to make their annual, semester, and daily plans. However, the choice and application of class divisibility content will depend on each math teacher, which is a topic to be addressed in future research.

Key words: Divisibility in the sixth grade of mathematics. Mathematics textbook. Mathematical education. Elementary School Final Years.

LISTA DE SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
BTB	Banco de Teses e Dissertações
Capes	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CD	Conteúdos de Divisibilidade
CONSED	Conselho Nacional dos Secretários de Educação.
CNM-RJ	Currículo Mínimo de Matemática do Estado do Rio de Janeiro
CP	Conteúdos Principais (de divisibilidade)
CRMG	Currículo Referência de Minas Gerais
CS	Conteúdos Secundários (de divisibilidade)
CTD	Critérios de Divisibilidade
CSP	Currículo de São Paulo
DCN	Diretrizes Curriculares Nacionais
DCE-PR	Diretrizes Curriculares Estaduais do Paraná
DCR	Documento Curricular de Roraima
DFP	Decomposição em Fatores Primos
EFAI	Ensino Fundamental dos Anos Iniciais
EFAF	Ensino Fundamental dos Anos Finais
GLDM	Guia do Livro Didático de Matemática
LDB	Lei de Diretrizes e Bases
LDM	Livro Didático de Matemática
MDC	Máximo Divisor Comum
MEC	Ministério da Educação
MMC	Mínimo Múltiplo Comum
OCDE	Cooperação e Desenvolvimento Econômico
PCM-PE	Parâmetros Curriculares de Matemática do Estado de Pernambuco
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCNM	Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática

PEM	Planos de Ensino de Matemática
PNE	Plano Nacional de educação
PPGCEM	Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática
SEED	Secretaria de Educação Estadual de Roraima
TFA	Teorema Fundamental da Aritmética
UERR	Universidade Estadual de Roraima
UFRR	Universidade Federal de Roraima

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: A Estrutura do Ensino Fundamental de acordo com a BNCC.....	96
Figura 2: Áreas de Conhecimento com os seus Respectivos Componentes Curriculares do Ensino Fundamental	102
Figura 3: O Processo da Transposição Didática	108
Figura 4: Desenho da Pesquisa	151

LISTA DE IMAGENS

Imagem 1: LDM-1 – Definições de múltiplo e divisor (ROXO, 1926)	225
Imagem 2: LDM-2 – Conteúdos de divisibilidade no índice do livro de Sangiorgi de 1963.	230
Imagem 3: LDM-2 – Representação de divisores usando a simbologia da teoria dos conjuntos, conforme Sangiorgi (1963).....	233
Imagem 4: Representação dos divisores comuns de dois números usando a Simbologia da Teoria dos Conjuntos conforme LDM-2 de Sangiorgi (1963).....	233
Imagem 5: LDM-2 – 2ª Propriedade do resto da divisão segundo Sangiorgi (1963)	235
Imagem 6: LDM-2 – Processo do crivo de Eratóstenes conforme Sangiorgi (1963)	237
Imagem 7: LDM-2 – Decomposição em fatores primos pela divisão sucessiva conforme Sangiorgi (1963).....	238
Imagem 8: LDM-2 – Método de determinação de todos os divisores de um número segundo Sangiorgi (1963)	240
Imagem 9: LDM-2 – Determinação dos divisores “Desenhando”.	242
Imagem 10: LDM-2 – Representação dos conjuntos numéricos por Sangiorgi (1963)	243
Imagem 11: LDM-2 – Processo de calcular a raiz quadrada de um número pela fatoração completa segundo Sangiorgi (1963).....	244
Imagem 12: LDM-2 – Divisores comuns usando a simbologia da Teoria dos Conjuntos conforme Sangiorgi (1963).....	245
Imagem 13: LDM-2 – Processo prático de Euclides para determinação do m.d.c. segundo Sangiorgi (1963)	247
Imagem 14: LDM-2 – Determinação do m.m.c., pela decomposição em fatores primos, divisão sucessiva e simultânea, segundo Sangiorgi (1963)	248
Imagem 15: Capa do LDM-14 de Andrini e Vasconcelos (2012)	316
Imagem 16: Capa do LDM-15 de Joamir Souza e Patrícia Pataro (2012)	322
Imagem 17: Capa do LDM-16 de Luiz Roberto Dante (2013).....	329

Imagem 18: Capa do LDM-17 de Edwaldo Bianchini (2011)	336
Imagem 19: Capa do LDM-18 de Centurión e Jakubovic (2012)	342
Imagem 20: Capa do LDM-19 de Iracema Mori e Dulce Onaga (2012).....	348
Imagem 21: Capa do LDM-20 de Andrini e Vasconcelos (2015)	357
Imagem 22: Capa do LDM-21 de Joamir Souza e Patrícia Pataro (2015)	363
Imagem 23: Capa do LDM-22 de Ênio Silveira (2015)	370
Imagem 24: Capa do LDM-23 de Luiz Roberto Dante (2016).....	376
Imagem 25: Capa do LDM-24 de Edwaldo Bianchini(2015)	384
Imagem 26: Capa do LDM-25 Projeto Araribá: Matemática 6º ano (2014).....	391
Imagem 27: Capa do LDM-26 de Eduardo Chavante (2015)	398
Imagem 28: Capa do LDM-27 de Mazzeiro e Machado (2015)	404

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1: Dissertações de Divisibilidade, Teoria de Aritmética Modular e Teoria dos Números, publicadas no período de 2009 a 2018.....	43
Gráfico 2: Resultado final da análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade para o 6º ano nos Documentos Oficiais e Curriculares.....	196
Gráfico 3: Resultado final da análise dos cinco livros analisados – Fase 1	268
Gráfico 4: Resultado Final da análise da Fase 2 (Parte 1).....	313
Gráfico 5: Conteúdos de divisibilidade presentes nos 13 livros didáticos de matemática do período de 1926 a 2010.....	314
Gráfico 6: Resultado quantitativo da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade dos livros do PNLD-2014 da Fase 2 (Parte 2)	355
Gráfico 7: Retrata a ausência dos conteúdos de Divisibilidade nos seis livros Didáticos de Matemática do 6º ano analisado da fase 2 (PNLD-2014).....	355
Gráfico 8: LDM-20 – Resultado final da análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro de Andrini e Vasconcelos (2015)	363
Gráfico 9: LDM-21 – Resultado final da análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro de Souza e Pataro (2015)	370
Gráfico 10: LDM-22 – Resultado final da análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro de Ênio Silveira (2015).....	376
Gráfico 11: LDM-23 – Resultado final da análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro de Luiz Roberto Dante (2016)	384
Gráfico 12: LDM-24 – Resultado final da análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro de Edwaldo Bianchini (2015).....	390
Gráfico 13: LDM-25 – Resultado final da análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro “Projeto Araribá: Matemática”(2014)	397
Gráfico 14: LDM-26 – Resultado final da análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro de Eduardo Chavante (2015) – PNLD-2017 ...	403
Gráfico 15: LDM-27 – Resultado final da análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro de Mazzeiro e Machado (2015).....	410
Gráfico 16: Resultado quantitativo da presença/ausência dos Conteúdos de Divisibilidade nos oito livros do PNLD-2017 (Fase 3).....	411

Gráfico 17: Percentual da qualificação dos oito livros didáticos de matemática de 6º ano do PNLD-2017 referente à quantidade de conteúdos de divisibilidade ausentes	412
Gráfico 18: Resultado final da análise da ausência dos conteúdos de divisibilidade nos livros didáticos de matemática do 6º ano (PNLD-2014 e PNLD-2017).....	413
Gráfico 19: Resultado final da análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade nos livros de 5ª série/6º ano do período de 1926 a 2016	415
Gráfico 20: Percentual por classificação dos 27 LDM da 5ª série/6º ano do período de 1926 a 2016	415
Gráfico 21: Visão geral da ausência dos conteúdos de divisibilidade nos 27 LDM	417

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Programa para o Curso Científico (1943)	73
Quadro 2: Programa para o Ensino de Matemática do Curso Clássico (1943)	74
Quadro 3: Conteúdos de Matemática do Ginásio de 1951 e de 1975	79
Quadro 4: Assuntos Mínimos para o Ginásio no Brasil (1962)	81
Quadro 5: Assuntos Mínimos para o Colégio no Brasil (1962)	82
Quadro 6: Competências específicas de Matemática conforme BNCC do Ensino Fundamental	94
Quadro 7: Sumário do Livro “Introdução à Teoria dos Números”	135
Quadro 8: Exemplo de um problema resolvido sobre divisibilidade	144
Quadro 9: Exemplos de alguns problemas propostos sobre divisibilidade	144
Quadro 10: Relação das escolas estaduais de Boa Vista – RR do Ensino Fundamental Anos Finais.....	152
Quadro 11: Relação dos conteúdos principais e secundários de divisibilidade para a análise dos livros didáticos de matemática do 6º ano.	159
Quadro 12: Ficha de análise (modelo) da presença e ausência dos conteúdos de divisibilidade nos livros didáticos de matemática do 6º ano.	161
Quadro 13: Indicadores para qualificar os livros didáticos de matemática selecionados quanto à presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade (CD)...	164
Quadro 14: Indicadores para qualificar os LDM selecionados se faltar um ou mais de um dos conteúdos principais de divisibilidade nos livros selecionados	166
Quadro 15: Matemática para o 6º ano de acordo com a BNCC – 2017	172
Quadro 16: Matemática para o 7º ano de acordo com BNCC – 2017	174
Quadro 17: Exemplo de progressão de habilidade na unidade temática “números” de acordo com CRMG (2018).	178
Quadro 18: Referencial Curricular de Matemática de Minas Gerais para o 6º ano	179
Quadro 19: Matemática para 5ª série/6º ano do Ensino Fundamental – Diretrizes Curriculares Estaduais do Estado do Paraná (DCE-PR).....	182
Quadro 20: Matemática para o 6º ano (3º bimestre) dos Parâmetros Curriculares do Estado de Pernambuco (PCM-PE).....	184

Quadro 21: Matemática para o 7º ano (1º e 3º bimestres) dos Parâmetros curriculares do Estado de Pernambuco (PCM-PE)	185
Quadro 22: Currículo Mínimo de Matemática do Estado do Rio de Janeiro (6º ano)	187
Quadro 23: Organizador Curricular de Matemática para o 6º ano (DCR-2019)	190
Quadro 24: Organizador Curricular de Matemática para o 7º ano (DCR-2019)	191
Quadro 25: Matemática da 5ª série/6º ano – Currículo do Estado de São Paulo ...	194
Quadro 26: Recorte do Plano de Ensino de Matemática do 6º ano (PEM-01)	199
Quadro 27: Recorte do Plano de Ensino de Matemática do 6º Ano (PEM-02)	200
Quadro 28: Recorte do Plano de Ensino de Matemática do 6º ano (PEM-03)	201
Quadro 29: Descrição das ações referente à distribuição dos livros didáticos no Brasil pelo PNLD	207
Quadro 30: LDM-1 – Dados gerais do livro Lições de Arithmetica de Euclides Medeiros Guimarães Roxo de 1926	223
Quadro 31: LDM-1 – Conteúdos de divisibilidade no índice e no interior dos capítulos do livro de Euclides Roxo (1926)	223
Quadro 32: LDM-1 – Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro de Euclides Roxo (1926)	225
Quadro 33: LDM-2 – Dados gerais do livro de Osvaldo Sangiorgi (1963)	228
Quadro 34: LDM-2 – Programa para um Curso Moderno de Matemática conforme Osvaldo Sangiorgi (1963)	229
Quadro 35: LDM-2 – Conteúdos de divisibilidade no índice e no interior do capítulo do livro de Sangiorgi (1963)	230
Quadro 36: LDM-2 – Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro de Osvaldo Sangiorgi (1963)	249
Quadro 37: LDM-3 – Dados gerais do Livro de Osvaldo Sangiorgi (1968)	252
Quadro 38: LDM-3 – Programa para um Curso Moderno de Matemática conforme Sangiorgi (1968)	252
Quadro 39: LDM-3 – Conteúdos de divisibilidade no índice e no interior do capítulo do Livro de Sangiorgi (1968)	253
Quadro 40: LDM-3 – Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no Livro de Osvaldo Sangiorgi (1968)	256
Quadro 41: LDM-4 – Dados gerais do Livro de Scipione Di Pierro Neto (1970): Matemática na Escola Renovada	259

Quadro 42: LDM-4 – Conteúdos de divisibilidade apresentados no índice e no interior do Capítulo 5 do livro de Scipione (1970).....	259
Quadro 43: LDM-4 – Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro de Scipione Di Pierro Neto (1970).	261
Quadro 44: LDM-5 – Dados gerais do livro de Lamparelli E.....	263
Quadro 45: LDM-5 – Conteúdos de divisibilidade no índice e no interior do capítulo do livro de Lamparelli et al. (1974)	264
Quadro 46: LDM-5 – Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro de Lydia Lamparelli et al. (1974)	265
Quadro 47: LDM-6 – Dados gerais do livro de Álvaro Andrini (1984).....	269
Quadro 48: LDM-6 – Conteúdos de divisibilidade apresentados no índice e no interior dos capítulos do livro de Álvaro Andrini (1984)	270
Quadro 49: LDM-6 – Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro de Álvaro Andrini (1984)	271
Quadro 50: LDM-7 – Dados gerais do livro de Álvaro Andrini (1989).....	275
Quadro 51: LDM-7 – Conteúdos de divisibilidade apresentados no índice e no interior dos capítulos do livro de Álvaro Andrini (1989)	275
Quadro 52: LDM-7 – Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro de Álvaro Andrini (1989).....	277
Quadro 53: LDM-8 – Dados gerais do livro de Linaldo Malveira (1991)	280
Quadro 54: LDM-8 – Conteúdos de divisibilidade apresentados no índice e no interior dos capítulos do livro de Linaldo Malveira (1991)	281
Quadro 55: LDM-8 – Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro de Linaldo Malveira (1991)	282
Quadro 56: LDM-9 – Dados gerais do livro de Bongiovanni, Vissoto e Laureano (1995).....	285
Quadro 57: LDM-9 – Conteúdos de divisibilidade no índice e no interior do capítulo do livro de Bongiovanni, Vissoto e Laureano (1995)	286
Quadro 58: LDM-9 – Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro de Bongiovanni, Vissoto e Laureano (1995).....	287
Quadro 59: LDM-10 – Dados gerais do livro de Iracema Mori e Dulce Onaga (2002)	291
Quadro 60: LDM-10 – Conteúdos de divisibilidade apresentados no sumário e no interior dos capítulos do livro de Mori e Onaga (2002).....	291

Quadro 61: LDM-10 – Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro de Mori e Onaga (2002).....	293
Quadro 62: LDM-11 – Dados gerais do livro de Andrini e Vasconcelos (2002).....	296
Quadro 63: LDM-11 – Conteúdos de divisibilidade apresentados no sumário e no interior da unidade do livro de Andrini e Vasconcelos (2002)	296
Quadro 64: LDM-11 – Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro de Andrini e Vasconcelos (2002) PNLD-2006	298
Quadro 65: LDM-12 – Dados gerais do livro de Luiz Roberto Dante (2005)	301
Quadro 66: LDM-12 – Conteúdos de divisibilidade apresentados no sumário e no interior do capítulo do livro de Luiz Roberto Dante (2005)	302
Quadro 67: LDM-12 – Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro de Luiz Roberto Dante (2005)	304
Quadro 68: LDM-13 – Dados gerais do livro de Luiz Roberto Dante (2010)	308
Quadro 69: LDM-13 – Conteúdos de divisibilidade apresentados no sumário e no interior do capítulo do livro de Luiz Roberto Dante (2010)	308
Quadro 70: LDM-13 – Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro de Luiz Roberto Dante (2010) – PNLD-2011.....	311
Quadro 71: LDM-14 – Dados gerais do livro de Andrini e Vasconcelos (2012).....	317
Quadro 72: LDM-14 – Conteúdos de divisibilidade no sumário e no interior da unidade do livro “Praticando Matemática” 6º ano” (2012) – PNLD 2014.....	317
Quadro 73: LDM-14 – Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro de Andrini e Vasconcelos (2012) PNLD-2014	320
Quadro 74: LDM-15 – Dados gerais do livro de Souza e Pataro (2012)	323
Quadro 75: LDM-15 – Conteúdos de divisibilidade no sumário e no interior da unidade do livro “Vontade de Saber Matemática ” 6º ano” (2012) – PNLD-2014....	324
Quadro 76: LDM-15 – Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no Livro de Joamir Souza e Patrícia Pataro (2012) – PNLD-2014.....	326
Quadro 77: LDM-16 – Dados gerais do livro de Luiz Roberto Dante (2013)	330
Quadro 78: LDM-16 – Conteúdos de divisibilidade apresentados no sumário e no interior da capítulo no livro de Luiz Roberto Dante (2013)	331
Quadro 79: LDM-16 – Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro de Luiz Roberto Dante (2013) – PNLD-2014.....	333
Quadro 80: LDM-17 – Dados gerais do livro de Edwaldo Bianchini (2011).....	337

Quadro 81: LDM-17 – Conteúdos de divisibilidade apresentados no sumário e no interior da capítulo do livro de Edwaldo Bianchini (2011).....	337
Quadro 82: LDM-17 – Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro de Edwaldo Bianchini (2011) – PNLD-2014	339
Quadro 83: LDM-18 – Dados gerais do livro de Centurión & Jakubovic (2012)	343
Quadro 84: LDM-18 – Conteúdos de divisibilidade no sumário e no interior do capítulo do livro “Matemática: Teoria e Contexto” 6º ano” (2012) – PNLD 2014.....	343
Quadro 85: LDM-18 – Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro de Marília Centurión & José Jakubovic (2012) – PNLD-2014.....	346
Quadro 86: LDM-19 – Dados gerais do livro de Iracema e Dulce (2012)	349
Quadro 87: LDM-19 – Conteúdos de divisibilidade apresentados no índice e no interior dos capítulos do livro de Mori e Onaga (2012).....	350
Quadro 88: LDM-19 – Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro de Iracema Mori e Dulce Onaga (2012) – PNLD-2014.....	352
Quadro 89: LDM-20 – Dados gerais do livro de Andrini e Vasconcelos (2015).....	358
Quadro 90: LDM-20 – Conteúdos de divisibilidade no sumário e no interior da unidade do livro “Praticando Matemática” 6º ano” (2015) – PNLD 2016.....	358
Quadro 91: LDM-20 – Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro de Andrini e Vasconcelos (2015) PNLD-2017	360
Quadro 92: LDM-21 – Dados gerais do livro de Souza e Pataro (2015)	364
Quadro 93: LDM-21 – Conteúdos de divisibilidade no sumário e no interior do capítulo do livro “Vontade de Saber Matemática” 6º ano” (2015) – PNLD-2017	365
Quadro 94: LDM-21 – Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro de Joamir Souza e Patrícia Pataro (2015) – PNLD-2017	367
Quadro 95: LDM-22 – Dados gerais do livro de Ênio Silveira (2015)	371
Quadro 96: LDM-22 – Conteúdos de divisibilidade no sumário e no interior do capítulo do livro “Matemática: Compreensão e Prática” 6º ano” (2015) – PNLD-2017	372
Quadro 97: LDM-22 – Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro de Ênio Silveira (2015) – PNLD-2017.....	373
Quadro 98: LDM-23 – Dados gerais do livro de Luiz Roberto Dante (2016)	378
Quadro 99: LDM-23 – Conteúdos de divisibilidade apresentados no sumário e no interior da capítulo do livro de Luiz Roberto Dante (2016)	378

Quadro 100: LDM-23 – Ficha de análise da presença/ausência dos Conteúdos de divisibilidade no livro de Luiz Roberto Dante (2016) – PNLD-2017	381
Quadro 101: LDM-24 – Dados gerais do livro de Edwaldo Bianchini(2015)	386
Quadro 102: LDM-24 – Conteúdos de divisibilidade apresentados no sumário e no interior da capítulo do livro de Edwaldo Bianchini (2015)	386
Quadro 103: LDM-24 – Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro de Edwaldo Bianchini (2015) – PNLD-2017	388
Quadro 104: LDM-25 – Dados gerais do livro de Projeto Araribá: Matemática (2014)	392
Quadro 105: LDM-25 – Conteúdos de divisibilidade apresentados no sumário e no interior das unidades do livro Projeto Araribá: Matemática 6º ano (2014)	393
Quadro 106: LDM-25 – Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro do Projeto Araribá (2014) – PNLD-2017	395
Quadro 107: LDM-26 – Dados gerais do livro de Eduardo Chavante (2015)	399
Quadro 108: LDM-26 – Conteúdos de divisibilidade apresentados no sumário e no interior do capítulo do Livro de Eduardo Chavante (2015)	400
Quadro 109: LDM-26 – Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro de Eduardo Chavante (2015) – PNLD-2017	401
Quadro 110: LDM-27 – Dados gerais do livro de Mazzeiro e Machado (2015)	405
Quadro 111: LDM-27 – Conteúdos de divisibilidade apresentados no sumário e no interior do capítulo do livro de Mazzeiro e Machado (2015)	407
Quadro 112: LDM-27 – Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro de Mazzeiro e Machado (2015) – PNLD-2017	408

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Dissertações Sobre Divisibilidade e Teoria dos Números.....	43
Tabela 2: Teses Seleccionadas para Análise Neste Estudo	45
Tabela 3: Trabalhos publicados nos Anais Do XII ENEM (2016) por categorias.	52
Tabela 4: Publicações do Bolema no Período de 2012 a 2018	53
Tabela 5: Trabalhos Publicados no Bolema <i>On-Line</i> de 2012 a 2018 por Categorias.	54
Tabela 6: Dados Quantitativos das Publicações da Revista Zetetiké no Período de 2010 a 2018	57
Tabela 7: Relação dos livros didáticos de matemática seleccionados para análise da fase 1 (1926 A 1979).....	155
Tabela 8: Relação dos livros didáticos de matemática seleccionados para análise da fase 2 (1980 a 2010) para	156
Tabela 9: Relação dos livros didáticos de matemática do 6º ano seleccionados para análise da fase 2 – parte 2 (pnld-2014).....	156
Tabela 10: Relação dos livros didáticos de matemática seleccionados para análise da fase 3 (PNLD-2017)	157
Tabela 11: LDM_: Resultado final quantitativo e qualitativo da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade do Livro de _____	162
Tabela 12: Dados da análise da presença-ausência dos conteúdos de divisibilidade nos documentos oficiais e curriculares do 6º ano	168
Tabela 13: Dados da Análise da presença-ausência dos Conteúdos de Divisibilidade na BNCC-2017 – Unidade Temática “Números” do 6º ano	173
Tabela 14: Dados da Análise da presença-ausência dos Conteúdos de Divisibilidade na BNCC-2017 – Unidade Temática “Números” do 7º ano	174
Tabela 15: Dados da Análise da presença-ausência dos Conteúdos de Divisibilidade do CRMG – Unidade Temática “Números” do 6º ano	179
Tabela 16: Dados da Análise da presença-ausência dos Conteúdos de Divisibilidade nas DCE-PR – Unidade Temática “Números” 5ª série/6º ano.....	183
Tabela 17: Dados da análise da presença-ausência dos Conteúdos de Divisibilidade nas PCM-PE – Matemática para o 6º ao 9º ano.....	186

Tabela 18: Dados da Análise da presença-ausência dos Conteúdos de Divisibilidade no CMM-RJ – Unidade Temática “números” 6º ano.....	188
Tabela 19: Dados da Análise da presença-ausência dos Conteúdos de Divisibilidade no DCR – Matemática do 6º e 7º anos.....	192
Tabela 20: Dados da análise da presença-ausência dos Conteúdos de Divisibilidade do CSP – Matemática para o 6º ano	195
Tabela 21: Resultado Final da análise da presença/ausência dos Conteúdos de Divisibilidade nos sete Documentos Oficiais e Curriculares analisados	196
Tabela 22: Quantidade dos LDM distribuídos no país pelo PNLD-2017 para o ensino fundamental dos anos finais para o Triênio 2017-2018-2019.	210
Tabela 23: LDM do 6º ano mais escolhidos pelos professores das escolas estaduais do Ensino Fundamental anos finais no Brasil do PNLD-2014	216
Tabela 24: LDM do 6º ano mais escolhidos pelos professores das escolas estaduais do ensino fundamental no Brasil do PNLD 2017	217
Tabela 25: Coleções de Matemática mais escolhidas pelas escolas estaduais do ensino fundamental de Boa Vista – RR (PNLD 2008)	218
Tabela 26: Coleções de Matemática mais escolhidas pelas escolas estaduais do ensino fundamental de Boa Vista – RR (PNLD 2011)	219
Tabela 27: Coleções de Matemática mais escolhidas pelas escolas estaduais do ensino fundamental de Boa Vista – RR – PNLD/2014 – Triênio: 2014-2015-2016 ..	219
Tabela 28: Coleções de Matemática mais escolhidas pelas escolas estaduais do ensino fundamental de Boa Vista – RR (PNLD 2017)	220
Tabela 29: LDM-1 – Resultado final quantitativo e qualitativo da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade do livro de Euclides Roxo (1926)	227
Tabela 30: LDM-2 – Resultado final quantitativo e qualitativo da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade do livros de Osvaldo Sangiorgi (1963)	251
Tabela 31: LDM-3 – Resultado final quantitativo e qualitativo da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade do livro de Osvaldo Sangiorgi (1968)	257
Tabela 32: LDM-4 – Resultado final quantitativo e qualitativo da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade do livro de Scipione Di Pierro Neto (1970)	262
Tabela 33: LDM-5 – Resultado final quantitativo e qualitativo da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade do livro de Lydia Lamparelli et. al. (1974)	267
Tabela 34: LDM-6 – Resultado final quantitativo e qualitativo da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade do livros de Álvaro Andrini (1984)	273

Tabela 35: LDM-7 – Resultado final quantitativo e qualitativo da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade do livros de Álvaro Andrini (1989)	278
Tabela 36: LDM-8 – Resultado final quantitativo e qualitativo da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade do livros de Linaldo Malveira (1991)	283
Tabela 37: LDM-9 – Resultado final quantitativo e qualitativo da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade do livros de Bongiovanni et al. (1995).....	289
Tabela 38: LDM-10 – Resultado final quantitativo e qualitativo da presença-ausência dos conteúdos de divisibilidade do livros de Iracema e Dulce (2002)	294
Tabela 39: LDM-11 – Resultado final quantitativo e qualitativo da presença-ausência dos conteúdos de divisibilidade do livros de Andrini e Vasconcelos (2002).....	299
Tabela 40: LDM-12 – Resultado final quantitativo e qualitativo da presença-ausência dos conteúdos de divisibilidade do livros de Luiz Roberto Dante (2005)	306
Tabela 41: LDM-13 – Resultado final quantitativo e qualitativo da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade do livros de Luiz Roberto Dante (2010)	312
Tabela 42: Livros didáticos de Matemática do 6º ano selecionados da relação dos mais distribuídos pelo PNLD-2014	315
Tabela 43: LDM-14 – Resultado final quantitativo e qualitativo da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade do livros de Andrini e Vasconcelos (2012).....	321
Tabela 44: LDM-15 – Resultado final quantitativo e qualitativo da presença-ausência dos conteúdos de divisibilidade do livro de Souza e Pataro (2012)	328
Tabela 45: LDM-16 – Resultado final quantitativo e qualitativo da presença-ausência dos conteúdos de divisibilidade do livro de Luiz R. Dante (2013)	335
Tabela 46: LDM-17 – Resultado final quantitativo e qualitativo da presença-ausência dos conteúdos de divisibilidade do livros de Edwaldo Bianchini (2011)	340
Tabela 47: LDM-18 – Resultado Final quantitativo e qualitativo da presença-	347
Tabela 48: LDM-19 – Resultado Final quantitativo e qualitativo da presença- ausência dos Conteúdos de Divisibilidade do Livro de Mori e Onaga (2012)	353
Tabela 49: Livros Didáticos de Matemática do 6º ano do PNLD-2017 (triênio: 2017- 2018-2019) selecionados para a análise.....	356
Tabela 50: LDM-20 – Resultado final quantitativo e qualitativo da presença-ausência dos conteúdos de divisibilidade do livros de Andrini e Vasconcelos (2015)	362
Tabela 51: LDM-21 – Resultado final quantitativo e qualitativo da presença.....	369
Tabela 52: LDM-22 – Resultado final quantitativo e qualitativo da presença-ausência dos conteúdos de divisibilidade do livros de Ênio Silveira(2015) – PNLD-2017	375

Tabela 53: LDM-23 – Resultado final quantitativo e qualitativo da presença-ausência dos conteúdos de divisibilidade do livro de Luiz Roberto Dante (2016)	383
Tabela 54: LDM-24 – Resultado final quantitativo e qualitativo da presença-ausência dos conteúdos de divisibilidade do livros de Edwaldo Bianchini (2015)	389
Tabela 55: LDM-25 – Resultado final quantitativo e qualitativo da presença-ausência dos conteúdos de divisibilidade do livro Projeto Araribá:Matemática (2014).....	396
Tabela 56: LDM-26 – Resultado final quantitativo e qualitativo da presença-ausência dos conteúdos de divisibilidade do livro de Chavante (2015).....	402
Tabela 57: LDM-27 – Resultado final quantitativo e qualitativo da presença-ausência dos conteúdos de divisibilidade do livro de Mazzeiro e Machado (2015)	409
Tabela 58: Resultado Final da Análise da ausência dos Conteúdos de Divisibilidade nos Livros Didáticos de Matemática do 6º ano (PNLD-2014 e PNLD-2017)	413
Tabela 59: Computação Geral do Resultado da Análise dos 27 Livros Didáticos de Matemática da 5ª série/6º ano do período de 1926 a 2016.....	414
Tabela 60: Classificação dos 27 Livros Didáticos de Matemática da 5ª série/6º ano analisados por períodos	416
Tabela 61: Ordenação dos Conteúdos de Divisibilidade nos cinco Livros Didáticos de Matemática da 5ª série do período de 1926 a 1979	418
Tabela 62: Ordenação dos Conteúdos de Divisibilidade nos oito livros didáticos de matemática da 5ª série/6º ano do período de 1980 a 2010.....	418
Tabela 63: Ordenação dos Conteúdos de Divisibilidade nos seis livros Didáticos de Matemática do 6º ano do PNLD-2014 (Triênio de 2014-2015-2016)	419
Tabela 64: Ordenação dos Conteúdos de Divisibilidade nos oito Livros Didáticos de Matemática do 6º ano do PNLD-2017 (triênio de 2017-2018-2019).....	420

SUMÁRIO

<i>RESUMO</i>	9
<i>ABSTRACT</i>	11
<i>LISTA DE SIGLAS</i>	12
<i>LISTA DE FIGURAS</i>	14
<i>LISTA DE IMAGENS</i>	15
<i>LISTA DE GRÁFICOS</i>	17
<i>LISTA DE QUADROS</i>	19
<i>LISTA DE TABELAS</i>	25
<i>INTRODUÇÃO</i>	34
<i>CAPÍTULO 1</i>	62
O ENSINO DE MATEMÁTICA	62
1.1 AS CONCEPÇÕES DO ENSINO DE MATEMÁTICA NO BRASIL	63
1.1.1 A influência das Tendências do Ensino de Matemática nos Livros Didáticos	64
1.2 UM BREVE PRECURSO PELAS REFORMAS EDUCACIONAIS DO ENSINO DE MATEMÁTICA QUE MARCARAM A EDUCAÇÃO BRASILEIRA ATÉ O MMM.	70
1.3 O MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA (MMM) – BREVE PERCURSO	75
1.3.1 A influência do Movimento da Matemática Moderna nos Livros didáticos	83
1.4 A MATEMÁTICA NOS PARÂMETROS CURRICULARES DO ENSINO FUNDAMENTAL	86
1.5 A MATEMÁTICA NA BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR (BNCC) DO ENSINO FUNDAMENTAL DOS ANOS FINAIS	91
1.5.1 O que é a BNCC e o que ela traz para a Educação Básica?	91
1.5.2 A Matemática no Ensino Fundamental dos Anos finais no contexto da Educação Básica a partir da BNCC	93
1.5.3 A Matemática como Componente Curricular na Educação Básica	98
<i>CAPÍTULO 2</i>	104
TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA: DO SABER CIENTÍFICO PARA O SABER ESCOLAR	104
2.1 SABER “SÁBIO” OU SABER CIENTÍFICO E SABER ESCOLAR	105
2.2 A TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA SEGUNDO CHEVALLARD	106
2.2.1 A O saber matemático na visão de Chevallard.	109

2.2.2 A transposição didática da Teoria dos Números como Saber Científico ou Acadêmico para o Saber Escolar	118
2.2.3 A Transposição Didática na Análise dos Livros Didáticos de Matemática.....	121
2.3 A DIVISIBILIDADE ENQUANTO SABER CIENTÍFICO E SABER ESCOLAR	125
2.3.1 Caminhando pela História da Matemática com a Teoria dos Números.	125
2.3.2 A Teoria dos números como disciplina nos cursos de Licenciatura em Matemática ..	132
2.3.3 A Divisibilidade como saber científico na Teoria dos Números nos livros didáticos de Matemática	135
2.3.4 Considerações sobre o saber sábio de divisibilidade na Teoria dos Números	145
2.3.5 A Divisibilidade como saber escolar	147
<i>CAPÍTULO 3</i>	149
CONFIGURAÇÃO E ASPECTOS METODOLÓGICOS	149
3.1 DO PERCURSO METODOLÓGICO	149
3.2 OBJETO E DESCRIÇÃO DO LÓCUS DA PESQUISA	150
3.3 ESTRATÉGIAS E INSTRUMENTOS DE COLETA DE DADOS.....	153
3.3.1 Seleção dos Livros Didáticos de Matemática para o Estudo	155
3.3.2 Ordenação dos conteúdos de divisibilidade.....	157
3.3.3 Categorias para Verificar a Presença/ausência dos Conteúdos de Divisibilidade nos Livros Didáticos de Matemática	163
3.3.4 Considerações sobre a qualificação dos livros didáticos de matemática.....	166
<i>CAPÍTULO 4</i>	169
ANÁLISE DOS CONTEÚDOS DE DIVISIBILIDADE NOS DOCUMENTOS CURRICULARES	169
4.1 ANÁLISE DOS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS DE MATEMÁTICA DO ENSINO FUNDAMENTAL ANOS FINAIS	169
4.2 ANÁLISE DA BNCC QUANTO À ORGANIZAÇÃO CURRICULAR DE MATEMÁTICA.	171
4.3 ANÁLISE DOS DOCUMENTOS CURRICULARES QUE TRATAM DE DIVISIBILIDADE	175
4.3.1 Minas Gerais – Documento Curricular de Matemática para 5ª série/6º ano – Ensino Fundamental Anos Finais (2018)	175
4.3.2 Paraná – Referencial Curricular de Matemática 5ª série/6º ano do Ensino Fundamental das séries finais do Estado do Paraná.....	180
4.3.3 Pernambuco – Currículo de Matemática para o Ensino Fundamental do Estado de Pernambuco	183
4.3.4 Rio de Janeiro – Currículo Mínimo de Matemática– Ensino Fundamental para 5ª série/6º ano (CMM-RJ)	186
4.3.5 Roraima – Documento Curricular de Roraima (DCR)	189

4.3.6 São Paulo – Documento Curricular: Matemática e suas Tecnologias do Ensino Fundamental (Ciclo II)	192
4.3.7 Considerações Finais sobre a Análise dos Documentos Oficiais e Documentos Curriculares Analisados.....	195
4.4 ANÁLISE DOS PLANOS DE ENSINO DOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA	197
4.4.1 Análise do Plano de Ensino de Matemática – PEM-01	198
4.4.2 Análise do Plano de Ensino de Matemática – PEM-02	199
4.4.3 Análise do Plano de Ensino de Matemática – PEM-03	201
<i>CAPÍTULO 5</i>	203
OS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA.....	203
5.1 OS LIVROS DIDÁTICOS DO PROGRAMA NACIONAL DO LIVRO DIDÁTICO.....	204
5.1.1 Distribuição e avaliação dos livros didáticos de Matemática.....	205
5.1.2 O Guia do Livro Didático de Matemática (PNLD/2017).....	213
5.1.3 PNLD 2017 – Os livros Didáticos de Matemática mais Escolhidos pelos Professores Brasileiros	216
5.1.4 PNLD 2017 – Os Livros Didáticos de Matemática mais Escolhidos pelos Professores das Escolas do Ensino Fundamental de Boa Vista (RR).....	218
<i>CAPÍTULO 6</i>	221
ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA.....	221
6.1 FASE 1 – ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA DA 5ª SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL (OU EQUIVALENTE) DO PERÍODO DE 1926 A 1979	222
6.1.1 LDM-1 – Análise do livro de Euclides Roxo de 1926.....	222
6.1.2 LDM-2 – Análise do Livro Didático de Matemática de Sangiorgi de 1963	228
6.1.3 LDM-3 – Análise do Livro Didático de Matemática de Sangiorgi de 1968	252
6.1.4 LDM-4 – Análise do Livro Didático de Matemática de Scipione Di Pierro Neto (1970).....	258
6.1.5 LDM-5 – Análise do livro de Lydia Lamparelli Condé; Adolfo Walter P. Canton; Pedro Alberto Morettin; Dalva Fontes Indiani (1974)	263
6.1.6 Considerações Finais da Análise dos LDM da Fase 1.....	267
6.2 FASE 2 – ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA DO PERÍODO DE 1980 A 2014	268
6.2.1 LDM-6: Análise do livro de Álvaro Andrini “Matemática” 5ª série (1984).....	269
6.2.2 LDM-7: Análise do Livro de Álvaro Andrini “Praticando Matemática” – 5ª série (1989)	274
6.2.3 LDM-8: Análise do Livro de Linaldo Malveira (1991)	279
6.2.4 LDM-9: Análise do livro de Bongiovanni, Vissoto e Laureano “Matemática e vida” (1995)	284

6.2.5 LDM-10: Análise do Livro de Iracema Mori e Dulce Onaga “Matemática: ideias e desafios” (2002) – PNLD-2003.....	290
6.2.6 LDM-11: Análise do Livro de Andrini e Vasconcelos (2002)	295
6.2.7 LDM-12: Análise do Livro de Luiz Roberto Dante (2005)	300
6.2.8 LDM-13: Análise do Livro de Luiz Roberto Dante 6º ano (2010).....	307
6.2.9 Considerações finais da análise da Fase 2 (parte 1)	313
6.3 PNLD-2014 – ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA DO SEXTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL – ANOS FINAIS.....	315
6.3.1 LDM-14 – Análise do Livro “Praticando Matemática” Edição Renovada de Andrini e Vasconcelos (2012)	315
6.3.2 LDM-15 – Análise do Livro Vontade de Saber Matemática 6º ano de Joamir Souza e Patrícia Pataro (2012).....	322
6.3.3 LDM-16 – Análise do Livro “Projeto Teláris – Matemática” 6º ano de Luiz Roberto Dante (2013)	329
6.3.4 LDM-17 – Análise do Livro “Matemática Bianchini” 6º ano de Edwaldo Bianchini (2011)	336
6.3.5 LDM-18 – Análise do livro “Matemática Teoria e Contexto” 6º ano de Marília Centurión & José Jakubovic” (2012).....	341
6.3.6 LDM-19 – Análise do Livro “Matemática: ideias e desafios” de Iracema Mori e Dulce Onaga (2012)	348
6.3.7 Considerações Finais da Análise da Fase 2 (parte 2).....	354
6.4 PNLD-2017 – ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA DO SEXTO ANO – DO ENSINO FUNDAMENTAL – ANOS FINAIS (FASE 3).....	356
6.4.1 LDM-20 – Análise do livro “Praticando Matemática” de Andrini e Vasconcelos (2015)	357
6.4.2 LDM-21 – Análise do livro “Vontade de Saber Matemática” de Joamir Souza e Patrícia Pataro (2015)	363
6.4.3 LDM-22 –Análise do livro de “Matemática: compreensão e prática” de Ênio Silveira (2015)	370
6.4.4 LDM-23 – Análise do Livro “Projeto Teláris – Matemática” – 6º ano de Luiz Roberto Dante (2016)	376
6.4.5 LDM-24 – Análise do livro “Matemática Bianchini” 6º ano de Edwaldo Bianchini (2015)	384
6.4.6 LDM-25 –Projeto Araribá: Matemática 6º ano (2014).....	391
6.4.7 LDM-26: Análise do Livro ‘Convergências Matemática” 6º ano de Eduardo Chavante (2015)	397
6.4.8 LDM-27 – Análise do livro “Descobrimos e Aplicando a Matemática” 6º ano de Alceu dos Santos Mazzeiro e Paulo Antônio Fonseca Machado (2015).....	404

6.4.9 Considerações sobre o Resultado da Análise dos Livros Seleccionados do PNLD-2017	411
6.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS DA ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA (5ª SÉRIE/6º ANO) SELECIONADOS DO PERÍODO DE 1926 A 2016	414
<i>CONSIDERAÇÕES FINAIS</i>	422
<i>REFERÊNCIAS</i>	434
<i>ANEXOS - DOCUMENTOS CURRICULARES</i>	446
ANEXO A – COMPETÊNCIAS GERAIS PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA CONFORME A BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR (BNCC, 2017).....	446
ANEXO B – MATEMÁTICA PARA O 6º ANO – (BNCC, 2017)	447
ANEXO C – DOCUMENTO CURRICULAR DE RORAIMA – QUADRO DOS CONTEÚDOS DE MATEMÁTICA DO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL – ANOS FINAIS	451
<i>APÊNDICE A - RELAÇÃO DE DISSERTAÇÕES</i>	454
APÊNDICE B – RELAÇÃO DOS LIVROS DE MATEMÁTICA SELECIONADOS PARA O ESTUDO	462

INTRODUÇÃO

A ideia de estudar o tema “divisibilidade” surgiu ainda na graduação em Licenciatura em Matemática¹, a partir da disciplina Teoria dos Números quando percebemos a grande diferença no estudo dos conteúdos da Aritmética básica e de divisibilidade que nos apresentam no ensino superior para a forma simplificada e diferente como estes conteúdos se apresentam para o ensino na Educação Básica, ou seja, percebemos então, duas concepções de saber: o científico e o escolar. Sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático de Yves Chevallard (1999) cada saber é saber de pelo menos uma instituição e um mesmo objeto do saber pode “viver” em instituições diferentes e para viver em uma instituição um saber necessita submeter-se a certas imposições, o que o conduz a ser transformado.

Desse modo é importante considerar o aspecto do saber a ser construído no sistema didático considerando os dois cenários em que se vivencia o saber matemático — a Academia (graduação, pós-graduação e institutos de pesquisa) e o contexto escolar da Educação Básica. Esse saber vivenciado no Ensino Superior deverá passar por transformações para se adequar aos objetivos de ensino da Educação Básica, pois os sujeitos de ambos os ambientes são diferenciados pela maturidade cognitiva.

Essas transformações de um tipo de saber para o outro ainda não estavam sendo abordadas nos cursos de licenciatura e os ingressantes se deparavam com muitas dificuldades devido ao tipo de linguagem formal e axiomática que são apresentadas nos livros de matemática de Teoria dos Números que são utilizados nos cursos de licenciatura em Matemática — um tipo de linguagem que não se usa quando os professores estão atuando na Educação Básica.

Com o intuito de aprimorar meus conhecimentos acadêmicos procurei participar dos eventos científicos promovidos e realizados em nosso Estado pelas Instituições de Ensino Superior. Assim, ao participar pela primeira vez da Semana da

¹ Graduação em Licenciatura de Matemática pela Universidade Estadual de Roraima – UERR (2006-2010).

Matemática promovida pela Universidade Federal de Roraima (UFRR) em 2007, me dei conta da importância dos números primos e isto aguçou minha curiosidade e me fez tomar a decisão de pesquisar sobre estes números tão especiais e, conseqüentemente sobre os conteúdos de divisibilidade. Foi assim, que escolhi o tema para meu Trabalho de Conclusão de Curso (TCC)² que foi apresentado em 2008, intitulado “Método alternativo para identificar números primos”.

Antes de prosseguir expondo sobre o tema deste trabalho, gostaria de trazer aqui um pequeno relato da minha trajetória de vida, para a percepção de como cheguei a esta profissão e à minha paixão pela Matemática. Quando terminei o curso técnico em Agropecuária, por causa da situação financeira precária da minha família, cuja renda para sustentar a família de cinco pessoas vinha somente do trabalho de costura da minha mãe, me vi obrigada a procurar um emprego. No início do ano após o término do segundo grau surgiu um concurso público para professor de 1º grau de uma escola de ensino diferenciado do então Território de Roraima e, lá se ensinava técnicas agrícolas para os estudantes do 1º grau de todas as escolas do Território. Então, concorri e, para minha grande surpresa fui aprovada. Assim, começou minha carreira docente, com dezoito anos de idade. Embora minha mãe tivesse sido professora quando eu era criança, não havia pensado nessa opção como uma carreira a seguir. Mas a vida nos apresenta muitas possibilidades não pensadas e nem muitas vezes desejadas e eu tinha o sonho de fazer um curso superior, só que parecia muito difícil de realizar, já que não havia no Território de Roraima (como era denominado nesta época) nenhuma instituição de ensino superior e, para que isso fosse possível deveria ir para outras cidades como Manaus ou Belém. Então, resolvi que iria trabalhar no máximo dois anos tão somente com o objetivo de juntar dinheiro para continuar os estudos em Belém (PA).

No segundo ano como docente, na época do carnaval ao participar de um retiro espiritual, o padre responsável pelo ensino religioso, percebendo um potencial espiritual em mim, convidou-me para trabalhar como professora do ensino religioso, e, mesmo sendo ainda muito jovem eu já estudava temas a respeito das principais religiões e sobre a espiritualidade. A proposta pareceu-me bastante interessante, principalmente porque o salário era melhor. Dessa forma, continuei por mais um ano como professora do 1º grau, agora em três escolas estaduais de Educação Básica (1º

² Monografia intitulada “Método alternativo de identificar números primos em qualquer intervalo dado” (UERR, 2009).

grau) em todas as quatro séries (5ª a 8ª). Essa foi uma época de grandes ganhos na minha formação profissional e como ser humano, pois vivenciei boas experiências pedagógicas com os alunos e professores nas escolas que estava atuando. Essa experiência inicial como docente fortaleceu-me e deixou uma sementinha preparada para germinar no futuro.

Quando terminou o ano letivo senti-me pronta para viajar para Belém e tentar uma vaga na universidade, entretanto, não consegui me estabelecer por muito tempo e, por causa de problemas familiares retornei na metade do ano para Boa Vista (RR). Depois de um tempo consegui passar em outro concurso público para uma vaga de assistente administrativa numa empresa de economia mista, que me proporcionou uma vida boa por uns dez anos. Em 1986, já havia a Universidade Federal de Roraima e, por causa da oferta para participar da seleção de ingresso por média curricular, consegui entrar na Universidade para o curso de Bacharel em Matemática, mas, infelizmente não consegui levar a diante, pois estava com minhas filhas gêmeas ainda bebês e, como ainda tinha que trabalhar nos dois períodos, mais uma vez não consegui levar adiante meu sonho de fazer um curso superior.

Se essas páginas pudessem conter toda uma história, talvez pudesse detalhar todas as coisas maravilhosas e também as trágicas que me aconteceram, até chegar a este momento, mas o foco aqui, não é a minha história, mas, também não há como deixar de lado um dos fatos mais marcantes da minha vida, além do nascimento dos meus quatro filhos: em 1986 nasceram as gêmeas, em 1988 nasceu outra linda menina e, em 1993 nasceu meu primeiro e único filho. Em 1995, uma semana depois de retornar de uma viagem à Índia, em novembro, minha família e amigos fomos convidados para participar de um encontro espiritual na cidade fronteira da Venezuela, mas, infelizmente não chegamos até lá, pois, praticamente na metade do percurso, com uma hora de viagem aconteceu um acidente trágico que nos levou nossa filha de sete anos e nosso filho de dois anos. Um acontecimento deste muda a vida de qualquer pessoa. Então, eu e meu esposo, decidimos mudar de cidade e escolhemos morar em Uberlândia (MG). A cidade nos pareceu muito acolhedora e a fama de promover uma educação de qualidade nos animou para fazer a mudança, mas não conhecíamos nem a cidade e nem ninguém que morasse lá. Depois do natal, já no final de dezembro de 1995, partimos para uma nova vida em Uberlândia, o que durou uns sete anos. Após ter me separado do esposo, com dificuldades financeiras e sem emprego, em 2003, decidi retornar para Boa Vista, para minha família. Mas, foi

somente em 2006 quando surgiu a Universidade Estadual de Roraima (UERR), ofertando cursos em um único período, é que vislumbrei a realização do meu sonho e de um futuro melhor através do ensino superior, pois assim, poderia trabalhar num período e estudar em outro. Desse modo, através do vestibular consegui entrar para o curso de Licenciatura em Matemática, uma escolha feita consciente, pois sempre gostei de matemática e senti brotar um grande entusiasmo para aprender Matemática e depois ensiná-la para que mentes jovens também pudessem gostar e se entusiasmar em aprendê-la.

Quando terminei a graduação, em 2010 aproveitei a primeira oportunidade, para participar do seletivo ofertado a cada início de ano letivo pela Secretaria de Educação do Estado, já que desde 2008 não havia concurso público para professores. Embora fosse um emprego temporário e sem os mesmos direitos dos professores efetivos era o que se tinha como melhor opção de emprego. Desse modo, comecei a exercer a minha profissão de professora de matemática no ensino fundamental dos anos finais e ensino médio. Enfim, um sonho realizado! Entretanto, já na graduação vislumbra a formação continuada, ou seja, um curso de especialização em ensino de matemática, pois percebi que só a graduação não era suficiente para me preparar para exercer a profissão docente.

Em busca de aprimorar minha prática docente, tanto no ensino de matemática para a educação básica como para o ensino superior, fiz a inscrição para a seleção do curso de Especialização em Metodologia do Ensino de Ciências e Matemática em 2011, ofertado pela Universidade Estadual de Roraima (UERR). Ser selecionada neste curso de especialização foi um marco muito importante na minha carreira profissional – ampliou meu horizonte pessoal e profissional, possibilitando-me participar de uma seleção para professores (horistas), nesta mesma universidade em que fui graduada. Dessa forma, comecei a trabalhar como docente do ensino superior no início de 2012.

Ainda no curso de especialização ouvi nossos professores proferirem comentários esperançosos sobre o projeto da UERR de implantação do primeiro Mestrado Profissional de Ensino de Ciências (e Matemática)³, isso nos deixou em alerta para a perspectiva de dar continuidade aos estudos e progressão na carreira

³ Devido a falta de professores doutores na área de ensino de Matemática o nome “Matemática” não fez parte do título do Programa de Mestrado Profissional, ficando apenas “Mestrado Profissional de Ensino de Ciências”.

docente. Para minha felicidade fui selecionada para o primeiro Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática, ofertado no ano de 2013 pela UERR. Fiquei muito feliz com mais esta possibilidade e, quando percebi que a minha turma era formada por professores de diversas disciplinas (matemática, física, química, biologia, pedagogia e filosofia) da rede estadual e também colegas da graduação, me fez ficar bastante animada, pois essa diversidade só poderia enriquecer nossas experiências e debates durante o curso.

No Programa de Pós-graduação do Mestrado Profissional escolhi a linha de pesquisa “Métodos Pedagógicos e Tecnologias Digitais no Ensino de Ciências” e, nos encontros do nosso grupo de estudos, o orientador nos apresentou uma proposta de estudo inovadora e interessante, o que me convenceu a enveredar por novos caminhos, distanciando-me um pouco da minha ideia inicial que era trabalhar com os números primos. A proposta do orientador em unificar duas teorias me pareceu bastante interessante e o tema proposto também muito relevante, pois havia um problema constatado não só por pesquisadores, mas pela prática docente de muitos professores – a problemática da dificuldade de aprendizagem na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral nos cursos de Licenciatura em Matemática, o que me motivou a defender a dissertação intitulada “Estudo da aprendizagem do conceito de limite fundamentado na teoria da aprendizagem significativa aplicada à licenciatura em matemática”, no dia 26 de julho de 2014, cujo orientador foi o Prof. Dr. Hector José Garcia Mendoza.

A perspectiva em dar continuidade aos estudos surgiu ainda na etapa de qualificação do mestrado, quando uma das participantes da banca de avaliação, Professora Dra. Marta M. P. Darsie, coordenadora geral da REAMEC, numa reunião com mestrandos (UERR), doutorandos (REAMEC) e professores (UERR e UFRR), nos apresentou entusiasticamente o Programa de Doutorado em Educação em Ciências e Matemática da Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática (REAMEC). Fiquei feliz com a possibilidade de dar continuidade aos estudos e ao mesmo tempo triste, pois havia um detalhe que impedia isso de acontecer, o programa só aceitava professores efetivos de instituições de ensino superior pertencentes à rede e, eu ainda não atendia a esse critério.

Ao final do Mestrado, em 2014, surgiu uma oportunidade de participar de um concurso público para docentes de nível superior da Universidade Federal de Roraima (UFRR) e, para minha imensa e indescritível felicidade fui selecionada para o curso

de Licenciatura em Educação do Campo. Já como professora efetiva da UFRR não conseguia deixar de pensar que isso propiciaria a minha participação na seleção de doutorado da REAMEC.

Ao pensar na escolha do tema para elaborar o projeto para a seleção de Doutorado não pude deixar de lado os estudos que tanto me entusiasmaram sobre os números primos e os demais conteúdos de divisibilidade e, que devido à minha prática docente havia percebido a necessidade de ampliar esses estudos e verificar o que os pesquisadores em Educação Matemática estavam estudando a respeito, bem como sobre os resultados de suas investigações.

A partir das experiências em sala de aula ao aplicar avaliações diagnósticas nas turmas de 6º ao 9º ano, no período em que trabalhei nas escolas públicas de Boa Vista (RR) de 2011 a 2014, percebi que os alunos que vinham do ensino fundamental das séries iniciais (5ª ano) haviam esquecido quase que completamente os conteúdos de divisibilidade e apresentavam grande dificuldade em conceituar e diferenciar números compostos de números primos.

Mas, não foi somente com os alunos do Ensino Fundamental que constatei essa problemática na aprendizagem dos conteúdos de divisibilidade, também observei nas avaliações diagnósticas sobre os assuntos básicos de matemática (aritmética, álgebra e geometria) nas turmas de Licenciatura de Matemática e de Ciências da Natureza com ênfase em Matemática e Física⁴, no curso de licenciatura de Educação do Campo com ênfase em Ciências da Natureza e Matemática⁵ que os acadêmicos ingressantes, futuros professores de matemática, estão chegando ao ensino superior sem a maturidade requerida nos conhecimentos matemáticos, principalmente nos conteúdos de aritmética, sendo esta, uma das causas para o percentual tão alto de desistência e reprovação nos cursos de Licenciatura em Matemática.

Como professora de matemática de um curso de Licenciatura de Educação do Campo – Ciências da natureza e Matemática, responsável pela preparação de futuros professores de matemática, tenho usado os livros didáticos de matemática do Ensino Fundamental e Médio como recurso pedagógico e didático, visto que este é um material didático gratuito disponibilizado pelo Sistema Educacional brasileiro para as escolas públicas e à disposição de professores e alunos para uso em sala de aula.

⁴ Prática docente no período de 2013-2014 na Universidade Estadual de Roraima (UERR).

⁵ Prática docente desde 2014, na Universidade Federal de Roraima (UFRR).

Além da reflexão sobre as dificuldades de aprendizagem que os ingressantes do nosso curso têm demonstrado no conhecimento de aritmética (números e operações), surgiu uma inquietação sobre os conteúdos de divisibilidade apresentados nos livros didáticos de matemática do ensino fundamental dos anos finais. Percebemos uma lacuna que nos provocou a seguinte indagação: *Existe alguma redução expressiva dos conteúdos de divisibilidade nos livros didáticos de matemática do 6º ano e nos documentos oficiais referentes ao ensino fundamental dos anos finais?*

O interesse em responder a esse questionamento surgiu a partir da rejeição dos acadêmicos por alguns livros didáticos de matemática usados nas aulas como recurso pedagógico para aprofundamento do saber matemático disponível para os alunos do Ensino Fundamental, com a justificativa de que em alguns livros estavam faltando alguns conteúdos ou que os exemplos e exercícios não eram suficientes.

Então, pela importância que o livro didático adquiriu ao longo do tempo, sendo de uso obrigatório para os alunos nas salas de aula e servindo de referencial e suporte didático e pedagógico para a prática docente do professor, consideramos pertinente averiguar se de fato está ocorrendo diminuição ou exclusão de conteúdos de divisibilidade nos livros didáticos de matemática do sexto ano, no ensino fundamental dos anos finais.

O livro didático tem muitas funções e entre elas, segundo Choppin (2002, p. 108) são, em primeiro lugar, ferramentas pedagógicas, destinadas a facilitar a aprendizagem; o suporte, o depositário do conhecimento e das técnicas que em um dado momento, uma sociedade acredita ser oportuno que a juventude deve adquirir para a perpetuação de seus valores (CHOPPIN, 2002, p. 108-109).

Pela importância que o livro tem no contexto escolar, inferimos ser também relevante averiguar sobre a presença dos conteúdos de divisibilidade que servem de instrumental básico para vários tipos de cálculos e aplicações em outros assuntos mais avançados.

Uma das grandes motivações para enfrentar os quatro longos anos em um doutorado é a grande oportunidade de aprimoramento intelectual e de realizar pesquisa na área da educação e do ensino para que possamos melhorar a educação de nosso país.

Os estudos no doutorado possibilitaram muitos momentos de reflexões coletivas e individuais a respeito da educação que vivenciamos nas universidades

brasileiras e na educação básica. Nossa formação num curso de doutorado nos faz aprofundar essa reflexão para nossa prática docente que influenciará novas gerações de professores. Desse modo, o que vivenciamos nas salas de aulas com os futuros professores nos propicia uma visão mais ampla sobre questões importantes para a pesquisa tanto na formação de professores quanto nas linhas de pesquisa sobre metodologias para o ensino, buscando sempre uma forma de melhorar a prática docente para que se obtenha sucesso na aprendizagem dos alunos.

Para Severino (2002) as pesquisas nos cursos de Pós-Graduação, quaisquer que sejam as distinções que se possam fazer para caracterizar as várias formas de trabalhos científicos,

é preciso afirmar preliminarmente que todos eles têm em comum a necessária procedência de um trabalho de pesquisa e de reflexão que seja pessoal, autônomo, criativo e rigoroso. Trabalho pessoal no sentido em que “qualquer pesquisa, em qualquer nível, exige do pesquisador um envolvimento tal que seu objetivo de investigação passa a fazer parte de sua vida”; a temática deve ser realmente uma problemática vivenciada pelo pesquisador, ela deve lhe dizer respeito. Não, obviamente, num nível puramente sentimental, mas no nível da avaliação, da relevância e da significação dos problemas abordados para o próprio pesquisador, em vista de sua relação com o universo que o envolve (SEVERINO, 2002).

O tema deste trabalho surgiu a partir da minha prática em sala de aula, da minha vivência como docente tanto na educação básica quanto no ensino superior. Mas, então surgem outras questões: outros professores também vivenciam situações pedagógicas similares? Há estudos já publicados sobre este tema?

Na busca por compreender melhor o objeto de nossa pesquisa realizamos primeiramente pesquisa no Catálogo de Teses e Dissertação (CTD) da Capes⁶, utilizando a Plataforma Sucupira⁷. Para isto utilizamos as seguintes palavras-chave: “divisibilidade”, “Teoria dos Números”, “Aritmética”, “Números primos”, “livro didático de matemática”. Na primeira busca, verificamos no banco de teses e dissertações, apenas três teses com títulos que indicavam o objeto do nosso estudo. Pela leitura dos títulos e resumos, selecionamos as três teses para fazer uma primeira análise, as quais serão mencionadas mais adiante.

⁶Disponível em < <https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#/> > Acesso em 02 de fev. 2019.

⁷ Disponível em

<<https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf>> Acesso em 02 de fev. 2019.

Contudo, nos aprofundamos mais na pesquisa e a partir da indicação no Catálogo de teses e dissertações (CTD-CAPEs), através dos títulos, encontramos sessenta e seis dissertações dos Programas de Mestrado em Educação Matemática e Mestrados em Ensino de Matemática, principalmente os do PROFMAT⁸.

Desse modo, elaboramos uma relação das dissertações⁹ que tratavam de divisibilidade, números primos, teoria dos números e teoria da aritmética modular e passamos a procurar por cada exemplar das referidas dissertações que não estavam disponíveis no portal do CTD/CAPEs, desses trabalhos, só não encontramos dois, pois constava a observação de que estes trabalhos foram anteriores à Plataforma Sucupira e, por isso, os exemplares não estavam disponíveis. São trabalhos sobre os Números Primos, um de 1998 (Mestrado em Engenharia de Produção) e outro de 1999 (Mestrado em Matemática Aplicada).

Procuramos nos sites dos respectivos programas, mas não encontramos os exemplares. Apenas o referenciamos aqui por causa da ideia que tínhamos antes de nos aventurarmos por uma pesquisa mais aprofundada de que não havia quase nenhum trabalho publicado sobre números primos, divisibilidade, teoria dos números, antes de 2007.

Essas 66 dissertações estão voltadas para a Educação Básica (Ensino Fundamental dos Anos Finais e Ensino Médio), visto que 84,5% são resultados de pesquisas de professores que atuam na Educação Básica, participantes do PROFMAT.

Para essa pesquisa utilizamos nove categorias (Critérios de divisibilidade; Divisibilidade - Números Primos; Divisibilidade - MDC e MMC; Divisibilidade (outros); Divisibilidade no Ensino Fundamental; Divisibilidade no Ensino Médio; Teoria de Aritmética Modular; Teoria dos Números), conforme Tabela 1, onde procuramos relacionar o quantitativo das dissertações pelo ano de publicação para termos uma ideia da época de publicação desses trabalhos.

⁸ O Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) é um programa de mestrado semipresencial na área de Matemática com oferta nacional. É formado por uma rede de instituições de ensino superior, no contexto da Universidade Aberta do Brasil/Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior (Capes), e coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), com apoio do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (Impa). Disponível em <<http://www.profmatsbm.org.br/dissertacoes/>> Acesso em 02 fev. 2019.

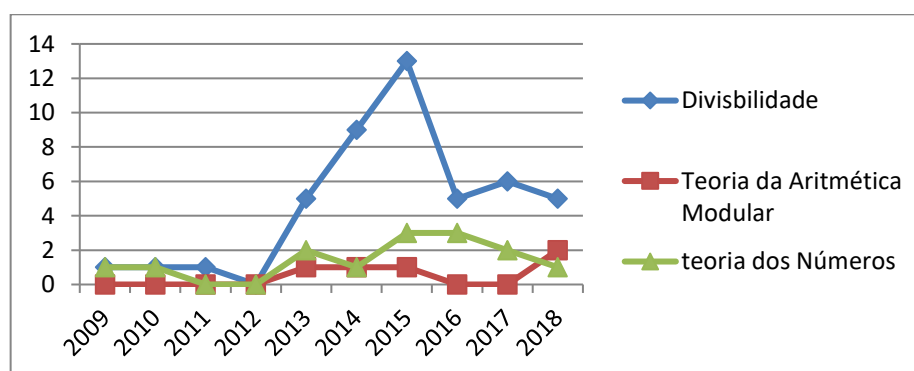
⁹ A relação das 66 dissertações por categorias (Divisibilidade; Números primos e Teoria dos Números) encontra-se no Apêndice A.

Tabela 1: Dissertações sobre divisibilidade e Teoria dos Números

Dissertações de Mestrados Profissionais de Matemática e Educação Matemática no período de 2004 a 2018													
	CATEGORIAS	2004	2009 – 2018										
			09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	T
1	Crítérios de divisibilidade	-	1	-	-	-	-	1	2	-	1	1	06
2	Divisibilidade - Números Primos	-	-	-	-	-	3	6	5	2	2	1	19
3	Divisibilidade - MDC e MMC	-	-	-	-	-	-	1	2	1	1	-	05
4	Divisibilidade (outros)	-	-	-	-	-	1	-	2	1	1	1	06
5	Divisibilidade e congruência	-	-	-	-	-	-	-	1	1	-	2	04
6	Divisibilidade no Ensino Fundamental	-	-	-	1	-	-	-	-	-	1	-	02
7	Divisibilidade no Ensino Médio	-	-	1	-	-	1	1	1	-	-	-	04
8	Teoria de Aritmética Modular	-	-	-	-	-	1	1	1	-	-	2	05
9	Teoria dos Números	1	1	1	-	-	3	1	3	5	2	2	15
	Total de Dissertações	01	02	02	01	00	08	12	17	09	08	07	66

Fonte: Organizada pela autora (2018) a partir dos dados da Plataforma Sucupira (Catálogo de teses e dissertações da Capes).

Para melhor visualização relacionamos as dissertações em apenas três categorias, a partir da Tabela 1. Desse modo, os conteúdos de divisibilidade (itens de 1 a 7), da Tabela 1 constituem uma única categoria: Divisibilidade; a segunda categoria (item 8), Teoria de Aritmética Modular, e a terceira categoria (item 9), Teoria dos Números, como podemos observar na Gráfico 1, a seguir.

Gráfico 1: Dissertações de Divisibilidade, Teoria de Aritmética Modular e Teoria dos Números, Publicadas no Período de 2009 a 2018.

Como pudemos observar no Gráfico 1, há um grande indicativo da produção de estudos sobre “divisibilidade” que abordaram os conteúdos de divisibilidade como múltiplos, divisores, critérios de divisibilidade, números primos, mmc, e mdc, no período de 2012 a 2015 voltados para o ensino de Matemática na Educação Básica.

Identificamos 44 dissertações que têm a palavra divisibilidade nos títulos ou palavras-chave e correspondem a 67,7% do total das dissertações relacionadas.

Os estudos que trazem nos títulos “Teoria dos Números” também são bastante significativos e equivalem a 22,7% do total das dissertações analisadas.

Das dissertações do PROFMAT pudemos observar que surgiu uma nova categoria, a “Teoria de Aritmética Modular”¹⁰ cujos estudos equivalem a 7,6% do total das dissertações e se utilizam dos conteúdos de divisibilidade para a compreensão de Congruência Modular e equações diofantinas, que são os temas principais.

A maioria dos estudos trazidos pelas dissertações dos Mestrados Profissionais de Matemática tem o objetivo de apresentar os conteúdos de Divisibilidade enfatizando sua relevância no ensino fundamental e médio, principalmente por servirem de ferramentas para assuntos mais elaborados como os de congruência modular e equações diofantinas.

Neste levantamento verificamos que nenhum dos trabalhos disponíveis no CTD/Capes havia direcionado seu estudo sobre a verificação da presença dos conteúdos de divisibilidade nos livros didáticos de matemática do 6º ano.

Entretanto, encontramos uma dissertação¹¹ cujo tema nos interessa para análise, pois faz parte da nossa fundamentação teórica. É o estudo de Rúbia Carla Pereira (2016) intitulado “Transposição didática: interações entre o sexto ano do ensino fundamental e a disciplina de teoria dos números em licenciatura matemática sobre o conceito de divisibilidade”, defendido em 2016 pelo Programa de Mestrado em Educação Matemática.

Pereira (2016) analisou o processo de transposição didática da construção do conceito de divisibilidade no ensino fundamental, assim como as inter-relações desta com a disciplina de Teoria dos Números no curso de Licenciatura em Matemática.

Como resultado de seu estudo, quanto à transposição didática, Pereira (2016) conclui que

a análise permitiu identificar os processos de transposição didática na construção do conceito de divisibilidade, tanto na turma de 6º ano do ensino fundamental como na disciplina de Teoria dos Números. Também pontuou alguns problemas no tratamento didático e conceitual gerados pelo afastamento, resultado da *didatização* da Matemática escolar referente à

¹⁰ Essa designação estava nos títulos dos trabalhos e se refere ao estudo Congruência Modular e equações diofantinas.

¹¹ Do Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo. Vitória, 2016.

Matemática científica trabalhada na formação inicial do professor. Ao mesmo tempo, permitiu concluir que a disciplina de Teoria dos Números não fornece o tratamento didático específico para a Matemática da educação básica (PEREIRA, 2016).

Esta conclusão encontra respaldo nos trabalhos realizados nas teses de doutorados que escolhemos para nosso estudo. Essas teses de doutorado em Educação Matemática envolvem estudos em Teoria dos Números e conteúdos de divisibilidade voltados para a formação de professores e também para a Educação Básica, estão relacionadas na Tabela 2.

Nosso estudo trata dos conteúdos de divisibilidade voltados para o ensino fundamental dos anos finais e, embora os conteúdos de divisibilidade estejam contidos num tema maior que é a Teoria dos Números, estão configurados numa outra forma de linguagem matemática diferente da que é usada na educação básica.

Tabela 2: Teses Seleccionadas para análise neste estudo

Teses seleccionadas para análise neste estudo		
Autores	Título da tese	Programa/instituição/ano
RESENDE, Marilene Ribeiro.	Re-significando a disciplina Teoria dos Números na formação do professor de matemática na licenciatura.	(Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2007.
BARBOSA, Gabriela dos Santos.	O Teorema Fundamental da Aritmética: jogos e problemas com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental	(Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2008.
FONSECA, Rubens Vilhena.	Números primos e o Teorema Fundamental da Aritmética: uma investigação entre estudantes de Licenciatura em Matemática	(Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2015.

Fonte: Catálogo de teses e dissertações (CAPES). Elaborada pela autora.

No Brasil, até o presente estudo a Teoria dos Números recebeu atenção somente nestas três teses de doutorado na área da Educação Matemática, mas como tema principal, somente na tese de Marilene Ribeiro Rezende, intitulada “*Re-significando a disciplina de Teoria dos Números na formação do professor de Matemática*” do Programa de Pós-graduação da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, concluída em 2007.

Resende (2007) em sua pesquisa concluiu que a Teoria dos Números tratada na maioria das universidades analisadas não tem a preocupação com a formação dos

professores da escola básica, pois a abordagem dos conteúdos é axiomática, ou seja, numa linguagem predominantemente simbólico-formal, com ênfase nas demonstrações, o que permite enquadrar o seu ensino na tendência formalista clássica.

Na educação básica as referências sobre os conteúdos de divisibilidade estão contidas nos livros didáticos de matemática distribuídos pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), numa linguagem totalmente diferente de como este conteúdo é tratado nos livros de Teoria dos Números (ALENCAR, 1987; HEFEZ, 2011; SANTOS, 2014).

Resende (2007) analisou dez livros de Teoria dos Números mais usados nas universidades brasileiras e observou que os livros nacionais são frutos do esforço de atender à necessidade de circulação de uma literatura científica brasileira, com publicação de obras voltadas para atender ao ensino superior.

Outro estudo publicado logo após o de Resende que segue o mesmo tema, apenas não cita a Teoria dos Números em seu título, é a tese de Gabriela dos Santos Barbosa, intitulada “O Teorema Fundamental da Aritmética: jogos e problema com alunos do sexto ano do Ensino Fundamental”, do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP, 2008).

Em seu estudo Barbosa (2008) teve por objetivo analisar e avaliar uma proposta de ensino centrada nos principais conceitos associados ao Teorema Fundamental da Aritmética (TFA), buscando identificar e compreender os argumentos e os procedimentos utilizados por um grupo de 22 alunos do sexto ano ao trabalharem em um cenário de aprendizagem em que se privilegia a diversificação das situações nas quais tais conceitos estão envolvidos e o uso de várias simbologias que lhe são associadas.

Segundo Barbosa (2008) sua tese foi um desdobramento de um estudo anterior apresentado em sua dissertação¹² intitulada “Construção dos conceitos de múltiplo e divisor à luz da psicologia de Vygotsky”, em que observou que “subjacentes aos conceitos de múltiplo e divisor de um número se iniciou o processo de construção dos conceitos de números primos e números quadrados”. A partir desta pesquisa para

¹² Dissertação de Mestrado apresentada Universidade Santa Úrsula em junho de 2002.

o Mestrado, segundo a autora, sentiu-se motivada a dar continuidade “buscando aprofundar o conhecimento dos alunos sobre múltiplos e divisores”.

Em seu estudo Barbosa (2008) ressalta que fazer o levantamento do material a ser estudado não foi tarefa fácil, pois os números de pesquisa em educação matemática voltada para o ensino e a aprendizagem de conceitos associados à Teoria dos Números é bastante reduzido. Uma das referências para seu estudo foi a tese de Resende (2007).

Barbosa (2008) relata que os trabalhos em educação matemática, analisados, com foco no tema abordado sinalizam a existência de problemas no ensino e na aprendizagem da Aritmética. Este problema de aprendizagem foi comprovado em sua pesquisa, pois, inicialmente foi aplicado um teste diagnóstico no início da intervenção e outro no final.

É importante enfatizar o resultado observado na pesquisa de Barbosa no início de sua intervenção com 22 alunos do sexto ano, pois, como já havíamos mencionado, nos deparamos com resultados similares decorrentes de testes diagnósticos em nossas práticas docentes nas várias turmas de sexto anos. O que mostra que não é somente na Região Norte que ocorre esta dificuldade na aprendizagem do conhecimento matemático nesse período de transição do Ensino Fundamental dos anos iniciais (5º ano) para o Ensino Fundamental anos finais (6º ano).

Segundo Barbosa (2008) na avaliação inicial ficou comprovado que o desempenho médio de todos os alunos foi insatisfatório, pois o nível de conhecimento prévio em relação ao TFA e os principais conceitos associados a ele eram da ordem de 40%, mas no final, teve sucesso.

Em questão que solicitávamos decompor um número em fatores primos, por exemplo, não houve qualquer acerto. Os resultados obtidos na avaliação final indicaram que houve avanço, já que este índice foi elevado para 70%. A diferença entre os índices foi considerada significativa pelo Teste de Tukey, o que nos permitiu inferir sobre a eficácia da intervenção de ensino (BARBOSA, 2008).

Assim, Barbosa em suas considerações finais quanto a dar resposta à questão de pesquisa geral: “Como se dá o processo de construção dos conceitos associados ao TFA?”

Dentro da Teoria Elementar dos Números, enfocamos o Teorema Fundamental da Aritmética e os principais conceitos associados a ele (as relações de “múltiplo” e “fator”, números primos, a divisibilidade e a decomposição em fatores primos). É importante, contudo, esclarecermos que, por mais que tenhamos organizado uma intervenção com etapas bem definidas, a construção dos significados do TFA e dos principais conceitos a ele associados é um processo. [...] não podemos esperar que este processo se dê em uma semana, nem em um mês, nem em um ano. Do nosso ponto de vista, assuntos associados ao TFA precisam ser retomados em vários momentos da vida escolar do estudante, contribuindo para que ele avance no reconhecimento e na generalização das propriedades dos números inteiros (BARBOSA, 2008, p. 249).

Em uma das reflexões apresentada pela pesquisadora sobre a intervenção realizada com base na teoria dos campos conceituais de Vergnaud e já com conhecimentos consolidados a respeito das dificuldades de aprendizagem sobre os conteúdos de divisibilidade apresentadas por outros pesquisadores e, mesmo assim a pesquisadora reconhece:

Conseguimos apenas refletir sobre a simplificação de cálculos. Percebemos que, no senso comum, há a ideia de que só podem ser consideradas aulas aquelas ministradas em um modelo tradicional e, para reverter este quadro, é necessária uma ação conjunta de professores, escolas e pessoas que elaboram materiais didáticos (BARBOSA, 2008, p. 251).

Este estudo nos motivou a prosseguir com nossa pesquisa visto que Barbosa (2008) se reportou ao uso dos livros didáticos dizendo que “nas aulas de Matemática regulares, as crianças acostumaram-se a trabalhar individualmente e, em todos os casos, o material de apoio era apenas o livro didático”.

Isso nos leva a crer que se na maioria dos casos os alunos têm praticamente só o livro didático como apoio para o estudo e as tarefas e, se os conteúdos de divisibilidade forem cada vez mais se tornando ausentes nos livros didáticos, aí mesmo haverá grande prejuízo para a aprendizagem dos alunos.

O terceiro estudo que encontramos relativo aos conteúdos de divisibilidade, e primeira tese em Educação Matemática sobre Números Primos foi de Rubens Vilhena Fonseca, apresentada em 2015 e intitulada “Números Primos e o Teorema Fundamental da Aritmética: Uma investigação entre estudantes de Licenciatura em Matemática”. Este estudo apresenta a seguinte questão de pesquisa: “Quais conhecimentos e dificuldades acerca dos conceitos/propriedades dos números primos e do teorema fundamental da aritmética são evidenciados por licenciandos em Matemática da Universidade do Estado do Pará”?

O estudo de Fonseca (2015) teve por objetivo “analisar uma sequência didática, diretamente ligada à questão de pesquisa e, por meio de uma situação adidática, pretende submeter os estudantes a um percurso investigativo em busca de soluções para os problemas levantados, que estão no domínio da Teoria dos Números, e são relativos aos Números Primos e ao Teorema Fundamental da Aritmética, objetos desta pesquisa, desenvolvida com alunos do curso de licenciatura em matemática da Universidade do Estado do Pará”.

Segundo Fonseca (2015) sua investigação “justifica-se pela escassez de pesquisas relacionadas com a Teoria dos Números na área da Educação Matemática”.

Realmente, até o final de 2015 em nosso país, só haviam duas publicações de teses sobre esse tema: a de Rezende (2007), e no ano seguinte, a tese de Barbosa (2008), mas, a partir de então, surgiram vários estudos com o tema “divisibilidade”, principalmente, dissertações provenientes dos Mestrados Profissionais de Ensino de Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Em suas considerações finais, Fonseca (2015) concluiu que:

Os resultados revelaram a necessidade de um domínio mais amplo dos licenciandos no que se refere às questões relacionadas à compreensão dos temas em tela; especificamente, ficaram evidenciadas dificuldades atinentes ao trabalho com certas representações numéricas de números primos, e, principalmente, em relação aos conceitos de números primos e do teorema fundamental da aritmética.

Os estudos de Rezende (2007), Barbosa (2008) e Fonseca (2015), têm em comum como objeto de estudo – os conteúdos de divisibilidade a partir da Teoria dos Números. Os dois últimos (BARBOSA, 2008; FONSECA, 2015) bem como são trabalhos que buscaram fazer uma intervenção pedagógica em sala de aula, com o objetivo de trabalhar a compreensão dos conceitos envolvendo principalmente o Teorema Fundamental da Aritmética e para isto se utilizaram dos conteúdos de divisibilidade tais como: múltiplos, divisores, números primos. Além disso, os três pesquisadores encontraram suporte nos estudos organizados na obra de Campbell e Zazkis (2002), visto que esses autores trabalharam com professores em formação e realizaram onze pesquisas abordando a Teoria dos Números.

As pesquisas de Campbel e Zazkis (2002) apontam para a necessidade de mudanças no ensino da Teoria dos Números nos cursos de formação de professores (RESENDE, 2007; BARBOSA, 2008; FONSECA, 2015).

Observamos que o tratamento do conhecimento matemático no ensino superior, principalmente, nos cursos de licenciatura de matemática, tem influência direta na prática dos docentes na educação básica. Observamos várias críticas dos pesquisadores em educação matemática a esse respeito. Fiorentini e Oliveira reforçam essa reflexão.

Essas críticas referem-se aos currículos, sobretudo às disciplinas específicas, às metodologias de ensino das aulas, ao distanciamento ou desconexão entre as práticas de formação e as práticas de ensinar e aprender na escola básica, à falta de diálogo ou inter-relação entre as disciplinas específicas e as de formação *didático-pedagógica*, ao isolamento do estágio, entre outras (FIORENTINI; OLIVEIRA, 2013).

Esta reflexão nos levou a questionar sobre que teoria ou metodologia o professor de matemática deveria se basear para que essa situação fosse modificada, ou seja, que durante a formação inicial o futuro professor tivesse essa percepção sobre os tipos de saberes e pudesse se preparar para fazer a transição do conhecimento científico trabalhado na universidade para a sua prática docente na escola.

E além, disso também nos ocorreu que essa mesma situação é verificada nos livros didáticos com relação a alguns conteúdos matemáticos, como é o caso de divisibilidade. Nos livros didáticos do ensino superior os conteúdos estão postos numa linguagem formal e simbólica envolvendo a Álgebra, com base nos números inteiros (RESENDE, 2007; BARBOSA, 2008; FONSECA, 2015).

Entretanto, estes conteúdos (critérios de divisibilidade, múltiplos e divisores, números primos e números compostos, mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum) são apresentados na educação básica numa linguagem diferente, mas compreensível e com base nos números naturais, mesmo porque, na época em que é previsto que esse conhecimento seja apresentado aos alunos do sexto ano, ainda não se apresentaram as noções algébricas básicas.

Além de pesquisar no Catálogo de teses e dissertações da Capes e dos Programas de Pós-Graduação de Educação Matemática e Educação em Ensino de Ciências e Matemática, pesquisamos nos principais eventos e periódicos de

Educação Matemática do país. Para tanto dividimos essa pesquisa em três categorias principais: (1) Conteúdos de Divisibilidade; Números Primos e Teoria dos Números; (2) Análise de livros didáticos de matemática que tratam de divisibilidade no sexto ano; (3) Documentos oficiais do Ensino Fundamental dos anos finais.

O Fórum Nacional de Licenciaturas em Matemática (FNLM)¹³ é um evento promovido pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) e coordenado pelo Grupo de Trabalho de Formação de Professores e Ensino em Matemática (GT) da SBEM. Este evento tem como objetivos: debater a formação de professores nos cursos de Licenciatura em Matemática; refletir sobre políticas e práticas de formação de professores; debater as temáticas sugeridas pelos fóruns estaduais, bem como formular e comunicar propostas junto ao Ministério da Educação e à sociedade.

O V Fórum realizado em 2014 tem como objetivo promover discussões sobre os problemas e desafios contemporâneos para os cursos de formação inicial de professores de Matemática. Este Fórum estava constituído por 5 (cinco) Grupos de Discussão (GD): GDI: perfil docente; GDII: Material didático; GDIII: Prática de ensino; GDIV: Estágio supervisionado; e GDV: Profissionalização docente.

Nesses cinco Grupos de Discussão, foram apresentados 48 trabalhos e seus resumos disponibilizados nos Anais e o GDIII: “Prática de ensino: articulações possíveis entre as disciplinas que compõem a matriz curricular”; pareceu-me relevante para pesquisar artigos que pudessem tratar de nossa temática de pesquisa, mas não encontramos nenhum artigo que tratasse do ensino de divisibilidade ou do uso do livro didático de matemática.

Também investigamos as publicações XII Encontros Nacionais de Educação Matemática (ENEM)¹⁴, por ser um dos eventos relevante para a Educação Matemática brasileira.

¹³ Os eventos do FNLM iniciaram no ano de 2004 com o primeiro Fórum realizado na Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP) com o tema “Currículos de Matemática para a Educação Básica no Brasil e a formação de professores de Matemática” e contou com a participação de 120 associados. Os demais Fóruns aconteceram nos seguintes anos: II Fórum em 2007 teve por objetivo avaliar e debater, entre as comunidades acadêmicas, as políticas de implementação dos cursos de Licenciatura em matemática; o III Fórum foi realizado em 2009, e seu objetivo foi debater a formação de professores nos Institutos Federais de Ciência, Educação e Tecnologia IFTs e EAD; o IV Fórum aconteceu no ano de 2011 com a temática “Os (Des)Caminhos da Licenciatura em Matemática no Brasil”.

¹⁴ O primeiro encontro teve sua origem na década de 1980 quando diversos grupos constituídos por professores, estudantes e pesquisadores no país, promoveram debates e discussões, preocupados com questões referentes à Educação Matemática. Essa preocupação motivou a realização do I Encontro Nacional de Educação Matemática - ENEM, na PUC/SP em 1987. No ano seguinte, em 1988, realizou-se o II ENEM, na cidade de Maringá/PR, culminando na fundação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática - SBEM. A partir de sua fundação, a SBEM passou a organizar os encontros

O XII ENEM realizado na cidade de São Paulo no período de 13 a 16 de julho de 2016 abordou o tema "A Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades". Este evento teve como proposta colocar em discussão as novas temáticas e tendências que perpassam a Educação Matemática seja como campo profissional, seja como campo de pesquisa.

Como este é um evento que teve grande participação de pesquisadores da Educação Matemática decidimos investigar as publicações do XII Encontro Nacional de Educação Matemática ocorrido em 2016, e contou com 953 Comunicações Científicas, abordando diversos temas da Educação Matemática.

Do total de trabalhos apresentados no XII ENEM, encontramos apenas 26 artigos que atendem às duas das categorias principais: análise de livros didáticos de matemática e estudos sobre o currículo de matemática na educação básica, o que corresponde a 2,73% dos trabalhos publicados. Ressaltamos que não encontramos nenhum estudo referente aos conteúdos de divisibilidade.

Os dados completos referentes aos 26 artigos dos Anais do XII ENEM que tem alguma similaridade com nossos estudos encontram-se na Tabela 3.

Tabela 3: Trabalhos publicados nos Anais do XII ENEM (2016) por categorias.

Artigos publicados nos Anais do XII ENEM (2016)							
Comunicações científicas		Educação Básica					
CATEGORIAS	EFAI	%	EFAF	%	EM	%	Total
1 Conteúdos de Divisibilidade	0	0	0	0	0	0	0
2 Análise de livros didáticos de matemática: conteúdos de divisibilidade	0	0	0	0	0	0	0
3 Análise de livros didáticos de matemática - Outros objetos de conhecimento	8	30,8%	6	23%	8	30,8%	22
4 Currículo de matemática (PCN e BNCC)	1	3,9%	2	7,6	1	3,9	4
Total	4	34,7	8	30,6	9	34,7	26

Legenda: EFAI (Ensino Fundamental anos iniciais), EFAF (Ensino Fundamental anos finais), EM (Ensino Médio).

Fonte: elaborado pela autora a partir dos Anais do XII ENEM (2016)

nacionais, dessa forma, até o ano 1995, esses encontros aconteceram bianualmente e após essa data, passou a ser trianual. Sequencialmente a história dos ENEM foi sendo construída: em 1990 o III ENEM ocorreu em Natal/RN, o IV ENEM aconteceu em Blumenau/SC em 1993, o V ENEM em Aracajú/SE em 1995, o VI ENEM em São Leopoldo/RS em 1998, o VII ENEM no Rio de Janeiro/RJ, em 2001, o VIII ENEM aconteceu em Recife/PE em 2004, o IX ENEM em Belo Horizonte/MG em 2007, o X ENEM ocorreu em Salvador/BA em 2010 e o XI ENEM em Curitiba/PR em 2013.

Conforme podemos observar na Tabela 3, os trabalhos publicados de acordo com a categoria “análise de livros didáticos de matemática – outros objetos de conhecimento” que dizem respeito ao nível fundamental anos finais são somente 6 (seis) e tratam dos seguintes temas: número Pi e a História da Matemática; lacunas no ensino de álgebra; a grandeza área no LDM do 9º ano; identificando elementos de aritmética, geometria e desenho em LDM; trigonometria (dois trabalhos); jogos nos LDM do 7º ano. Todos os estudos usaram a abordagem qualitativa, bibliográfica e documental e metade dos estudos se fundamentaram na Teoria Antropológica do Didático.

Também recorremos a dois periódicos de Educação Matemática, com Qualis A1 e A2 segundo os critérios da Capes: Bolema e Zetetiké, respectivamente. O Boletim de Educação Matemática (Bolema)¹⁵ é uma das mais antigas e importantes publicações na área da Educação Matemática no Brasil e tem por objetivo disseminar a produção na região de inquérito denominada Educação Matemática ou áreas afins.

Pesquisamos os volumes de publicação on-line de 2012 (V.26 nº 42A) até o ano de 2018 (V.32 nº 62)¹⁶ e não encontramos nenhum artigo sobre divisibilidade ou qualquer dos conteúdos de divisibilidade, conforme podemos observar na Tabela 4.

Tabela 4: Publicações do Bolema no Período de 2012 a 2018

Publicações do Bolema – Período de 2012 a 2018					
V.	Nº do Boletim	Ano	Período de publicação	Quantidade de artigos	Artigos encontrados
32	60, 61 e 62	2018	Jan./abr.; ago.; dez.	58	01 – 1,7%
31	57, 58 e 59	2017	Jan./abr.; ago.; dez.	54	01 – 1,8%
30	54, 55 e 56	2016	Jan/abr.; Mai./ago Set./dez.	63	0
29	51, 52 e 53	2015	Abr.; ago.;dez.	63	0
28	48, 49 e 50	2014	Abr.; ago.;dez.	75	02 – 2,7%
27	45, 46 e 47	2013	Abr; ago.;dez.	53	03 – 5,7%
26	42A, 42B, 43 e 44	2012	Abri; ago.; dez.	55	0
Total				421	07 – 1,7%

Fonte: elaborada pela autora a partir dos boletins do Bolema disponíveis (on-line).

¹⁵ Criado em 1985, o **BOLEMA** nasceu da iniciativa de um grupo de pós-graduandos do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da UNESP de Rio Claro – o primeiro centro de estudos pós-graduados nessa área, na América Latina. Classificado pela CAPES como Qualis A1.

¹⁶ Disponível em <http://www.scielo.br/pdf/bolema_> acesso em 3 mar. de 2019.

O resultado da pesquisa realizada no Boletim Bolema on-line aponta que neste repositório Qualis A1, ainda há pouquíssima publicação referente análise de livros didáticos de matemática. Encontramos apenas sete artigos que equivale a 1,7% do total de artigos (421) publicados no período de 2012 a 2018. Contudo, nenhum artigo diz respeito ao nosso tema principal – conteúdos de divisibilidade nos livros didáticos de matemática do 6º ano.

Organizamos os dados quantitativos dos artigos encontrados, por categorias: Conteúdos de divisibilidade; Análise de livros didáticos de matemática – conteúdos de divisibilidade; Teoria dos Números; Análise de livros didáticos de matemática - Outros objetos de conhecimento; Currículo de matemática (PCN e BNCC); Transposição didática da Teoria dos Números para divisibilidade (EFAF), distribuídos nos níveis de ensinos: Fundamental dos anos finais, Médio e Ensino Superior, conforme podemos observar na tabela 5.

Tabela 5: Trabalhos Publicados no Bolema *on-line* de 2012 a 2018 por Categorias.

Artigos publicados no BOLEMA – Período de 2012 A 2018								
	Categorias	EFAF	%	EM	%	ES	%	Total
1	Conteúdos de Divisibilidade na Educação Básica	0	0	0	0	0	0	0
2	Análise de livros didáticos de matemática: conteúdos de divisibilidade	0	0	0	0	0	0	0
3	Teoria dos números (disciplina)	0	0	0	0	01	0,24	01
4	Análise de livros didáticos de matemática - Outros objetos de conhecimento	0	0	0	0	01	0,24	01
5	Currículo de matemática (PCN e BNCC)	01	0,24	0	0	03	0,7	04
6	Transposição didática da Teoria dos Números para divisibilidade (EFAF)	01	0,24	0	0	0	0	01
	Total	02	0,48	0	0	05	1,18	07

Legenda: EFAF (Ensino Fundamental dos Anos Finais), EM (Ensino Médio) e ES (Ensino Superior).
 Fonte: elaborado pela autora a partir dos volumes do Bolema on-line (2012-2018).

De acordo com a categoria “análise de livros didáticos de matemática – outros objetos de conhecimento” havia apenas um artigo¹⁷ de Floriano Viseu e José Carlos Morgado, intitulado “Os Manuais Escolares na Gestão do Currículo de Matemática: que papel para o professor?” O estudo teve por objetivo “averiguar de que modo o

¹⁷ Publicado no Boletim on-line Bolema Vol. 32 nº 62, Rio Claro. Dez./2018. <
<http://www.scielo.br/pdf/bolema/v32n62/1980-4415-bolema-32-62-000i.pdf> > acesso em 3 mar/2019.

manual escolar é utilizado pelos professores de Matemática, procurando inferir se o utilizam como mero auxiliar didático ou se determina muito do trabalho que é realizado na e para a sala de aula”.

Para Viseu e Morgado (2018) o livro didático é concebido como

forma de saber, como veículo de circulação legítima do saber e como meio de acesso ao saber, o manual escolar configura-se como um recurso didático-pedagógico e, em simultâneo, como um instrumento político-ideológico. Por isso, qualquer seleção cultural não pode ignorar as dimensões de natureza ideológica e política que lhe estão subjacentes, o que reforça a natureza ética e política do próprio ato educativo.

Participaram neste estudo nove professores que lecionavam em turmas do 9.º e do 12.º ano de escolaridade das ESA e ESB. A opção por circunscrever o estudo a esses anos de escolaridade resultou do fato de serem anos terminais do Ensino Básico e do Ensino Secundário e, por essa razão, estarem sujeitos a exame nacional.

Os autores concluíram com a pesquisa que a maioria dos professores não recorre, com a frequência que seria desejável, a outros materiais didáticos, o que, para além de indiciar uma certa dependência do manual escolar, pode contribuir para a sua progressiva desprofissionalização (VISEU e MORGADO, 2018).

Na categoria “Currículo de matemática (PCN e BNCC)” encontramos um artigo¹⁸ sobre a BNCC, de Antônio Henrique Pinto, intitulado “A Base Nacional Comum Curricular e o ensino de Matemática: flexibilização ou engessamento do currículo escolar”. Este estudo teve por objetivo compreender o processo de elaboração da proposta que deverá se constituir como a base curricular do Ensino de Matemática nas escolas brasileiras.

Pinto (2017) nas suas considerações finais sobre este estudo evidenciou a existência de uma lacuna entre a proposta da Base Nacional e as práticas em Educação Matemática, atualmente presentes no currículo, como a Etnomatemática e a História da Matemática, duas abordagens teóricas e metodológicas que têm fecundado o ensino de Matemática na Escola Básica.

Ainda na categoria “Currículo de matemática (PCN e BNCC)”, encontramos três artigos sobre “o lugar da matemática” que apresentamos a seguir: (1) “O lugar da

¹⁸ Publicado no Bolema on-line Vol.31 59, Rio Claro. Dez./2017. Disponível <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_issuetoc&pid=0103-636X20170003&lng=pt&nrm=iso> acesso em 03 mar/2019.

Matemática escolar na Licenciatura em Matemática” de Wagner Rodrigues Valente (2013); (2) “O lugar das Matemáticas na Licenciatura em Matemática: que Matemáticas Formativas?”, de Dario Fiorentini e Ana Teresa de Carvalho Corrêa de Oliveira; e (3) “O lugar da Matemática na Licenciatura em Matemática” de Plínio Cavalcante Moreira e Ana Cristina Ferreira, neste último artigo, os autores fazem uma análise dos dois primeiros artigos e de mais dois com o mesmo tema. Estes três artigos são importantes para o nosso estudo porque enfocam a problemática do saber matemático propostos para as licenciaturas de matemática com perspectivas de aplicação na educação básica.

Por algum tempo, a preparação para o trabalho de professor de matemática na escola foi concebida em termos de uma soma de conhecimento da matéria (i.e., matemática) com conhecimento acerca do ensino, visto como transmissão de conhecimentos a outros. Nessa perspectiva, a licenciatura (curso que forma e licencia para o exercício da docência escolar) oferecia, fundamentalmente, ao futuro professor, conhecimentos relativos à disciplina (matemática) e conhecimentos relativos às técnicas gerais de ensino (didática) (MOREIRA e FERREIRA, 2013).

Valente (2013) focaliza especificamente a educação matemática escolar, defendendo “a necessidade de os cursos de licenciatura em Matemática reservar um lugar no currículo para a abordagem da matemática da escola básica numa perspectiva histórica”.

Para Fiorentini e Oliveira (2013) os cursos de licenciatura em geral – e não apenas os de matemática – têm sido alvo de inúmeras críticas, tanto da parte de pesquisadores como de professores formadores, de egressos e do próprio licenciando. Essas críticas referem-se aos currículos, sobretudo às disciplinas específicas, às metodologias de ensino das aulas, ao distanciamento ou desconexão entre as práticas de formação e as práticas de ensinar e aprender na escola básica.

Reservamos um espaço neste estudo para tratar desse tema quando abordamos sobre a Transposição dos saberes da Teoria dos Números que são tratados no Ensino superior e como são tratados na educação básica, especificamente sobre os conteúdos de divisibilidade no Ensino Fundamental dos Anos Finais.

Segundo Moreira e Ferreira (2013) da análise sobre os dois artigos “do lugar da matemática...” de Valente e Fiorentini afirmam que nos textos apresentados com este tema “percebe-se claramente uma mobilização no sentido de se repensar a formação do professor de matemática, mais especificamente, sua formação

matemática, à luz das demandas próprias dessa profissão, isto é, a partir do reconhecimento de uma identidade profissional do professor de matemática”.

Também investigamos as publicações da Revista Zetetiké (on-line)¹⁹ no período de 2010 a 2018. Os artigos publicados totalizam 194 no período de 2009 a 2018 e, destes, somente quatro artigos referem-se de forma indireta a temas pertinentes ao nosso estudo, equivale a 2,1% dos artigos publicados e não há nenhum a respeito de divisibilidade ou qualquer conteúdo de divisibilidade, conforme Tabela 6.

Tabela 6: Dados Quantitativos das Publicações da Revista Zetetiké no Período de 2010 a 2018

Publicações da Revista ZETETIKÉ – Período 2010 a 2018					
V.	Nº do boletim	ANO	Período de publicação	Quantidade de artigos	Artigos encontrados
26	1,2 e 3	2018	Jan./abr.; mai./ago.; set./dez.	30	0
25	1, 2 e 3	2017	Jan./abr.; mai./ago.; set./dez.	28	02 – 7,1%
24	1, 2 e 3	2016	Jan./jun.; jul./dez.	18	0
23	1 e 2	2015	Jan./jun.; jul./dez.	19	0
22	1 e 2	2014	Jan./jun.; jul./dez.	11	0
21	1 e 2	2013	Jan./jun.; jul./dez.	13	01 – 7,7%
20	1 e 2	2012	Jan./jun.; jul./dez.	13	0
19	1 e 2	2011	Jan./jun.; jul./dez.	10	0
18	1 e 2	2010	Jan./jun.; jul./dez.	39	0
17	1 e 2	2009	Jan./jun.; jul./dez.	13	01 – 7,7%
Total				194	04 – 2,1 %

Fonte: Elaborada pela autora a partir da Revista Zetetiké (on-line)

Os artigos que selecionamos encaixam-se na categoria “Análise de livros didáticos de matemática - Outros objetos de conhecimento”: (1) “Livro didático e educação matemática uma história inseparável”, de Wagner Rodrigues Valente (2009); (2) “Adoção, avaliação e circulação de livros didáticos de matemática do século XIX, de Flávia Soares dos Santos (2013); (3) “Dos livros didáticos para o caderno de Matemática: a emergência dos saberes profissionais”, de Wagner Rodrigues Valente (2017). O quarto artigo atende à categoria “ A Teoria Antropológica

¹⁹ Qualis A2 – disponível em:

<<https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646950>> Acesso em 02 fev. 2019.

do didático para análise de LDM”: (4) A Teoria Antropológica do Didático como ferramenta metodológica para análise de livros didáticos”, de Marilena Bittar (2017).

Também nesse periódico não encontramos nenhum artigo sobre divisibilidade ou qualquer dos conteúdos de divisibilidade ou de análise de livro didático de matemática com esse tema.

Considerando o acima exposto e após muitos estudos sobre as várias teorias a que os pesquisadores da educação matemática têm recorrido para seus estudos, tais como Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD), das Situações Didáticas (BROSSEAU), Semiótica (PEIRCE), Teoria da Aprendizagem Significativa (AUSUBEL), Teoria Antropológica do Didático (CHEVALLARD). Chegamos à conclusão que a Transposição Didática abordada por Ives Chevallard poderia nos possibilita um melhor suporte para a compreensão das situações que ocorrem envolvendo os conteúdos de divisibilidade no processo de ensino e aprendizagem tendo como recurso didático o livro didático.

Ao tomar conhecimento dos estudos referentes aos conteúdos de divisibilidade percebemos que os professores da educação básica estão preocupados com a aprendizagem dos conteúdos de divisibilidade e sugerem que esses conteúdos sejam trabalhados no ensino médio, pois consideram que são ferramentas importantes e necessárias para a compreensão de outros estudos da Aritmética e da Álgebra, como por exemplo, o estudo de congruência modular e equações diofantinas.

Além disso, dentre os estudos que analisamos não havia nenhum que tivesse o mesmo enfoque que o estudo que nos propomos realizar. Mas, a maioria desses estudos, com abordagem para a pesquisa de uma intervenção pedagógica em sala de aula, mostra em sua conclusão que os alunos, inicialmente apresentam muita dificuldade em tratar com os conteúdos de divisibilidade.

Surge então, a preocupação com a presença dos conteúdos de divisibilidade nos livros didáticos de matemática, por serem muitas das vezes, o único apoio pedagógico que alunos e professores têm para que o processo de ensino e aprendizagem se concretize no contexto escolar.

Com base no exposto formulamos como tese inicial que realmente há, em algum período do contexto educacional brasileiro e em algum livro didático selecionado pelo PNLD e escolhido pelas escolas públicas, bem como nos documentos curriculares da Educação Básica brasileira, uma redução expressiva dos conteúdos de divisibilidade.

A fim de confirmar esta tese empreendemos este estudo, notadamente de cunho histórico sobre os documentos curriculares brasileiros e livros didáticos de matemática do sexto ano. Desse modo, fizemos uso de aportes teóricos referenciados da História da Educação Matemática brasileira através de Maria Ângela Miorim (1998), Wagner Valente (2000, 2014), Dário Fiorentini (1995, 2000) e, como tratamos de conteúdos de uma disciplina escolar – a Matemática – utilizamos os estudos do pesquisador André Chervel (1990), com base em seu texto “História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa”, por pretendermos também identificar os conteúdos de divisibilidade nos programas de ensino de matemática, ou seja, nos documentos oficiais (leis, parâmetros curriculares, propostas curriculares e planos de ensino). Para o estudo dos livros didáticos nos fundamentamos no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) através dos Guias dos Livros Didáticos.

Este estudo trata-se de uma pesquisa qualitativa, histórica e documental que pretende como objetivo geral *analisar a presença dos conteúdos de divisibilidade (múltiplos e divisores dos números naturais, critérios de divisibilidade, números primos e números compostos, mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum) nos livros didáticos de matemática do 6º ano e nos documentos curriculares do Ensino Fundamental dos Anos Finais a fim de constatar se há alguma redução expressiva desses conteúdos*. Para isso definimos como objetivos específicos:

- Analisar os períodos do ensino de matemática brasileiros que são relevantes para se verificar a presença dos conteúdos de divisibilidade para comparar com o período de abrangência do PNLD 2017?
- Identificar os livros didáticos de matemática do 6º ano do ensino fundamental dos anos finais que serão selecionados para se verificar a presença dos conteúdos de divisibilidade *(múltiplos e divisores dos números naturais, critérios de divisibilidade, números primos e números compostos, máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum)*.
- Verificar se houve alguma redução expressiva dos conteúdos de divisibilidade *(múltiplos, divisores dos números naturais, critérios de divisibilidade, números primos e números compostos, máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum)* em livros didáticos de matemática dos 6º anos do PNLD/2014 e 2017.

- Averiguar nos documentos curriculares de estados brasileiros, Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática e BNCC (2017) do Ensino Fundamental a presença dos conteúdos de divisibilidade (*múltiplos e divisores dos números naturais, critérios de divisibilidade, números primos e números compostos, máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum*).

Com o intuito de atender a estes objetivos, organizamos o texto da tese em seis capítulos. Iniciamos pela Introdução seguida do capítulo 1: O ensino de Matemática no Brasil – apresenta considerações sobre as tendências de ensino da Matemática, faz-se um breve percurso pelas reformas do ensino de Matemática, bem como pelo Movimento da Matemática Moderna; a Matemática nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática e na BNCC do Ensino Fundamental.

O Capítulo 2 – Transposição didática do saber científico para o saber escolar – apresenta a fundamentação na transposição didática concebida por Ives Chevallard e como alguns pesquisadores se utilizaram deste aporte teórico em seus estudos. Optamos por este conceito por entender que o mesmo irá contribuir para esclarecer o contexto do estudo dos conteúdos de divisibilidade que derivam de um conhecimento científico para serem trabalhados no contexto escolar. Neste capítulo apresentamos a Divisibilidade enquanto saber científico na Teoria dos Números a partir do livro “Introdução à Teoria dos Números” de José Plínio de Oliveira Santos (2014).

O Capítulo 3 – trata da configuração e aspectos metodológicos em que apresentamos o percurso, as estratégias, os instrumentos de dados e as categorias para a análise dos livros didáticos de matemática.

No capítulo 4 – Análise dos documentos oficiais, programas curriculares e planos de ensino referência aos conteúdos de divisibilidade do 6º ano do Ensino Fundamental dos Anos Finais. Este capítulo está dividido em quatro partes: a primeira é denominada “Análise dos Parâmetros Curriculares Nacionais” de Matemática do Ensino Fundamental; na segunda, analisamos a BNCC do Ensino Fundamental; na terceira, analisamos seis documentos curriculares dos Estados de: Minas Gerais, Paraná, Pernambuco, Rio de Janeiro Roraima e São Paulo. A quarta e última parte é denominada “Análise dos planos de ensino”, em que analisamos os planos de ensino de três escolas estaduais da capital do estado de Roraima a fim de verificar a presença dos conteúdos de divisibilidade e comparar esses conteúdos com os conteúdos de

divisibilidade contemplados pelos livros didáticos de matemática escolhidos para essas mesmas escolas.

O capítulo 5 – Os livros didáticos de matemática, apresenta um breve resumo do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), no qual enfatizamos alguns pontos, tais como, a distribuição dos livros e a quantidade distribuída dos livros de matemática para o Ensino Fundamental anos finais, bem como a avaliação desses livros pelos especialistas para sua seleção no PNLD. Também informamos sobre os livros didáticos de matemática mais escolhidos pelos professores brasileiros nos dois últimos PNLD-2014 e PNLD-2017, bem como pelos professores das escolas públicas estaduais do Ensino Fundamental dos Anos Finais de Boa Vista (RR).

O Capítulo 6 – Análise dos livros didáticos de matemática – apresenta a análise dos 27 livros didáticos de matemática da 5ª série/6º ano selecionados. Separamos a análise por períodos aos quais denominamos de Fase 1, Fase 2 e Fase 3. A Fase 1, compreende o período de 1926 a 1979, para a qual selecionamos cinco livros para a análise; a Fase 2 foi dividida em duas partes, a Parte 1 compreende o período de 1980 a 2010 (tem oito livros selecionados) e a Parte 2 compreende o PNLD-2014 (triênio de 2014-2015-2016), com seis livros selecionados, dentre os mais escolhidos pelos professores brasileiros deste PNLD. A Fase 3 compreende o PNLD-2017 (triênio de 2017-2018-2019) na qual selecionamos oito livros, dentre os mais escolhidos pelos professores brasileiros para este PNLD.

Acreditamos que este estudo aponta algumas variações na organização e distribuição dos conteúdos de divisibilidade nos 27 livros didáticos de matemática da 5ª série/6º ano selecionados, bem como a redução desses conteúdos, e é isto que vamos verificar na busca que empreendemos com este estudo.

CAPÍTULO 1

O ENSINO DE MATEMÁTICA

A matemática é um conhecimento inerente à vida humana, tem se desenvolvido desde os tempos em que o homem começou a caminhar pela Terra. O conhecimento matemático surgiu devido às necessidades que o ser humano sentiu ao longo do tempo de progredir, de conhecer, de desvendar os segredos da natureza e de expandir seu domínio a outras nações.

Nas duas últimas décadas os educadores matemáticos mostraram-se muito preocupados com a dificuldade de aprendizagem da matemática pelos alunos da Educação Básica brasileira, realidade apontada todos os anos pelas avaliações nacionais. Por isso, em seus estudos procuram enfatizar a importância de uma matemática mais contextualizada, que dê significado ao seu estudo, ou seja, que a matemática seja colocada em prática pelos alunos no seu cotidiano, visando com isso que os alunos possam sentir mais interesse e dedicação nos estudos do conhecimento matemático e consigam sucesso em sua aprendizagem.

Contudo, na Disciplina de Matemática escolar há conteúdos e práticas de cálculos que nem sempre é possível de contextualização para a realidade do aluno. Desse modo, a matemática proposta no currículo escolar tem sua importância enfatizada além da aplicação prática no cotidiano e, nesse sentido, o conhecimento matemático é cumulativo, o que se aprende no 6º ano serve de base para o 7º ano e assim sucessivamente.

A Matemática pode ser concebida como uma fonte de modelos para os fenômenos nas mais diversas áreas do saber. Tais modelos são construções abstratas que se constituem em instrumentos para ajudar na compreensão desses fenômenos. Modelos matemáticos incluem conceitos, relações entre conceitos, procedimentos e representações simbólicas que, em um processo contínuo, passam de instrumentos na resolução de problemas a objetos próprios de conhecimento. Não

se pode esquecer que as atividades matemáticas geraram, ao longo da história, um corpo de saber – a Matemática – que é um campo científico bastante extenso, diversificado e em intenso desenvolvimento ainda hoje. Esse saber não é um repertório de conhecimentos antigos e cristalizados, mas sim um conjunto de ideias e procedimentos extremamente poderosos (BRASIL, 2016, p. 7).

O ensino de Matemática é muito importante para o desenvolvimento cognitivo e social do cidadão. Tanto no ensino através dos professores como através dos livros didáticos.

Para Freitas (2015) a constatação da sua importância apoia-se no fato de que a Matemática desempenha papel decisivo, pois permite resolver problemas da vida cotidiana, tem muitas aplicações no mundo do trabalho e funciona como instrumento essencial para a construção de conhecimentos em outras áreas curriculares.

Em muitos estudos desenvolvidos por pesquisadores da educação matemática há um consenso defendido que ensinar Matemática não se reduz à transmissão de informações sobre o saber acumulado ao longo do tempo. Entretanto, em nosso país o ensino de matemática passou por várias transformações, algumas influenciadas pelos fatores políticos e sociais, mas sempre houve pessoas defendendo uma matemática mais acessível para qualquer aluno e não para uns poucos. Essas transformações no ensino foram identificadas por concepções, de acordo com Fiorentini (1995).

1.1 AS CONCEPÇÕES DO ENSINO DE MATEMÁTICA NO BRASIL

As concepções sobre o ensino de matemática não é algo simples de se apresentar. Segundo Fiorentini (1995) por trás de cada modo de ensinar, esconde-se uma particular concepção de aprendizagem, de ensino de Matemática e de educação. O modo de ensinar sofre influência também dos valores e das finalidades que o professor atribui ao ensino de matemática, da forma como concebe a relação professor-aluno e, além disso, da visão que tem do mundo, de sociedade e do homem.

Para Fiorentini (1995) há diferentes modos de conceber e ver a questão da qualidade do ensino de Matemática, por exemplo, alguns podem relacioná-la ao nível de rigor e formalização dos conteúdos matemáticos trabalhados na escola.

O estudo de Fiorentini, publicado em 1995 apresenta seis tendências pedagógicas do ensino da matemática, escolhidas com base nas seguintes categorias

descritivas das tendências em Educação Matemática: a concepção de Matemática; a crença de como se dá o processo de obtenção/produção/descoberta do conhecimento matemático; as finalidades e os valores atribuídos ao ensino da Matemática; a concepção de ensino; a concepção de aprendizagem; a cosmovisão subjacente; a relação professor-aluno e, sobretudo, a perspectiva de estudo/pesquisa com vistas à melhor melhoria do ensino da Matemática.

Estas seis tendências: a formalista clássica; a empírica ativista; a formalista moderna; a tecnicista e suas variações; a construtivista e a sócioetnoculturalista (FIORENTINI, 1995)²⁰, influenciaram o modo de se ensinar matemática e, muitas vezes essas tendências coexistem no ideário dos professores.

1.1.1 A influência das Tendências do Ensino de Matemática nos Livros Didáticos

As concepções de ensino da Matemática influenciaram a elaboração e produção de livros didáticos de matemática em distintas épocas, sendo que umas mais que outras. Faremos um breve percurso a fim de perceber como essas tendências influenciaram os livros didáticos de matemática.

Havia, mais remotamente, especialmente no final do século passado e no início deste, uma preocupação fundamentalista: tudo deveria ser justificado e argumentado, ou melhor, demonstrado logicamente (FIORENTINI, 1995).

Os livros didáticos de matemática brasileiros anteriores à década de 50, como mostram Imenes (1989) e Miguel, Fiorentini & Miorim (1992) apud Fiorentini (1995), parecem reproduzir implicitamente o modelo euclidiano, pois geralmente partem de elementos primitivos e definições para prosseguir com a teoria (teoremas e demonstrações). Só após esta apresentação completa é que aparecem os exercícios de aplicação (FIORENTINI, 1995).

Quanto à análise sobre a relação conteúdo-forma na tendência formalista clássica, Miguel (1996, p. 160) apud Fiorentini (1995) conclui que:

Foi com a concepção platônica da finalidade atribuída à educação matemática que apareceu, pela primeira vez na história dessa área de conhecimento, um primeiro modo de ruptura entre a forma e o conteúdo

²⁰ FIORENTINI, Dário. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. Zetetiké, Campinas, Ano 3 – nº 4, 1995. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646877/15035>. Acesso em: 06 nov. 2017.

matemático, sendo a ênfase posta sobre o primeiro elemento desse par tensional. A ênfase na forma, no sentido de ênfase no método aristotélico-euclidiano de se reproduzir o conteúdo matemático já produzido de outra forma, foi a razão do aparecimento histórico do primeiro tipo de formalismo em educação matemática (MIGUEL, 1993, p. 160).

Didaticamente, segundo Fiorentini (1995), o ensino de matemática na *Tendência Formalista Clássica* foi acentuadamente livresco e centrado no professor e no seu papel de transmissor e expositor do conteúdo através de preleções ou de desenvolvimento teórico na lousa. A aprendizagem do aluno era considerada passiva e consistia na memorização e na reprodução (imitação/repetição) precisa dos raciocínios e procedimentos ditados pelo professor ou pelos livros.

Fiorentini (1995) enfatiza que a *Tendência Empírico-Ativista*²¹, no Brasil, contribuiu não somente para unificar a Matemática em uma única disciplina, mas também para formular as diretrizes metodológicas do ensino da Matemática da Reforma Francisco Campos (1931). Além disso, favoreceu o surgimento de livros didáticos com figuras ou desenhos sob uma abordagem mais pragmática.

A educação matemática brasileira após 1950 passaria por um período de intensa mobilização em virtude da realização dos cinco Congressos Brasileiros de Ensino de Matemática (1955, 1957, 1959, 1961 e 1966) e do engajamento de um grande número de matemáticos e professores brasileiros no movimento internacional de reformulação e modernização do currículo escolar, que ficou sendo conhecido como o Movimento da Matemática Moderna (MMM), surgindo assim, uma nova tendência, a *Formalista Moderna*.

Como Movimento da Matemática Moderna foi um divisor de águas, entre um ensino tradicional e uma nova forma de ensinar Matemática. Aconteceu não só no Brasil, mas em alguns países do mundo ocidental, vamos dedicar um pouco mais de atenção a alguns aspectos relevantes para o ensino de matemática no Brasil no item 1.2.3.

Com o decorrer do tempo e, já se vislumbrando a escassa influência do MMM na educação brasileira, percebeu-se a presença do tecnicismo pedagógico marcante

²¹ *Tendência Empírico-Ativista* – a pedagogia ativa surge como negação ou oposição à escola clássica tradicional que não considera a natureza da criança em desenvolvimento, sobretudo suas diferenças e características biológicas e psicológicas. Aqui, o professor deixa de ser o elemento principal do ensino, tornando-se orientador ou facilitador da aprendizagem. O aluno passa a ser considerado o centro da aprendizagem – um ser “ativo” (FIORENTINI, 1995).

em nosso país desde o final da década de 60 até o final da década de 70. Foi marcado pela sua ênfase às “tecnologias de ensino”, sobretudo àquelas relativas ao planejamento e a organização e controle do processo ensino-aprendizagem (FIORENTINI, 1995, p. 15).

Muitos livros didáticos do período procuraram seguir esta orientação. Entretanto, do confronto entre o MMM e a pedagogia tecnicista surge, nas décadas de 60 e 70, a combinação tecnicismo formalista.

Segundo Fiorentini (1995, p. 15), tal combinação traz implícita uma curiosa associação entre duas concepções: uma, referente ao modo de se conceber a Matemática (a concepção formalista estrutural); outra, referente ao modo de se conceber a organização do processo ensino-aprendizagem (a concepção tecnicista). Essa associação pode ser percebida nos manuais de Sangiorgi e Scipione.

De acordo com Fiorentini (1995) o caráter tecnicista desses manuais se manifesta quando passam a priorizar objetivos que se restringem ao treino/desenvolvimento de habilidades estritamente técnicas.

Ao observar as várias tendências que foram surgindo, umas primavam mais para o formalismo da própria Matemática, privilegiando suas fórmulas, seus aspectos estruturais e definições que iniciavam sempre o processo. Desse modo, percebe-se nos livros didáticos de Matemática a presença da *Concepção formalista moderna* que, de acordo com Fiorentini (1995),

manifesta-se na medida em que passa a enfatizar a Matemática pela Matemática, suas fórmulas, seus aspectos estruturais, suas definições (iniciando geralmente por elas), em detrimento da essência e do significado epistemológico dos conceitos (FIORENTINI, 1995).

Entretanto, nesta mesma época, a partir da década de 60 e 70 começa-se a sentir, no Brasil, a presença do construtivismo piagetiano, ainda de forma isolada em alguns estados brasileiros. A partir dos anos 80 já era possível encontrar em praticamente todas as regiões do país grupos de estudo e pesquisa que se denominavam de construtivistas²².

²² Para Piaget (2007, p. 1) o conhecimento não pode ser concebido como algo predeterminado nem nas estruturas internas do sujeito, porquanto estas resultam de uma construção efetiva e contínua, nem nas características preexistentes do objeto, uma vez que elas só são conhecidas graças à mediação necessária dessas estruturas, e que essas, ao enquadrá-las, enriquecem-nas.

A principal finalidade do ensino de Matemática nessa tendência é de natureza formativa. Os conteúdos passam a desempenhar papel de meios úteis, mas não indispensáveis para a construção e desenvolvimento das estruturas básicas da inteligência. Ou seja, o importante não é aprender isto ou aquilo, mas sim aprender a aprender e desenvolver o pensamento lógico-formal (FIORENTINI, 1995).

Segundo Nakamura (2008, p.75) nos anos de 1990, sob a influência do construtivismo, foi elaborado no Estado de São Paulo a proposta curricular para o ensino de matemática.

Nas coleções de Matemática, na época de 1990, Nakamura (2008) apud BROETTO (2016) identifica uma tendência de

Aproximar o conhecimento matemático do cotidiano dos alunos, com o uso de uma linguagem mais coloquial na apresentação dos conteúdos e a preocupação em construir conexões entre os temas, evitando em muitos pontos a sensação de um conhecimento isolado. Além disso, o estudo de um tema não se limitava a apenas um capítulo, sendo retomado várias vezes ao longo das séries com apresentações diferentes, de acordo com a maturidade e a experiência matemática dos alunos (NAKAMURA, 2008).

Assim, com o decorrer do tempo e das necessidades de melhorar a qualidade do ensino de Matemática surgiram várias tendências que influenciaram o ensino da Matemática. Fiorentini (1995) ressalta que com o fracasso do MMM, bem como as dificuldades apresentadas quanto à aprendizagem da Matemática por alunos das classes economicamente menos favorecidas, fez com que alguns estudiosos, a partir da década de 60, voltassem à atenção aos aspectos socioculturais da Educação Matemática.

Desse modo, surge a teoria da diferença cultural (FIORENTINI, 1995, p. 24). Segundo essa teoria, as crianças de classes pobres não são carentes de conhecimentos e de estruturas cognitivas, mas talvez não tenham habilidades formais tão desenvolvidas em relação à escrita e à representação simbólica; ou talvez possuam uma experiência de vida muito rica, na qual usam procedimentos matemáticos não-formais (Etnomatemática) que a escola, além de não saber aproveitá-los como ponto de partida, discrimina-os ou rejeita-os enquanto formas válidas e possíveis de saber.

Segundo Fiorentini (1995) inicialmente a Etnomatemática significava a Matemática não acadêmica e não-sistematizada, isto é, a Matemática oral, informal,

“espontânea” e, às vezes, oculta ou congelada, produzida e aplicada por grupos culturais específicos (indígenas, favelados, analfabetos, agricultores, ...). Mais, tarde, porém, D’Ambrósio ampliaria o significado de Etnomatemática, definindo-a como a “arte ou técnica de explicar, de conhecer e de entender, nos diversos contextos culturais” (D’AMBRÓSIO, 1990, p. 81).

E, além disso, D’Ambrósio (2009, p. 27) amplia a visão sobre a Etnomatemática apresentando-a partir de várias dimensões, como por exemplo, em sua dimensão conceitual é um programa de pesquisa em história e filosofia da matemática, com óbvias implicações pedagógicas.

Assim, segundo Fiorentini (1995, p. 25) o grande mérito da Etnomatemática foi trazer uma nova visão de Matemática e de Educação Matemática de feição antropológica, social e política, que passam a ser vistas como atividades humanas determinadas sócio culturalmente pelo contexto em que são realizadas.

O método de ensino preferido por essa tendência será, portanto, a problematização (tanto do saber popular como daquele produzido pelos matemáticos) e a Modelagem Matemática, que contempla uma abordagem externalista para a Matemática. Em outras, palavras, trata-se de um método de ensino que contempla a pesquisa e o estudo/discussão de problemas que dizem respeito à realidade dos alunos (FIORENTINI, 1995, p. 26).

Esse novo modo de ver a matemática influenciou vários educadores matemáticos na elaboração dos livros didáticos, principalmente os livros produzidos para a Educação Básica que passaram a ser mais contextualizadas, apresentando situações problemas do cotidiano do aluno e, trazendo partes da história da Matemática.

Neste contexto, o aluno terá uma aprendizagem mais significativa e efetiva da Matemática se esta estiver relacionada ao seu cotidiano e à sua cultura. Ou seja, o processo de aprendizagem dar-se-ia a partir da compreensão/sistematização do modo de pensar e de saber do aluno. Entretanto, em coerência a uma visão relativista e não-universal do saber matemático, essa tendência não concebe a existência de um currículo preestabelecido e comum (FIORENTINI, 1995, p. 26).

A ideia de fazer este estudo sobre as tendências pelas quais perpassam o ensino de matemático a ser levado à escola teve o intuito de perceber as nuances pela qual o conhecimento matemático escolar foi vivenciado ao longo do tempo até a presente época.

Na época em que Fiorentini (1995) escreveu seu artigo²³ trouxe-nos como sugestão tendências ainda emergentes como a *histórico-crítica* e a *sociointeracionista-semântica*, que naquela época, ainda eram denominações provisórias, conforme sua explicação em nota de rodapé:

A primeira foi tomada emprestada de Saviani (1984) e a segunda representa uma combinação entre o sociointeracionismo fundamentado por Vygotsky e a semântica oriunda da semiótica, a qual trata da produção de significados e da representação dos significados da linguagem e das ideias veiculadas em sala de aula (FIORENTINI, 1995, p. 32).

Assim, sob o ponto de vista histórico-crítico, segundo Fiorentini (1995, p. 32):

A aprendizagem efetiva da Matemática não consiste apenas no desenvolvimento de habilidades (como do cálculo ou da resolução de problemas), ou na fixação de alguns conceitos através da memorização ou da realização de uma série de exercícios, como entende a pedagogia tradicional ou tecnicista.

O aluno aprende significativamente Matemática, quando consegue atribuir sentido e significado às ideias matemáticas – mesmo aquelas mais puras (isto é, abstraídas de uma realidade mais concreta) – e, sobre elas, é capaz de pensar, estabelecer relações, justificar, analisar, discutir e criar (FIORENTINI, 1995).

Atualmente os livros didáticos atendem à tendência de um ensino que priorize o desenvolvimento das competências e habilidades cognitivas.

São também de fundamental importância que os conteúdos abordados respondam às demandas de um coletivo discente cada vez mais heterogêneo, assegurando a igualdade de acesso ao conhecimento socialmente produzido. Em relação à organização dos conteúdos, é necessário superar o caráter fragmentário dos componentes curriculares, no interior das áreas do conhecimento, integrando-as em um currículo que inclua articulações e contextualizações social e culturalmente relevantes, de maneira a tornar os conhecimentos abordados mais significativos para os educandos e favorecer a participação ativa de alunos com habilidades, experiências de vida e interesses diversificados (BRASIL, 2010).

É importante que a escola incentive o protagonismo e a iniciativa dos estudantes, para que eles desenvolvam autonomia de investigação e capacidade de atuação baseadas em fundamentações adequadas e convicções próprias,

²³ FIORENTINI, Dario. Alguns modos de ver o ensino de matemática no Brasil. Revista Zetetiké, ano 3, nº 4/1995.

devidamente embasadas em conhecimentos científicos, culturais e tecnológicos relevantes (BRASIL, 2016)²⁴.

1.2 UM BREVE PRECURSO PELAS REFORMAS EDUCACIONAIS DO ENSINO DE MATEMÁTICA QUE MARCARAM A EDUCAÇÃO BRASILEIRA ATÉ O MMM.

Tendo recorrido sobre as concepções de ensino da Matemática no item anterior, vamos fazer um breve percurso histórico dos diferentes momentos em que se instituíram as reformas educacionais, tendo, sobretudo, o foco na matemática escolar, a fim de verificar a presença do conteúdo de divisibilidade na disciplina de matemática, no nível de ensino correspondente ao ensino fundamental dos anos finais (como atualmente é denominado)²⁵.

Desde as últimas décadas do século XIX, começou a se manifestar em diferentes países uma preocupação em modernizar o ensino de Matemática desenvolvido nas escolas secundárias, especialmente por meio da introdução de novos conteúdos.

As novas correntes educacionais surgidas ao final do século XIX, na Europa e nos Estados Unidos, que já tinham produzido seus primeiros reflexos no ensino primário brasileiro, começaram a partir da década de 20, a alterar completamente a fisionomia da educação em nosso país (MIORIN, 1998, p. 88).

Nas primeiras quatro décadas do século XX houve duas grandes reformas educacionais: (1) Reforma Francisco Campos; (2) Reforma Gustavo Capanema; e em seguida, já na década de sessenta inicia-se o Movimento da Matemática Moderna (MMM).

Estas duas reformas foram responsáveis por mudanças na configuração da educação brasileira. Dentre os vários decretos ocorridos durante a Reforma Francisco Campos, destacamos os relativos ao ensino secundário²⁶: Decreto n.º 19.890, de 18 de abril de 1931 – Dispõe sobre a organização do ensino secundário; e o Decreto n.º 21.141, de 4 de abril de 1932 – Consolida as disposições sobre a organização do ensino secundário. Além disso, houve uma revisão dos currículos e das orientações

²⁴ Guia dos livros didáticos do ensino fundamental anos finais – Apresentação (2016).

²⁵ BNCC (2017)

²⁶ Ensino secundário era o nível de escolarização entre o curso primário e o ensino superior, que, a partir da Reforma Francisco Campos, passou a ter duração de sete anos e dois ciclos.

das disciplinas do ensino secundário tanto ao nível do ginásio, quanto do colégio, instituída pela Portaria Ministerial²⁷ nº 966 de 02 de outubro de 1951, que tinha como um de seus objetivos suprir a escassez ou ausência de considerações curriculares e metodológicas dos programas anteriores, instaurando em toda federação, progressivamente a partir de 1952, um programa denominado *Programas Mínimos*, elaborado pelos membros do Colégio Pedro II, que acenavam com os conteúdos básicos, ou mínimos que todas as instituições deveriam ministrar (MARQUES, 2005).

Entretanto, a proposta de modernização do ensino de Matemática na escola secundária brasileira, contemplada pela Reforma Campo, encontrou algumas resistências para ser implantada (MIORIM, 1998, p. 81).

Segundo Miorim (1998, p. 89) nenhuma das várias reformas que ocorreram após a de Benjamin Constant²⁸, até 1930, chegou a produzir mudanças significativas no ensino secundário brasileiro, além de não resolver a antiga questão sobre a melhor formação secundária.

Contudo, a “Reforma Capanema” manteve a divisão em dois ciclos: o primeiro ciclo, na Reforma Francisco Campos, denominado Curso Fundamental, com duração de cinco anos, passou a denominar-se Ginásio, ou Curso Ginasial, com quatro anos de duração.

O termo *colégio*, entendido como o segundo nível de estudos a suceder o curso primário, teve origem na Reforma Capanema como podemos observar no art. 5.º da Lei Orgânica do Ensino Secundário (1942).

Art. 5.º Haverá dois tipos de estabelecimentos de ensino secundário: o ginásio e o colégio.

§ 1.º Ginásio será o estabelecimento de ensino secundário destinado a ministrar o curso de primeiro ciclo.

§ 2.º Colégio será o estabelecimento de ensino secundário destinado a dar, além do curso próprio de ginásio, os dois cursos de segundo ciclo (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E SAÚDE, 1942).

A Reforma Capanema foi a responsável pela reorganização do ensino de Matemática no nível colegial, possibilitando o surgimento de uma coleção de livros didáticos de Matemática intitulados “*Matemática 2º ciclo*”, para 1ª 2ª e 3ª séries,

²⁷ Esta Portaria foi publicada no Governo de Getúlio Vargas, agora eleito pelo voto popular, e por intermédio do Ministro de Educação e Saúde Simões filho.

²⁸ O sistema brasileiro passou por uma profunda reforma – oficializada pelo decreto nº 891, de 8 de novembro de 1890 – que ficou conhecida por Reforma Benjamin Constant.

editados para atender aos novos programas vigentes. A coleção de livros ficou conhecida como “Coleção dos quatro autores”, dos professores: Euclides Roxo, Roberto Peixoto, Haroldo Lisboa da Cunha e Cesar Dacorso Netto.

Essa coleção, segundo Ribeiro (2006), seria uma obra inovadora na medida em que estes autores produziram textos para ambas as reformas nos dois níveis: Francisco Campos, *Curso fundamental e complementar* e Capanema, para o ensino secundário.

Entretanto, segundo Valente (2008), o livro didático de Euclides Roxo acabou por constituir-se num manual inovador, referência para produção de uma vulgata utilizada durante as décadas de 1930-40.

Mas, o fato de um livro ser considerado como um projeto inovador, isso não lhe garante o sucesso. Segundo Valente (2008),

Embora o livro de Euclides Roxo tenha se constituído um manual inovador em plena conformidade com a criação da nova disciplina Matemática, sua publicação foi seguida de intensos debates que mobilizaram professores (principalmente autores de livros e editoras), no sentido da recusa ao modo como Roxo indicava dever ser ensinada a nova disciplina. A rejeição no intuito de fundir os diferentes ramos matemáticos ficou patente e, como todo manual revolucionário, a proposta didática de Euclides Roxo não ultrapassou a segunda edição: o livro resultou num fracasso editorial (VALENTE, 2008).

Após o exame da produção didática para os Cursos Complementares e Clássico e Científico na época das Reformas Francisco Campos e Capanema, Ribeiro (2006) identificou algumas transformações ocorridas no ensino de Matemática (Álgebra, Geometria, Geometria Analítica, Trigonometria, Aritmética Teórica e Cálculo Vetorial). As transformações observadas na passagem do Curso Complementar para os Cursos Clássico e Científico foram as seguintes:

- Mudança de apresentação dos conteúdos (passaram de itens dispersos, isolados e independentes para uma disposição que seguia uma lógica didático-matemática agrupando-se em unidades interligadas);
- os conteúdos ficaram independentes e obedeciam a uma sequência de ensino serial; menor rigor matemático na apresentação dos conteúdos, com um desenvolvimento mais simples, utilizando os exercícios como um meio para o estudo e assimilação dos conteúdos;
- os conteúdos matemáticos dos Cursos Complementares, diferentes entre si com a característica de cursos distintos, foram padronizados, tornando-se um só curso, com poucas variações;
- somente o Curso Complementar Pré-Politécnico apresentava a padronização dos ensinamentos de Matemática em Geometria e Álgebra, e para os Cursos Clássico e Científico tais ensinamentos foram organizados, por série, em

Aritmética Teórica, Álgebra, Geometria Analítica e Trigonometria, sob a denominação Matemática. (RIBEIRO, 2006, p. 73).

A Portaria Ministerial n.º 177, de 16 de março de 1943, expede os programas de matemática dos cursos clássico e científico conforme Quadro 1, encontrada no livro de Euclides Roxo (1945). O autor esclarece aos leitores que o compêndio apresentado foi elaborado rigorosamente de acordo com os programas oficiais do 2º ciclo de acordo com a referida portaria.

Quadro 1: Programa para o Curso Científico (1943)

Programa de Matemática do Curso Científico De acordo com a Portaria Ministerial nº 177 de 16 de março de 1943 – Primeira Série
ARITMÉTICA TEÓRICA Unidade I – As operações aritméticas fundamentais: 1. Teoria da adição, da subtração, da multiplicação, da divisão, da potenciação e da radiciação de inteiros. 2. Sistemas de numeração. Unidade II – A divisibilidade numérica: 1. Teoremas gerais sobre divisibilidade. 2. Caracteres de divisibilidade. 3. Teorias do m.d.c. e o m.m.c. 4. Teoria dos números primos; aplicações. Unidade III – Os números fracionários: 1. Teorias das operações aritméticas sobre números fracionários. 2. Noções sobre cálculo numérico aproximado. Erros. Operações abreviadas. ÁLGEBRA Unidade IV – Os polinômios: 1. Operações algébricas sobre polinômios. 2. Teoria da divisão de polinômios. 3. Identidade de polinômios; método dos coeficientes a determinar; identidades clássicas. 4. Divisão de um polinômio inteiro em x por $x \pm a$; regra e dispositivo prático de Briot-Ruffini. Unidade V – O trinômio de 2º grau: 1. Decomposição em fatores do 1º grau; sinais do trinômio; inequações do 2º grau. 2. Noção de variável e de função; variação do trinômio do 2º grau; representação gráfica. 3. Noções elementares sobre continuidade e sobre máximos e mínimos. GEOMETRIA Unidade VI – O plano e a reta no espaço: 1. Determinação de um plano. 2. Interseção de planos e retas. 3. Paralelismo de retas e planos. 4. Reta e plano perpendiculares. 5. Perpendiculares e oblíquas de um ponto a um plano. 6. Diedros; planos perpendiculares entre si. 7. Ângulos poliédricos; estudo especial dos triedros. Unidade VII – Os poliedros: 1. Noções gerais. 2. Estudo dos prismas e pirâmides e respectivos troncos; áreas e volumes desses sólidos. 3. Teorema de Euler; noções sobre os poliedros regulares.

Fonte: Livro de Euclides Roxo (1945).

No Programa de Matemática para o curso científico, no Quadro 1, observamos que o Campo “Aritmética teórica” contempla na Unidade II, conteúdos de divisibilidade: Teoremas gerais sobre divisibilidade, caracteres de divisibilidade, m.d.c. e m.m.c. e números primos (nessa ordem).

Quadro 2: Programa para o Ensino de Matemática do Curso Clássico (1943)

Programa de Matemática do Curso Clássico De acordo com a Portaria Ministerial nº 177 de 16 de março de 1943 – Primeira série	
ARITMÉTICA TEÓRICA Unidade I – A divisibilidade numérica: 1. Teoremas gerais sobre divisibilidade. 2. Caracteres de divisibilidade. 3. Teorias do m.d.c. e o m.m.c. 4. Teoria dos números primos; aplicações.	
ÁLGEBRA Unidade II – Os polinômios: 1. Operações algébricas sobre polinômios. 2. Teoria da divisão de polinômios. 3. Divisão de um polinômio inteiro em x por $x \pm a$; regra e dispositivo prático de Briot-Ruffini. Unidade III – O trinômio de 2º grau: 1. Decomposição em fatores do 1º grau; sinais do trinômio; desigualdades do 2º grau. 2. Noção de variável e de função; variação do trinômio do 2º grau; representação gráfica.	
GEOMETRIA Unidade IV – O plano e a reta no espaço: 1. Determinação de um plano. 2. Interseção de planos e retas. 3. Paralelismo de retas e planos. 4. Reta e plano perpendiculares. 5. Perpendiculares e oblíquas de um ponto a um plano. 6. Diedros; planos perpendiculares entre si. 7. Noções sobre ângulos poliédricos. Unidade V – Os poliedros: 1. Noções gerais. 2. Estudo dos prismas e pirâmides e respectivos troncos; áreas e volumes desses sólidos.	

Fonte: Livro de Euclides Roxo (1945).

Nestes dois Programas pode-se observar que o ensino de Matemática está dividido em três campos: Aritmética Teórica, Álgebra e Geometria e que os mesmos conteúdos que compõem a unidade temática: Divisibilidade Numérica está contemplada nos dois Programas, com a diferença que no Programa para o Curso Científico está na segunda unidade e no Programa para o Ensino de Matemática do Curso Clássico está iniciando o programa, na primeira unidade.

Alguns professores de matemática tais como: Thales Mello Carvalho (1943), Euclides Roxo (1945), Algacyr Munhoz Maeder (1946), elaboraram livros didáticos de matemática fundamentados pelos mesmos Programas de Ensino de Matemática para os cursos: Científico e Clássico, constantes da Portaria Ministerial nº 177 de 16 de março de 1943.

Segundo Saviani (2015, p. 28), após a Revolução de 1930, toda mobilização feita pelos profissionais da educação ganha expressão nacional e, as Reformas Francisco Campos, em 1931, e as Reformas Capanema, de 1942 a 1946, dão sequência, agora em âmbito nacional, ao processo de estruturação/reestruturação do ensino brasileiro que irá desembocar na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional promulgada em 20 de dezembro de 1961.

Além desses Programas para o Ensino de Matemática observados nas Reformas Campos e Capanema, na década de 50, surgiu o Programa Mínimo²⁹.

Segundo Marques (2005) O Programa de Matemática expedido na portaria de 1951 foi um programa simplificado, denominado Programa Mínimo, uma vez que era notável a diferença quantitativa de conteúdos que seriam essenciais para serem ministrados no curso ginasial nos anos de 1950.

No que diz respeito aos programas de matemática, a Portaria de 1951 previa a carga horária semanal de 3 horas e a seguinte estruturação:

1ª série: Aritmética (Números Inteiros; Operações Fundamentais; Números Relativos; **Divisibilidade aritmética; Números primos;** Números Fracionários) e Sistema Legal de Unidades (Unidades e Medidas Usuais);

2ª Série: Aritmética (Potências e Raízes; Expressões Irracionais) e Álgebra (Cálculo Literal; polinômios; Binômio Linear, Equações e Inequações do 1º grau com uma incógnita; Sistemas Lineares com duas incógnitas);

3ª Série: Aritmética (Razões e Proporções; Aplicações Aritméticas), Álgebra e Geometria (Figuras Geométricas Planas; Retas e Círculo; Linhas proporcionais; Semelhança de Polígonos; Relações Trigonométricas no Triângulo Retângulo; Tábuas naturais);

4ª série: Álgebra (Trinômio do segundo grau; Equações e inequações do 2º grau com uma incógnita) e Geometria (Relações métricas nos polígonos e no círculo; Cálculo de π ; Área de figuras planas).

Cabe salientar que ficou estabelecido que os Estados brasileiros poderiam elaborar seus próprios programas tendo como referência os Programas Mínimos (MARQUES, 2005). Assim, até meados de 1960, o sistema brasileiro foi regido por esses programas. Mas, apesar da reorientação curricular a partir dos anos 20, esses programas não tiveram forças para melhorar a qualidade de ensino de matemática, e a oferta do ensino ainda se dava para poucos.

1.3 O MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA (MMM) – BREVE PERCURSO

Antes do Movimento da Matemática Moderna chegar ao Brasil, no século XX, professores de Matemática e pesquisadores da área da Educação, na década de 50, em vários países da Europa e nos Estados Unidos perceberam que o ensino de

²⁹ Expedido pela Portaria Ministerial de nº 1045 de 14 de dezembro de 1951, do Ministério da Educação e Saúde (aprovou os planos, juntamente com as instruções metodológicas para o ensino secundário).

matemática não tinha uma resposta satisfatória na aprendizagem dos alunos e, começaram a se organizar em grupos de estudos e encontros internacionais para discutirem a respeito.

Para Fiorentini (1995) esse movimento internacional surgiu como resposta à constatação, após a Segunda Guerra Mundial, de uma considerável defasagem entre o progresso científico-tecnológico da nova sociedade industrial e o currículo escolar vigente, sobretudo nas áreas de ciências e matemática.

O lançamento do “Sputnik” pelos soviéticos, em 1957, foi decisivo para que esse movimento adquirisse força política, tanto que o governo norte-americano passou a injetar vultosos recursos financeiros em projetos de inovação/modernização dos currículos escolares.

Miorim (1998, p. 109) ressalta que “essa moderna matemática” havia surgido no início de nosso século, embora estivesse em estado embrionário desde o século XIX. Sua origem, portanto, estava ligada à necessidade de uma maior reflexão e fundamentação acerca de vários conceitos e teorias novas que haviam surgido durante o longo período de experimentação dos estudos matemáticos, especialmente daqueles ligados à mecânica e à astronomia, ocorridos nos séculos XVII e XVIII.

Estas reflexões e os estudos matemáticos desta época começaram a produzir profundas transformações na própria aplicação da matemática, bem como nas pesquisas dos matemáticos nas universidades. A atuação de um grupo de jovens matemáticos, denominado Bourbaki³⁰, foi outro fator que teve bastante influência no movimento internacional para a modernização da matemática.

Segundo Miorim (1998, p. 110) os trabalhos de Bourbaki, orientaram as propostas do Movimento da Matemática Moderna, reforçada por estudos psicológicos contemporâneos, especialmente os de Jean Piaget.

Muitos professores universitários, influenciados pelos trabalhos do grupo francês “Bourbaki”, também difundiriam, por longo tempo a concepção estrutural-formalista da Matemática, através dos cursos de Licenciatura em Matemática (FIORENTINI, 1995).

Esta concepção é percebida ainda hoje nos livros de matemática para o ensino superior, principalmente, os que são produzidos pelo Instituto de Matemática Aplicada (IMPA).

³⁰ Grupo formado em 1934 por jovens matemáticos franceses (André Weil, Szolem, Mandelbrojt, Paul Dubreil, Claude Chevalley, René de Possel, Jean Dieudonné).

Segundo Fiorentini (1995) as primeiras propostas concretas para a implantação da Matemática Moderna no Brasil surgiram no início da década de 60. Em 1961, foi fundado, em São Paulo, o GEEM³¹ (Grupo de Estudos sobre o Ensino da Matemática), que contribuiu de maneira decisiva, através de cursos de sensibilização e de treinamento de professores e da edição de livros textos, para a difusão do ideário modernista.

Uma das ações do GEEM, assumida principalmente por Sangiorgi, foi a elaboração de livros didáticos de Matemática. Em 1962, a Companhia Editora Nacional lançou o primeiro livro denominado Matemática Moderna para o Ensino Secundário em que Sangiorgi foi o principal responsável pela parte da Matemática.

Como o professor Osvaldo Sangiorgi foi um autor de grande relevância para a propagação do MMM e seus livros influenciaram o ensino da Matemática no Brasil, escolhemos um de seus livros, lançados durante o MMM para servir de referência para comparação sobre a presença dos conteúdos de Divisibilidade nos livros didáticos.

E, embora o nosso objetivo não seja fazer um tratado sobre o Movimento da Matemática Moderna, mas sim, verificar quais influências marcou a forma de se ensinar a matemática na educação básica, é imprescindível nos situarmos no tempo e nas ideias embrionárias desse movimento que foi um marco no ensino da Matemática em vários países e no Brasil.

Segundo Carvalho (1988) as ideias que sustentaram o Movimento da Matemática Moderna estavam baseadas na Matemática do século XX, principalmente sobre as noções de estrutura e axiomatização, tendo por referência quatro correntes de pensamento: (1) As extensões da noção de número e o aparecimento da Álgebra Abstrata; (2) O aparecimento das geometrias não-euclidianas e a axiomatização da Geometria; (3) O desenvolvimento da Teoria dos Conjunto e da Lógica; (4) A aritmetização da análise e a percepção da necessidade de rigor nesta área.

Fiorentini (1995) apresenta alguns dos propósitos do Movimento da Matemática Moderna:

³¹ GEEM (Grupo de Estudo do Ensino de Matemática), com sede na Universidade Mackenzie em São Paulo teve como presidente o professor Osvaldo Sangiorgi. Esse grupo foi o primeiro a atuar em São Paulo no aperfeiçoamento de professores focando a MMM.

- a) Unificar os três campos fundamentais da matemática, não uma integração mecânica, mas a introdução de elementos unificadores como Teoria dos Conjuntos, Estruturas Algébricas e Relações e, Funções.
- b) Dar mais ênfase aos aspectos estruturais e lógicos da matemática em lugar do caráter pragmático, mecanizado, não-justificativo e regrado, presente, naquele momento, na matemática escolar.
- c) O ensino de 1º e 2º graus deveria refletir o espírito da matemática contemporânea que, graças ao processo de algebrização, tornou-se mais poderosa, precisa e fundamentada logicamente (MIGUEL, FIORENTINI & MIORIM, 1992).

Quanto à relação professor-aluno e ao processo de ensino-aprendizagem, não há grandes mudanças. O ensino, de um modo geral, continua sendo acentuadamente autoritário e centrado no professor que expõe/demonstra rigorosamente tudo no quadro-negro. O aluno, salvo algumas poucas experiências alternativas, continua sendo considerado passivo, tendo de reproduzir a linguagem e os raciocínios lógico-estruturais ditados pelo professor (FIORENTINI, 1995).

Contudo, para Wielewski (2008),

Os defensores da Matemática Moderna (MM) acreditavam que poderiam preparar pessoas que pudessem acompanhar e lidar com a tecnologia que estava emergindo. Dessa forma, as propostas veiculadas pelo MMM inseriram no currículo conteúdos matemáticos que até aquela época não faziam parte do programa escolar como, por exemplo, estruturas algébricas e teoria dos conjuntos (WIELEWSKI, 2008).

Assim, a partir da primeira metade da década de 60, começou-se a publicação dos primeiros livros didáticos de acordo com essa nova orientação, bem como desencadeou um processo de implantação da Matemática moderna nas escolas brasileiras.

A organização da Matemática moderna baseou-se na teoria dos conjuntos, estruturas matemáticas e lógica matemática. Esses três elementos foram responsáveis pela “unificação” dos campos matemáticos, um dos objetivos do movimento. Mas, apesar de todo o entusiasmo e esforço para implantar a nova proposta que se baseava nas propriedades estruturais dos conjuntos e no estudo das relações e funções, a Matemática moderna não conseguiu resolver o problema do ensino da disciplina. Ao contrário, agravou mais ainda a situação (MIORIM, 1998, p.115).

O Movimento da Matemática Moderna no Brasil possibilitou aos professores de matemática uma grande mobilização para produzir mudança do ensino de

matemática. Contudo, a maioria dos Estados brasileiros fizeram adaptações para o novo currículo proposto pela MMM.

No estudo de RECH (2016, p. 153) encontramos uma referência aos conteúdos do Ginásio³² na época de 1951, adaptado da Portaria nº 9666 de 2 de outubro de 1951 (antes da influência do MMM). Faremos uma comparação com os dados apresentados por França (2007) apud Rech (2016, p. 285) “dos conteúdos dos Guias Curriculares de São Paulo (1975).”

Apresentamos no Quadro 3 dois programas de conteúdos de matemática: (1) os conteúdos de matemática da Escola Secundária no Brasil (1951) e, (2) Esquema de *conteúdos mínimos de Matemática* da Escola Primária de São Paulo (influência da Matemática Moderna no Brasil), conforme França (2007) apud RECH (2016, p. 285).

Quadro 3: Conteúdos de Matemática do Ginásio de 1951 e de 1975

(1) Conteúdos da Escola Secundária no Brasil (1951)		(2) Do Guia Curricular de São Paulo (1975)	
1ª Série do Ginásio	Números inteiros. Operações fundamentais. Números relativos. Divisibilidade aritmética. Números primos. Números fracionários. Sistema legal de unidades de medir, unidades e medidas usuais.	5ª Série	Partição. Par ordenado e produto cartesiano. Relações. Propriedades das relações (reflexiva, simétrica, transitiva). Aplicação de funções. Equipotência. Conceito e sistema de numeração. Estrutura dentro dos Naturais. Potenciação. Estrutura do conjunto dos inteiros (Z). Noções topológicas: interior, exterior, Fronteiras. Noção afim: paralelismo, semelhança. Noções euclidianas: distâncias e ângulos. Medidas de área. Propriedades das relações (reflexiva, simétrica, transitiva). Propriedade
2ª Série do Ginásio	Potências e raízes; expressões racionais. Cálculo literal; X	6ª Série	Antissimétrica e de ordem. Aplicação de funções. Estrutura do conjunto dos inteiros (Z). Números primos e divisibilidade. Números racionais absolutos. Estrutura dos racionais. Noções topológicas interior, exterior, Fronteiras. Noções projetivas: retas, intersecções, convexidade. Noções euclidianas: distâncias e ângulos. Transformações geométricas. Medidas de comprimento. Medidas de área.

³² De acordo com o Decreto-lei 4.244 de 1942 no Art. 5º haverá dois tipos de estabelecimentos de ensino secundário, o ginásio e o colégio de quatro e três anos respectivamente. “O Ginásio será o estabelecimento de ensino secundário destinado a ministrar o curso de primeiro ciclo” (RECH, 2016, 153).

Quadro 3: Continuação

(1) Conteúdos da Escola Secundária no Brasil (1951)		(2) Do Guia Curricular de São Paulo (1975)	
3ª Série do Ginásio	3ª Série do Ginásio	7ª Série	Números irracionais. Estrutura dos Reais. Cálculo algébrico. Polinômios de uma variável. Expressões racionais. Noção afim: paralelismo, semelhança. Noções euclidianas: distâncias e ângulos. Transformações geométricas. Medidas de área.
4ª Série do Ginásio	4ª Série do Ginásio	8ª Série	Aplicação de funções. Números irracionais. Estrutura dos racionais. Cálculo algébrico. Números reais sob a forma de radicais. Noções euclidianas: distâncias e ângulos. Transformações geométricas. Transformações através de coordenadas. Medidas de área.

Fonte: Adaptado de RECH (2016, p. 151 e 160).

O Quadro 3 contém conteúdos parciais de Matemática, apenas do que hoje é considerado o Ensino Fundamental dos Anos Finais, pois as tabelas originais contemplam também os conteúdos do ensino médio.

Rech (2016, p. 285) ao comparar os conteúdos de Matemática da Escola Primária anterior ao MMM com a implantação do novo currículo a partir do MMM, conforme tabela 1, percebeu alterações, pois em (2) são conteúdos do ideário conjuntivista, ou seja, Relações; Transformações geométricas; Pertinência; Diagramas; Estrutura dentro dos naturais; Noções Topológicas: interior, exterior; Fronteiras; Conjunto, elementos, pertinência e diagramas.

O IV Congresso Brasileiro de Ensino de Matemática (1962) publicou a relação dos *assuntos mínimos*³³ para o Ginásio – Programa apresentado pelo Grupo de Estudos do Ensino de Matemática de São Paulo (GEEM) sob a coordenação de Osvaldo Sangiorgi. Este Programa anuncia vinte e quatro assuntos para o Ginásio (Quadro 3) e dezoito itens para o Colégio (Quadro 4), conforme estudo de RECH (2016, p. 288-289).

³³ Os assuntos mínimos não tratam de uma nova Matemática, mas a tradicional com uma linguagem moderna (RECH, 2016, p. 289).

Os *Assuntos Mínimos para o Ginásio* são acompanhados de um campo de sugestões, conforme Valente (2008) apud Rech (2016, p. 288), que destaca algumas dessas sugestões: (a) a ideia de conjunto deveria ser dominante; as propriedades das operações com números inteiros devem ser repetidas como início das estruturas matemáticas; (b) o uso da linguagem dos conjuntos e operações entre conjuntos, traziam novos centros de interesse na explanação da matéria.

Quadro 4: Assuntos Mínimos para o Ginásio no Brasil (1962)

Assuntos Mínimos para o Ginásio no Brasil (1962)	
1. Números inteiros, operações fundamentais, propriedades. Sistema de numeração. 2. Divisibilidade. Múltiplos e divisores. Números primos. 3. Potenciação e radiciação; raiz quadrada. 4. Números fracionários; operações fundamentais; propriedades; potenciação e radiciação. 5. Números relativos; operações fundamentais; propriedades. 6. Medidas de figuras geométricas simples. 7. Razões e proporções, aplicações. 8. Números racionais; operações fundamentais; propriedades. 9. Cálculo literal; polinômios com coeficientes racionais; operações fundamentais; propriedades. 10. Equações de 1º grau com uma incógnita; inequações de 1º grau com uma incógnita; inequações simultâneas. 11. Frações algébricas, operações fundamentais; propriedades. 12. Função; representação gráfica cartesiana de uma função. 13. Sistema de equações de 1º grau com duas incógnitas; interpretação gráfica, sistema de equações de 1º grau com três incógnitas;	14. Sistema de inequações de 1º grau com duas incógnitas; interpretação gráfica. 15. Elementos fundamentais da geometria plana: ponto, reta, semirreta, segmento, plano, semipleno, ângulos e bissetrizes; 16. Polígonos: generosidades; estudo de triângulo. 17. Perpendicularismo e paralelismo no plano, estudo dos quadriláteros; 18. Circunferência; propriedades; posições relativas de retas e circunferência e de circunferências; 19. Número irracional e número real; operações fundamentais; cálculo de radicais. 20. Equações de 2º grau com uma incógnita; função do trinômio do 2º grau; equações redutivas ao 2º grau; 21. Segmentos proporcionais; semelhança de polígonos; seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo; 22. Relações métricas nos triângulos; lei dos senos e dos cossenos. 23. Relações métricas no círculo, polígonos regulares. 24. Áreas dos polígonos; medida da circunferência e área do círculo.

Fonte: Rech (2016, p. 289) Adaptado do Congresso Nacional de Ensino de Matemática (GEEM, 1962).

O Quadro 5, a seguir, apresenta os Assuntos Mínimos³⁴ para o Colégio. Neste caso também existe um campo de sugestões, entre elas, todas relacionadas

³⁴ Embora os Assuntos Mínimos não fossem oficializados, o programa vigorou em grande medida pela força dos seus difusores no Brasil e pela “abertura” que a LDB/1961 concedia aos estados e municípios. A busca pela padronização e organização continuou na 2ª LDB, publicada em 11 de agosto de 1971, que remodelou o ensino primário e secundário, dando origem ao ensino de 1º e 2º graus. As principais características da 2ª lei de diretrizes da educação brasileira foram: (i) Prevê um núcleo comum para o currículo de 1º e 2º graus e uma parte diversificada em função das peculiaridades locais (art. 4); (ii) Inclui

respectivamente aos assuntos mínimos. RECH (2016, p. 289) apresenta três: (a) desenvolver o assunto em encadeamento lógico, ressaltando as propriedades fundamentais intuitivas e as demonstráveis, procurando destacar os diversos métodos de demonstração. Aproveitar as ideias operacionais de conjuntos. (b) ressaltar a estrutura algébrica (corpo); (c) examinar a estrutura algébrica (anel).

Quadro 5: Assuntos Mínimos para o Colégio no Brasil (1962)

Assuntos Mínimos para o Colégio no Brasil (1962)	
1. Função de 2º grau. Estudo completo do trinômio de 2º grau e aplicações. 2. Coordenadas de um ponto da circunferência com centro na origem. Aplicações das relações trigonométricas nos triângulos. 3. Identidades, equações e inequações trigonométricas simples. 4. Introdução à geometria espacial; espaço e semiespaço; Paralelismo e Perpendicularismo das retas e dos planos. Diedros, triedros e ângulos polédricos. 6. Poliedros: prismas, pirâmides e troncos. Propriedades geométricas. 7. Corpos redondos. 8. Transformações pontuais: translação, rotação, simetria e homotetia. 9. Noção de sequência de números reais. Progressões.	10. Noção de potência no campo real. Operações inversas. Logaritmos. 11. Análise combinatória e aplicações. 12. Elementos de Geometria Analítica Plana. Equação da reta e equação da circunferência. Equação reduzida das cônicas. 13. Medida dos sólidos geométricos. 14. Sistema de equações lineares. Noções de matrizes. Aplicações. Números complexos: operações fundamentais, propriedades. 16. Estudo dos polinômios. 17. Equações algébricas. 18. Noção de limite, continuidade e derivadas. Elementos de cálculo integral: aplicações ao cálculo de áreas e volumes.

Fonte: Rech (2016, p. 290). Adaptado de Planos e Programas e do Congresso Nacional de Ensino de Matemática (GEEM, 1962).

Rech (2016), em sua tese concluiu que a Matemática Moderna no Brasil serviu para legitimar as reformas no ensino da Matemática Escolar no período dos Estados Burocráticos e Autoritários, havendo o aceite tanto dos professores quanto dos governos militares.

O fato de o Brasil ter sido um dos principais aliados (durante a segunda Guerra Mundial) dos Estados Unidos propiciou uma condição privilegiada para obter financiamentos para a educação, possibilitando o intercâmbio de professores brasileiros no país.

a educação moral e cívica, a educação física, a educação artística e os programas de saúde como matérias obrigatórias do currículo, além do ensino religioso facultativo (art. 7); (iii) Institui o ano letivo de 200 dias (art. 24); (iv) Ensino de 1º grau obrigatório dos 7 (sete) aos 14 anos (art. 20).

Assim, este “pacto” permitiu a impressão conjunta de livros didáticos, aporte financeiro e garantias de disseminação de uma proposta ideológica no que se denominou de “paz duradoura” (RECH, 2016, p. 368).

Em se tratando de implantação de um Currículo Escolar para todo o país que é da alçada do governo seria ingenuidade pensar que em época de ditadura militar³⁵ a implantação da Matemática Moderna em nosso país não fosse de interesse político.

A Matemática Moderna fez parte de um contexto geopolítico, não foi um movimento natural de professores preocupados com novas demandas. Existiam grandes motivos para que se ensinasse aquilo que se ensinou em Matemática. O processo foi uma mediação entre o instituído e a reelaboração criativa dos professores. No campo da filosofia da Matemática não houve margem para qualquer iniciativa de uma lógica dialética. Os professores não foram consultados sobre a proposta (RECH, 2016, p. 368).

É relevante observar o pensamento de RECH fazendo-nos refletir sobre o grande interesse político por traz de ações educacionais e, que a comunidade educacional não pode ficar parada aceitando o viés ideológico político capitalista de um governo ditatorial que deseja subjugar seu povo enfraquecendo a democracia tão duramente e sofredamente conquistada.

1.3.1 A influência do Movimento da Matemática Moderna nos Livros didáticos

Quanto à influência do MMM nos livros didáticos e nas estruturas curriculares Santos (2015) em seu estudo “sobre o MMM e o ensino das operações com números fracionários” observou alterações e manutenções na legislação, nos programas curriculares, na diagramação dos livros.

Além disso, constatou como mudança nos livros didáticos, a introdução da teoria dos conjuntos, das propriedades estruturais e das representações (nomenclaturas, simbologias e diagramas), acompanhadas pelo aumento do número de exercícios, cores, imagens e dimensões dos livros.

Segundo Valente (2008) os livros de Osvaldo Sangiorgi foram produzidos à casa dos milhões e fizeram escola.

³⁵ A ditadura militar no Brasil se estendeu de 1964 a 1985, praticamente concomitante ao MMM.

Logo, as primeiras páginas do livro, dirigido à quinta série ginasial, a novidade salta aos olhos: o tratamento didático da teoria dos conjuntos pela primeira vez surge em obras didáticas brasileiras destinadas ao curso ginasial. Certamente, um manual inovador (VALENTE, 2008).

Os quatro volumes da coleção de Osvaldo Sangiorgi – Matemática – curso moderno (um para cada série ginasial) – notabilizou Sangiorgi nacional e internacionalmente (VALENTE, 2008).

É irrefutável a importância da atuação de Osvaldo Sangiorgi como professor e autor de livros didáticos para a história dos livros didáticos brasileiros, pois, como é dito por Valente (2008) “a cultura escolar da época parece não ter tido forças para resistir à tentativa do novo, transformando as obras de Osvaldo Sangiorgi em manuais inovadores e vulgata ao mesmo tempo...”.

Sobre a influência dos livros didáticos de matemática dos autores: Osvaldo Sangiorgi, Ary Quintela, Carlos Galante e Miguel Name envolvendo o período de 1950 a 1970, foco da pesquisa de Santos (2015) e no seu relato:

Observamos que as mudanças conceituais relacionadas ao MMM estão presentes, em maior grau aos livros de Sangiorgi, mostrando que não houve homogeneidade na incorporação das ideias da matemática moderna nos livros didáticos de matemática dos anos de 1960 (VALENTE, 2008).

Assim, no período de propagação das ideias do Movimento da Matemática Moderna muitas coleções de livros didáticos foram publicadas a partir da década de 60 e tiveram um papel importante na disseminação do pensamento modernista.

Os livros didáticos produzidos sob a influência do MMM estavam fundamentados na organização estrutural dos conjuntos numéricos e, na maior parte das vezes se iniciavam pela abordagem dos conjuntos em que se evidenciava fortemente a presença da linguagem simbólica.

Até meados da década de 70 os livros didáticos de matemática ainda apresentavam influência da Matemática Moderna, mas partir do final dos anos 1970 surgiu muitas críticas ao Movimento da Matemática Moderna em muitos países. Essas críticas se estendiam, principalmente, à ênfase na Matemática pela Matemática, em seu formalismo e nos aspectos estruturais, assim como a preocupação excessiva com a linguagem simbólica.

Segundo Gomes (2013):

No Brasil, a crítica à Matemática Moderna e a discussão sobre seu fracasso no ensino, no final da década de 1970 e início dos anos 1980, fizeram parte de um contexto de renovação dos ideais educacionais, estimulado pelo fim da ditadura militar. Em relação às propostas curriculares para a Matemática, no nível anteriormente chamado 1º grau, surgem alternativas ao ideário modernista, como a representada pelo documento oficial do estado de São Paulo, em 1986, que, centrada em três grandes temas – números, medida e geometria – apresenta características opostas às prevalecentes durante a predominância das concepções associadas à Matemática Moderna (GOMES, 2013).

D’Ambrósio (2003, p. 54) também critica a Matemática Moderna que se fez presente nas escolas, quando afirma que “essa inovação radical sofreu as consequências do exagero, da precipitação e da improvisação e a Matemática Moderna não produziu os resultados pretendidos”.

Além disso, essa reforma deixou de considerar um ponto básico que viria tornar-se um de seu maior problema: o que se propunha estava fora do alcance dos alunos, em especial daqueles das séries iniciais do ensino fundamental.

Para contrapor ao MMM, surgiram as propostas curriculares para a Matemática do ensino fundamental. Nas propostas alternativas que surgiram percebia-se a preocupação com algumas concepções pedagógicas, tais como: abordagem histórica dos temas matemáticos e ênfase na compreensão de conceitos. E, além disso, mostrava-se uma grande preocupação com os aspectos cognitivos, levando-se em conta o desenvolvimento dos alunos.

Quanto ao destaque que foi conferido à Teoria dos Conjuntos, à linguagem simbólica, ao rigor e à precisão na linguagem matemática na época do MMM, deixou de prevalecer nas publicações dos novos livros didáticos de matemática.

Na década de 80, devido à influência das recomendações para o ensino de Matemática no documento “Agenda para Ação”³⁶ houve uma relevante reforma no ensino de Matemática não somente no Brasil, mas no mundo, pois, nele a resolução de problemas era destacada como o foco do ensino da Matemática, bem como a compreensão da relevância de aspectos sociais, antropológicos, linguísticos, além dos cognitivos, na aprendizagem da Matemática. Isto imprimiu novos rumos às discussões curriculares.

³⁶ NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (1983).

Assim, a partir da década de 80 os livros didáticos mudaram e aos poucos adquiriram outra configuração. Prezando por melhor qualidade dos livros didáticos distribuídos pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) a partir de 1996 teve início à avaliação oficial pedagógica e metodológica por equipes de especialistas cujos critérios são baseados nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN).

1.4 A MATEMÁTICA NOS PARÂMETROS CURRICULARES DO ENSINO FUNDAMENTAL

Mesmo diante de um movimento contínuo em busca de melhorias para mudar o quadro de insatisfação quanto aos resultados das avaliações nas escolas e das avaliações externas (nacionais) que apontam para a grande dificuldade na aprendizagem dos conhecimentos matemáticos escolares desde que esses resultados começaram a ser divulgados. Os Parâmetros Curriculares de Matemática (1998) nos reportam a essa realidade, na época de sua publicação.

Os movimentos de reorientação curricular ocorridos no Brasil a partir dos anos 20 não tiveram força suficiente para mudar a prática docente dos professores para eliminar o caráter elitista desse ensino bem como melhorar sua qualidade. Em nosso país o ensino de Matemática ainda é marcado pelos altos índices de retenção, pela formalização precoce de conceitos, pela excessiva preocupação com o treino de habilidades e mecanização de processos sem compreensão (BRASIL-PCN, 1998, p.19).

Observou-se que o ensino brasileiro passou por muitas transformações em épocas distintas, sofrendo influências políticas e econômicas, mas também decorrentes de pesquisas educacionais. Os efeitos das políticas curriculares suscitam muitas reflexões nos vários segmentos do sistema educacional.

E, para falar sobre o currículo é necessário definir o foco que se quer abordar, pois há muitos vieses a considerar. Neste estudo, nossas considerações a respeito do currículo referem-se à Matemática do Ensino Fundamental dos Anos Finais (EFAF) da Educação Básica.

Para Sacristã (2000, p. 15) quando se define o currículo está-se descrevendo a concretização das funções da própria escola e a forma particular de enfocá-las num momento histórico e social.

Além disso, convém considerar sobre que tipo de currículo está se tratando, pois como enfatiza Sacristã.

O currículo do ensino obrigatório não tem a mesma função que o de uma especialidade universitária, ou de uma modalidade de ensino profissional, e isso se traduz em conteúdos, formas e esquemas de racionalização interna diferentes, porque é diferente a função social de cada nível e peculiar realidade sócia e pedagógica que se criou historicamente em todo dos mesmos (SACRISTÃ, 2000, p. 15).

A elaboração dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) entre outras coisas visaram, por um lado, respeitar as diversidades regionais, culturais e políticas existentes no país e, por outro, considerar a necessidade de construir referências nacionais comuns ao processo educativo em todas as regiões brasileiras (BRASIL, 1998).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) são referenciais importantes para a discussão dos saberes escolares da Educação Básica, sendo destinado um especificamente para o Ensino da Matemática (PCNM). Dessa forma os PCNM tornaram-se importantes referenciais para a escolha dos conteúdos matemáticos que serão definidos para cada ciclo e série.

Os PCN apresentam os objetivos gerais do Ensino Fundamental para cada uma das oito áreas de conhecimento³⁷ e os objetivos específicos a cada um dos quatro ciclos: 1º ciclo (1ª e 2ª série), 2º ciclo (3ª e 4ª série), 3º ciclo (5ª e 6ª série) e 4º ciclo (7ª e 8ª série), além de apresentar os critérios de avaliação da área para cada ciclo, bem como orientações didáticas.

Interessa-nos observar o 3º ciclo (5ª e 6ª série), pois os conteúdos de divisibilidade são trabalhados particularmente nestas séries (ou melhor, anos, como são denominados atualmente). Dessa forma, iremos verificar que objetos do conhecimento matemático estão sendo indicados para o terceiro ciclo no PCNM (1988) e como os conteúdos de divisibilidade estão sendo considerados e quais são as orientações para seu ensino.

Contudo, não se pode esquecer que quando os alunos adentram a esse ciclo, encontram uma realidade bastante diferente. Os PCNM nos lembram sobre esse fato:

³⁷ Áreas de: Língua Portuguesa, Matemática, Ciências Naturais, História, Geografia, Arte, Educação Física e Língua Estrangeira (BRASIL, 1998).

Em termos de organização curricular, há uma grande ruptura nesse ciclo em relação ao que vinha sendo desenvolvido anteriormente, pois os conhecimentos passam a se dividir em disciplinas distintas umas das outras, abordadas de forma isolada. [...] no caso da Matemática, há uma forte tendência em fazer do primeiro ano deste ciclo (6ª série) um ano de revisão dos conteúdos estudados em anos anteriores. De modo geral, os professores avaliam que os alunos vêm do ciclo anterior com um domínio de conhecimentos muito aquém do desejável e acreditam que, para resolver o problema, é necessário fazer uma retomada dos conteúdos (BRASIL, 1998, p. 61).

Quanto ao ensino de Matemática os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCNM) visaram construir um referencial que orientasse a prática escolar a fim de contribuir para que toda criança e jovem brasileiro tivesse acesso ao conhecimento matemático de modo a possibilitar sua inserção, como cidadãos, no mundo do trabalho, das relações sociais e da cultura (BRASIL, 1998).

Uma de suas orientações relevantes é que o professor deve estimular os alunos a buscar explicações e finalidades para as coisas, discutindo questões relativas à utilidade da Matemática, como ela foi construída, como pode contribuir para a resolução de problemas do cotidiano como dos problemas ligados à investigação científica, passando assim o aluno a identificar os conhecimentos matemáticos como meios que o auxiliem a compreender e atuar no mundo.

Para tal, os PCNM deram indicações do trabalho que se deve ter com os números e operações aritméticas, inferimos que o trabalho com os conteúdos de divisibilidade está contido nestas indicações, embora não esteja explícito, pois nos estudos de múltiplos e divisores, critérios de divisibilidade e números primos, trabalham-se com sequências, padrões e regularidades.

Assim, é fundamental que os alunos ampliem os significados que possuem acerca dos números e das operações, busquem relações e existentes entre eles, aprimorem a capacidade de análise e de tomada de decisões. Que comecem a se manifestar. Também é necessário explorar o potencial crescente de abstração, fazendo com que os alunos descubram regularidades e propriedades numéricas, geométricas e métricas (BRASIL, 1988, p. 63).

Os objetivos de matemática para o terceiro ciclo elencados referem-se ao desenvolvimento do pensamento numérico, algébrico, geométrico e de competência métrica. Entretanto vamos relacionar apenas os 4 (quatro) objetivos relativos ao pensamento numérico:

- Ampliar e construir novos significados para os números – naturais, inteiros, racionais – a partir de sua utilização no contexto social e da análise de alguns problemas históricos que motivaram sua construção;
- Resolver situações-problema envolvendo números naturais, inteiros, racionais e a partir delas ampliar e construir novos significados da adição, subtração, multiplicação, divisão, potencialização e radiciação;
- Identificar, interpretar e utilizar diferentes representações dos números naturais, inteiros e racionais, indicadas por diferentes notações, vinculando-as aos contextos matemáticos e não-matemáticos;
- Selecionar e utilizar procedimentos de como (exato ou aproximado, mental ou escrito) em função da situação-problema proposta (BRASIL, 1998, p. 64).

Com relação aos números naturais, a recomendação expressa nos PCNM (1998) é que o aluno continue “a explorá-los em situações de contagem, de ordenação, de codificação em que tenha oportunidade de realizar a leitura escrita de números “grandes” e desenvolver uma compreensão mais consistente das regras que caracterizam o sistema de numeração que utiliza” (BRASIL, 1998, p. 66).

O campo da Aritmética é sempre mais abordado no terceiro ciclo, o que pode ser percebido nas avaliações na maioria dos livros didáticos escolhidos através do PNLD. Mas, apesar de haver muitos conteúdos abordando “números e operações” ainda há um resultado muito insatisfatório nas avaliações internas às escolas e externas a nível nacional a respeito do aprendizado do conhecimento matemático.

Este fato é reconhecido pelos PCNM que tentam justificar esses resultados, conforme a seguir:

Embora o estudo dos números e das operações seja um tema importante nos currículos do Ensino Fundamental, constata-se, com frequência, que muitos alunos chegam ao final desse curso com um conhecimento insuficiente dos números, de como eles são utilizados e sem ter desenvolvido uma ampla compreensão dos diferentes significados das operações. Provavelmente isso ocorre em função de uma abordagem inadequada para o tratamento dos números e operações e à pouca ênfase que tradicionalmente é dada a este assunto nos terceiro e quarto ciclo (BRASIL, 1998, p. 95).

Esta é uma das constatações encontradas nos PCNM (1998, p. 95) e, corroborada por vários pesquisadores da Educação Matemática e do Ensino de

Matemática³⁸, o que nos conduzem à reflexão sobre como estão sendo tratados os conteúdos de divisibilidade nos livros didáticos.

Dentre os aspectos do tratamento habitualmente dado ao estudo dos números naturais nos ciclos finais do Ensino Fundamental que comprometem sua aprendizagem, segundo os PCNM (1998, p. 97) há uma referência ao conteúdo de divisibilidade, como é o caso “do trabalho centrado nos algoritmos, como o cálculo do mmc e do mdc sem a compreensão dos conceitos e das relações envolvidos e da identificação de regularidades que possibilitem ampliar a compreensão acerca dos números”.

Contudo, encontram-se nos próprios PCNM (1998, p. 112) alguns aspectos que podem ser considerados ao se trabalhar com os significados das operações para que não ocorra a aprendizagem mecânica com a aplicação de algoritmos, tais como:

- Identificar os grupos de problemas que os alunos resolveram em ciclos anteriores, com o objetivo de consolidar alguns deles e ampliar outros;
- Modificar intencionalmente algumas informações (tipos de números e grandezas envolvidas) numa determinada situação-problema com o objetivo de mobilizar novos conhecimentos para que os alunos ampliem os significados das operações;
- Estimular a busca de diferentes procedimentos para solucionar um problema e favorecer a análise e a comparação desses procedimentos no que se refere a sua validade, economia e praticidade.

Além do que já foi explanado sobre o estudo dos Números e Operações, há algumas considerações sobre a importância do estudo do cálculo, em suas diferentes modalidades, principalmente nos 3º e 4º ciclos, que se justifica também pelo fato de que é uma atividade básica para o desenvolvimento das capacidades cognitivas do aluno, visto que:

- Possibilita o exercício de capacidades como memória, dedução, análise, síntese, analogia e generalização;
- Permite a descoberta de princípios matemáticos como a equivalência, a decomposição, a igualdade, a desigualdade e a compreensão da estrutura do sistema de numeração decimal;
- Favorece o desenvolvimento da criatividade, da capacidade para tomar decisões e de atitudes de segurança para resolver problemas numéricos cotidianos (BRASIL, 1998, p. 114).

³⁸ Professores pesquisadores formados pelos Mestrados Profissionais de Ensino de Matemática, principalmente o PROFMAT, visto que este Programa visa atender prioritariamente professores de Matemática em exercício na Educação Básica, especialmente em escolas públicas, que busquem aprimoramento da formação profissional, com ênfase no domínio aprofundado de conteúdo matemático relevante para sua docência. Ver relação de dissertações no Apêndice A.

A recomendação dos PCNM (1998, p. 115) é que se retomem nos terceiro e quarto ciclos o estudo da Aritmética pela via da construção dos significados das operações e pela construção e análise de procedimentos de cálculo, pois é fundamental que os alunos compreendam que esse campo da Matemática tem trazido diversas contribuições à história e à cultura e que atualmente constitui um suporte para a linguagem universal da informática (códigos numéricos, representações fracionárias e percentuais).

1.5 A MATEMÁTICA NA BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR (BNCC) DO ENSINO FUNDAMENTAL DOS ANOS FINAIS

Através da BNCC perceberemos como a Matemática está inserida no Ensino Fundamental dos Anos Finais. A BNCC foi prevista tanto na Constituição de 1988 como na LDB de 1996 e no Plano Nacional de Educação de 2014 e, foi um longo caminho percorrido para se chegar a esse documento que norteará os rumos da Educação Básica de nosso país (BRASIL, 2017).

Segundo o MEC (2017) com a BNCC, as redes de ensino e instituições escolares públicas e particulares passam a ter uma referência nacional obrigatória para a elaboração ou adequação de seus currículos e propostas pedagógicas.

1.5.1 O que é a BNCC e o que ela traz para a Educação Básica?

O Conselho Nacional de Educação aprovou no dia 15 de dezembro de 2017 a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento normativo que estabelece com clareza os processos essenciais que os alunos devem desenvolver em cada etapa da Educação Básica brasileira para assegurar os seus direitos de aprendizagem.

Com esta norma, o Brasil terá pela primeira vez uma Base Nacional Comum Curricular do Ensino Fundamental que servirá de parâmetro para a construção dos currículos de todas as escolas públicas da rede de ensino da educação básica brasileira.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2017 p. 7) é um documento de caráter normativo³⁹ que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica,

de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE) e, está orientada pelos princípios éticos, políticos e estéticos que visam à formação humana integral e à construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, como fundamentado nas diretrizes Curriculares da Educação Básica (DCN).

Ao longo da educação Básica, as aprendizagens essenciais definidas na BNCC devem concorrer para assegurar aos estudantes o desenvolvimento de dez **competências**⁴⁰ **gerais** (Anexo A), que consubstanciam, no âmbito pedagógico, os direitos de aprendizagem e desenvolvimento.

As dez competências elencadas na BNCC traduzem a necessidade de uma formação que pense no sujeito de forma integral, perpassando por todas as etapas e modalidades de ensino e promovendo a progressão entre elas, o que se pressupõe um desenvolvimento integral. Desse modo, se reconhece que a Educação Básica deve visar à formação e ao desenvolvimento humano global, o que implica compreender a complexidade e a não linearidade desse desenvolvimento, rompendo com visões reducionistas que privilegiam ou a dimensão intelectual (cognitiva) ou a dimensão afetiva. (BNCC, 2017, p. 14).

Mas, apesar dessa proposta trazer em seu bojo uma visão mais ampla para o atendimento às várias dimensões humanas voltadas à educação, a realidade ainda é bem diferente no que diz respeito ao agrupamento dos alunos nas classes, como enfatiza D'Ambrósio (2004, p. 28) “lamentavelmente, ainda há relutância no reconhecimento das relações intraculturais na educação, pois ainda se insiste em colocar crianças em séries de acordo com idade e em oferecer numa mesma série o mesmo currículo”.

³⁹ Este documento normativo aplica-se exclusivamente à educação escolar, tal como a define o §1º do Artigo 1º da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, Lei nº 9.394/1996).

⁴⁰ Para a BNCC, **competência** é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.

Não podemos esquecer que o currículo é elaborado numa cultura e a partir desta, ou seja, a cultura está vinculada ao capital econômico, e este à necessidade de uma formação social hegemônica. Portanto, não há neutralidade, há um conhecimento oficial na elaboração curricular que serve ao capital (NORONHA; GHEDIN, 2007, p. 46).

Além disso, a BNCC e currículos têm papéis complementares para assegurar as aprendizagens essenciais definidas para cada etapa da Educação Básica, uma vez que tais aprendizagens só se materializam mediante o conjunto de decisões que caracterizam o currículo em ação. São essas decisões que vão adequar as proposições da BNCC à realidade local (BNCC, 2017, p. 16).

Percebemos que a BNCC se baseia numa visão mais humana e social e reconhece que a educação tem um compromisso com a formação e o desenvolvimento humano global, em suas dimensões intelectual, física, afetiva, social, ética, moral e simbólica (BNCC, 2017, p. 16).

A BNCC (2017) contempla os Ensino Fundamental dos anos iniciais e anos finais, e ambos, estão organizados em Unidades Temáticas, Objetos de Conhecimento e Habilidades.

Os conteúdos que compõem a base nacional comum e a parte diversificada têm origem nas disciplinas científicas, no desenvolvimento das linguagens, no mundo do trabalho e na tecnologia, na produção artística, nas atividades desportivas e corporais, na área da saúde, nos movimentos sociais, e ainda incorporam saberes como os que advêm das formas diversas de exercício da cidadania, da experiência docente, do cotidiano e dos alunos (BNCC, 2017).

Dessa forma, os conteúdos sistematizados que fazem parte do currículo são denominados *componentes curriculares*, os quais, por sua vez, se articulam às *áreas de conhecimento*, a saber: Linguagens, Matemática, Ciências da Natureza, Ciências Humanas e Ensino Religioso.

1.5.2 A Matemática no Ensino Fundamental dos Anos finais no contexto da Educação Básica a partir da BNCC

A escola constitui a principal e, muitas vezes, a única forma de acesso ao conhecimento sistematizado para a grande maioria da população. Esse dado aumenta

a responsabilidade do Ensino Fundamental na sua função de assegurar a todos a aprendizagem dos conteúdos curriculares capazes de fornecer os instrumentos básicos para a plena inserção na vida social, econômica e cultural do país.

Segundo a BNCC (2017, p. 263) no Ensino Fundamental, a Matemática, por meio da articulação de seus diversos campos – Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade e Medidas, precisa garantir que os alunos relacionem observações empíricas do mundo real e representações (tabelas, figuras e esquemas) e associem essas representações a uma atividade matemática (conceito, propriedades), fazendo induções e conjecturas.

Assim, espera-se que eles desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter situações e interpretá-las segundo os contextos das situações.

Cada área do conhecimento estabelece competências específicas da área, cujo desenvolvimento deve ser promovido ao longo dos nove anos. Essas competências específicas (Quadro 6) possibilitam a articulação horizontal entre as áreas perpassando todos os componentes curriculares, e também articulação vertical, ou seja, progressão entre os níveis de ensino fundamental e a continuidade das experiências dos alunos considerando suas especificidades.

Quadro 6: Competências Específicas de Matemática Conforme a BNCC do Ensino Fundamental

Competências Específicas de Matemática para o Ensino Fundamental
1. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho. 2. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo. 3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.

Quadro 6: Continuação.

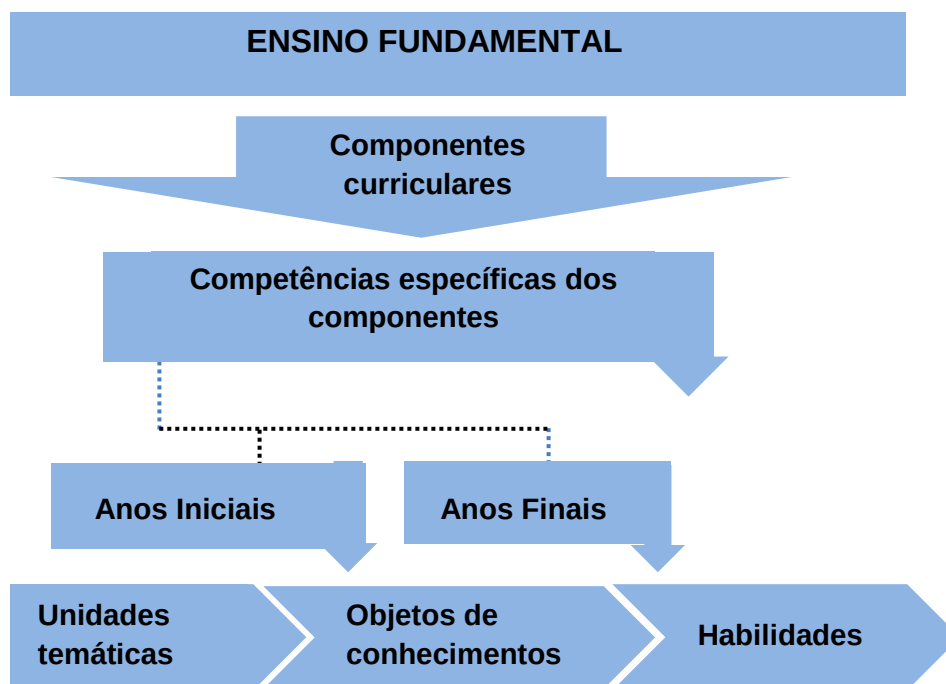
Competências Específicas de Matemática para o Ensino Fundamental	
4.	Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.
5.	Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
6.	Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.
7.	Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.
8.	Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.
9.	Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).
10.	Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza.
11.	Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

Fonte: BNCC (2017, p. 265).

Para que o aluno alcance as competências propostas na BNCC, o documento propõe um conjunto de habilidades. Essas habilidades estão relacionadas aos diferentes objetos de conhecimento – aqui entendidos como conteúdos, conceitos e processos – que, por sua vez, são organizados em cinco unidades temáticas correlacionadas, que deverão ser desenvolvidas durante todo o Ensino Fundamental. Cada uma delas pode receber ênfase diferente, a depender do ano de escolarização.

O Ensino Fundamental dos Anos Finais de acordo com a BNCC tem sua estrutura formatada conforme Figura 1.

Figura 1: A Estrutura do Ensino Fundamental de Acordo com a BNCC



Fonte: Adaptado da BNCC (2017, p. 28)

De acordo com a BNCC (2017, p. 29) as habilidades expressam as aprendizagens essenciais que devem ser asseguradas aos alunos nos diferentes contextos escolares. Para tanto, elas são descritas de acordo com a seguinte estrutura: **EF67MA01** – o primeiro par de letras (EF) indica a etapa de Ensino Fundamental; o primeiro par de números indica o ano (01 a 09) a que se refere à habilidade; o segundo par de letras indica o componente curricular (AR = Arte; CIÊNCIA = Ciências; EF = Educação Física; ER = Ensino Religioso; GE = Geografia; HI = História; LI = Língua Inglesa; LP = Língua Portuguesa; MA = Matemática). O último par de números indica a posição da habilidade na numeração sequencial do ano ou do bloco de anos.

Segundo esse critério, o código EF67MA01, por exemplo, refere-se à primeira habilidade proposta em Matemática no bloco relativo ao 6º e 7º ano do Ensino Fundamental dos Anos Finais.

Vale destacar que os *critérios de organização das habilidades* descritos na BNCC (com a explicitação dos objetos de conhecimento aos quais se relacionam e do agrupamento desses objetos em unidades temáticas) expressam um arranjo possível (entre outros). Portanto, os agrupamentos propostos não devem ser tomados como modelo obrigatório para o desenho dos currículos (BNCC, 2017, p. 31).

Ao contrário dos Parâmetros Curriculares Nacionais a BNCC além de apresentar as cinco unidades temáticas, distribui nos quatro anos os conteúdos e suas habilidades correspondentes.

Para o Ensino Fundamental dos Anos Finais a aprendizagem em Matemática, assim como na fase anterior, também está intrinsecamente relacionada à apreensão de significados dos objetos matemáticos. Esses significados resultam das conexões que os alunos estabelecem entre os objetos e seu cotidiano, entre eles e os diferentes temas matemáticos e, por fim, entre eles e os demais componentes curriculares. Nessa fase, precisa ser destacada a importância da comunicação em linguagem matemática com o uso da linguagem simbólica, da representação e da argumentação (BNCC, 2017, p.296).

A seguir apresentaremos parcialmente os quadros do 6º e 7º anos, contendo somente a unidade temática “Números” e os “objetos de conhecimento” correspondentes, assim como as “habilidades”, referentes aos conteúdos de divisibilidade, seguindo o modelo do quadro apresentado na BNCC. Os quadros completos encontram-se no Anexo B e C.

A Unidade Temática Números, segundo a BNCC do Ensino Fundamental (2017), de maneira geral tem a finalidade de:

Desenvolver o pensamento numérico, que implica o conhecimento de maneiras de quantificar atributos de objetos e de julgar e interpretar argumentos baseados em quantidades. No processo da construção da noção de número, os alunos precisam desenvolver, entre outras, as ideias de aproximação, proporcionalidade, equivalência e ordem, noções fundamentais de matemática. Para essa construção é importante propor, por meio de situações significativas, sucessivas ampliações dos campos numéricos. Nos estudos desses campos numéricos, devem ser enfatizados registros, usos, significado e operações (BNCC, 2017, p. 266).

Entretanto, com referência à Matemática do Ensino Fundamental dos Anos Finais, conforme a BNCC tem-se a seguinte expectativa:

Que os alunos resolvam problemas com números naturais, inteiros e racionais, envolvendo as operações fundamentais, com seus diferentes significados, e utilizando estratégias diversas, com compreensão dos processos neles envolvidos. [...] espera-se que saibam reconhecer, comparar e ordenar números reais, com apoio da relação desses números com pontos na reta numérica (BNCC, 2017, 267)

Além disso, a BNCC (2017, p. 267) destaca que o desenvolvimento do pensamento numérico não se completa, evidentemente, apenas com objetos de estudos descritos na unidade Números, mas que deve haver uma interação com as diversas Unidades Temáticas, bem como com os conteúdos subjacentes ao seu próprio campo.

1.5.3 A Matemática como Componente Curricular na Educação Básica

Como alunos primeiramente e depois, como professores, progredimos na vida acadêmica tendo como referência a palavra “disciplina de Matemática”, por exemplo. O que são disciplinas escolares? O que elas significam no contexto escolar?

Para Lopes e Macedo (2002) apud Resende (2007) as disciplinas escolares são instituições sociais, espaços que definem caminhos para a formação dos alunos, garantem status aos professores e o atendimento a padrões sociais externos.

O termo disciplina escolar como a entendemos atualmente é recente, pois até o século XIX estava ligado à ideia de ordem, de vigilância e de repressão de condutas indesejáveis. Na visão de Chervel (1990).

Uma “disciplina” é igualmente, para nós, em qualquer campo que se a encontre, um modo de disciplinar o espírito, quer dizer, de lhe dar os métodos e as regras para abordar os diferentes domínios do pensamento, do conhecimento e da arte (CHERVEL, 1990, p. 182).

A relevância de uma disciplina no contexto escolar é inquestionável, mas sabemos que esta importância transcende os muros da escola, refletindo diretamente na sociedade, visto que uma disciplina não comporta apenas o estudo dos conteúdos, a leitura de livros-textos, há muitas variáveis que são envolvidas, como a relação professor-aluno, professor-saber e aluno-saber no processo de ensino e aprendizagem que permeia uma disciplina.

Para Resende (2007, p. 45) o termo disciplina escolar é utilizado pela maioria dos pesquisadores e teóricos do campo educacional, para designar os componentes dos currículos da escola básica, ou de níveis equivalentes.

Encontramos evidências do termo “disciplina” ao que hoje se nomeia de “componente curricular” e “matéria” ao que hoje é designado por “Área de conhecimento” na Lei nº 5.692⁴¹, em seus artigos 4º e 5º.

Art.4º. Os currículos do ensino de 1º e 2º graus terão um núcleo comum, obrigatório em âmbito nacional, e uma parte diversificada para atender conforme as necessidades e possibilidades concretas, às peculiaridades locais, aos planos dos estabelecimentos e às diferenças individuais dos alunos.

§ 1º Observar-se-ão as seguintes prescrições na definição dos conteúdos curriculares: O Conselho Federal de Educação fixará para cada grau as **matérias relativas ao núcleo comum**, definindo os objetivos e a amplitude; Os Conselhos de Educação relacionarão, para os respectivos sistemas de ensino, **as matérias** dentre as quais poderá cada estabelecimento escolher as que devem constituir a parte diversificada.

Art. 5º. As disciplinas, áreas de estudo e atividades que resultem das matérias fixadas na forma do artigo anterior, com as disposições necessárias ao seu relacionamento, ordenação e sequência, constituirão para cada grau o currículo pleno do estabelecimento (BRASIL, 1971) [Grifo nosso].

Segundo Santos (2013) A Resolução nº 8 do Conselho Federal de Educação, de 1º de dezembro de 1971, derivada do Parecer 853/71⁴², estabelecia as matérias que formavam o núcleo comum e as disciplinas obrigatórias das matérias fixadas. Nessa Resolução, destacamos também a indicação de que as matérias seriam trabalhadas no currículo de forma integrada e obedecendo a um escalonamento em consonância com o amadurecimento do aluno:

Art.1º. O núcleo-comum a ser incluído, obrigatoriamente, nos currículos plenos do ensino de 1º e 2º graus abrangerá as seguintes matérias:

- a) Comunicação e Expressão
- b) Estudos Sociais
- c) Ciências

§ 1º Para efeito da obrigatoriedade atribuída ao núcleo-comum, incluem-se como conteúdos específicos das matérias fixadas: em Comunicação e Expressão – a Língua Portuguesa; nos Estudos Sociais – a Geografia, a História e a Organização Social e Política do Brasil; nas Ciências – a Matemática e as Ciências Físicas e Biológicas.

⁴¹ Congresso Nacional. Lei nº 5.692 de 11.8.1971 – Fixa as diretrizes e bases para o ensino de 1º e 2º graus e dá outras providências. (BRASIL, 1971). Esta Lei muda também a denominação que antes era primário e ginásio, bem como altera a quantidade de horas, passando para oito anos (ou 720 horas de atividades anuais) para o ensino de primeiro grau e três anos para o segundo grau.

⁴² (BRASIL, 1971b). Conselho Federal de Educação. Câmara de Ensino de 1º e 2º graus. Núcleo-comum para os currículos do ensino de 1º e 2º Graus. A doutrina do currículo na Lei nº 5.692. Parecer nº 853/71, aprovado em 12.11.1971.

Como podemos observar, no acima exposto. A Reforma Educacional ocorrida na década de 70, através da Lei nº 5.692 (1971) e parecer Nº 853/719 do Conselho Federal de Educação trouxe mudanças significativas para o sistema de ensino brasileiro. A disciplina Matemática estava inserida na “Matéria” Ciências.

Uma nova e relevante mudança ocorreu no sistema educacional brasileiro, especificamente no Ensino Fundamental, alterando a organização curricular, a partir da Resolução nº 4 de 13 de julho de 2010. Esta resolução prevê, em seu parágrafo 1º e 2º que o currículo e a organização da proposta curricular, devem:

§ 1º – O currículo deve difundir os valores fundamentais do interesse social, dos direitos e deveres do cidadão, do respeito ao bem comum e à ordem democrática, considerando as condições de escolaridade dos estudantes em cada estabelecimento, a orientação para o trabalho, a promoção de práticas educativas formais e não-formais.

§ 2º Na organização da proposta curricular deve-se assegurar o entendimento de currículo como experiências escolares que se desdobram em torno do conhecimento, permeadas pelas relações sociais, articulando vivências e saberes dos estudantes com os órgãos do poder público, na busca de parcerias possíveis e necessárias, até porque educar é de responsabilidade da família, do Estado e da sociedade (BRASIL, 2010).

Quanto aos conhecimentos e saberes para a Educação Básica a Resolução nº 4 traz em seu Capítulo II (Formação básica comum e parte diversificada⁴³). De acordo com o Art. 14 A base comum na Educação Básica constitui-se de conhecimentos, saberes e valores produzidos culturalmente, expressos nas políticas públicas e gerados nas instituições produtoras do conhecimento científico e tecnológico; no mundo do trabalho; no desenvolvimento das linguagens; nas atividades desportivas e corporais; na produção artística; nas formas diversas de exercícios da cidadania; e nos movimentos sociais.

No parágrafo segundo, a Resolução nº 4, diz como os componentes curriculares da BNCC devem ser organizados.

Tais componentes curriculares são organizados pelos sistemas educativos, em forma de áreas de conhecimento, *disciplinas*, eixos temáticos, preservando-se a especificidade dos diferentes campos do conhecimento, por meio dos quais se desenvolvem as habilidades indispensáveis ao exercício da cidadania, em ritmo compatível com as etapas do desenvolvimento integral do cidadão (BRASIL, 2010). [Grifo nosso].

⁴³ A parte diversificada pode ser organizada em temas gerais, na forma de eixos temáticos, selecionados colegiadamente pelos sistemas educativos ou pela unidade escolar (Art. 15, § 1º da Resolução nº 4 de 13 de julho de 2010).

No segundo parágrafo da Resolução Nº 4, podemos observar a palavra “disciplina” (sem, contudo, haver qualquer definição), mas entendemos que seja usada da forma como a vemos no contexto curricular, um conjunto de conteúdos que compõem uma determinada área de conhecimento, como por exemplo, matemática. Entretanto, a disciplina escolar não pode se resumir em apenas considerar os conteúdos de uma determinada área de conhecimento, mas sim, a prática docente, as estratégias, produção de recursos didáticos e criação de novas abordagens e práticas metodológicas que visem a melhoria do ensino.

Outra mudança significativa ocorrida a partir desta Resolução diz respeito às etapas da Educação Básica, conforme Art. 15, passam a ser:

- I – A Educação Infantil, que compreende a Creche, englobando as diferentes etapas do desenvolvimento da criança até 3 (três) anos e 11 (onze) meses; e a Pré-Escola, com duração de 2 (dois) anos;
- II – O Ensino Fundamental, obrigatório e gratuito, com duração de 9 (nove) anos, é organizado e tratado em duas fases: a dos 5 (cinco) anos iniciais e a dos 4 (quatro) anos finais;
- III – o Ensino Médio, com duração mínima de 3 (três) anos.

Um dos pontos relevantes desta Resolução é que considera, em seu Art. 42, como elementos constitutivos para a operacionalização das Diretrizes para a Educação Básica: o projeto político-pedagógico e o regimento escolar; o sistema de avaliação; a gestão democrática e a organização da escola; o professor e o programa de formação docente.

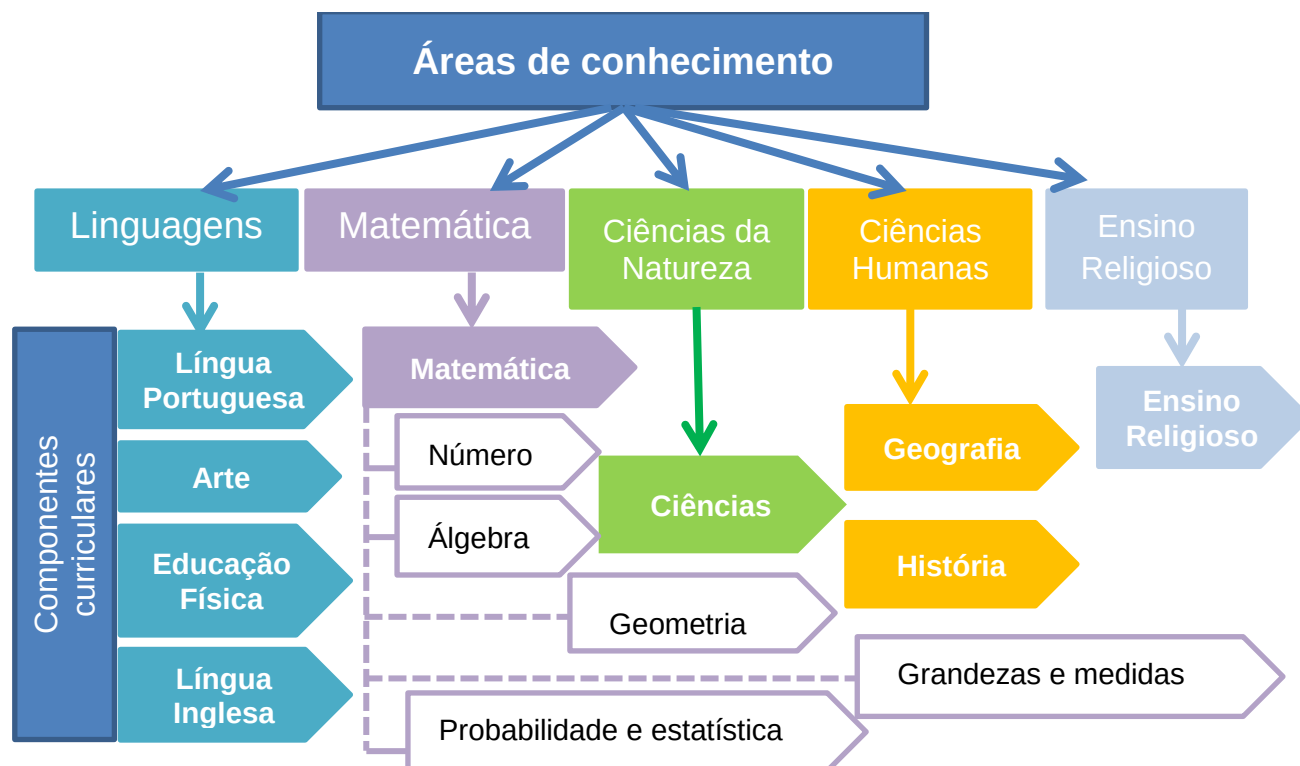
Isto nos mostra o quanto a Escola é importante para o cumprimento dessas diretrizes, então, com isso os professores passam a ter grande responsabilidade em proporcionar aos estudantes uma educação de qualidade, mas é claro que esta não é uma responsabilidade somente deles, mas aqui enfatizamos que também o é e por isso têm que cuidar para ter uma boa formação inicial e continuada.

Quanto ao termo “disciplina escolar” queremos enfatizar que este termo não é mais usado nos documentos educacionais oficiais, mais recentes como a BNCC (2017), posto que provavelmente foi substituída por “Componente Curricular”.

Os componentes curriculares tanto para o Ensino Fundamental tanto dos anos iniciais (1º ao 5º ano) como para os dos anos finais (6º ao 9º ano) são 9 (nove), derivados das cinco Áreas de Conhecimento: Linguagens, Matemática, Ciências da

Natureza, Ciências Humanas e Ensino Religioso. Por sua vez, os “conteúdos” são denominados “objetos de conhecimento”. Conforme Figura 2.

Figura 2: Áreas de Conhecimento com os seus Respectivos Componentes Curriculares do Ensino Fundamental



Fonte: BNCC (2017). Adaptado pela autora.

Como podemos observar na Figura 2, o Ensino Fundamental está composto por cinco Áreas de Conhecimento e cada área tem seus “**componentes curriculares**”. Só há três componentes curriculares com o mesmo nome de suas áreas de conhecimento (Matemática, Ciências e Ensino Religioso).

Em nosso estudo trataremos do “**Componente Curricular Matemática**” que está dividido em cinco **Unidades Temáticas**: Número, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística.

Na sequência, cada uma das cinco Unidades Temáticas de Matemática têm os objetos de conhecimento (conteúdos) e estes, por sua vez, as várias habilidades descritas e identificadas por um código, por exemplo, (EF06MA01), diz respeito à primeira habilidade do Ensino Fundamental do sexto ano de matemática.

Também se diz que os conhecimentos produzidos nos diversos componentes curriculares, para adentrarem a escola são recontextualizados de acordo com a lógica que preside as instituições escolares. Uma vez que as escolas são instituições destinadas à formação das crianças, jovens e adultos, os conhecimentos escolares dos diferentes componentes, além do processo de didatização que sofrem, passam a trazer embutido um sentido moral e político (BRASIL, 2010).

Não podemos deixar de considerar que os conhecimentos escolares podem ser compreendidos como o conjunto de conhecimentos que a escola seleciona e transforma, no sentido de torná-los passíveis de serem ensinados, ao mesmo tempo em que servem de elementos para a formação ética, estética e política do aluno (BRASIL, 2010).

As instâncias que mantêm, organizam, orientam e oferecem recursos à escola, como o próprio Ministério da Educação, as Secretarias de Educação, os Conselhos de Educação, assim como **os autores de materiais e livros didáticos**, transformam o conhecimento acadêmico, segmentando-o de acordo com os anos de escolaridade, ordenando-o em unidades e tópicos e buscam ainda ilustrá-lo e formulá-lo em questões para muitas das quais já se têm respostas (BRASIL, 2010). [Grifo nosso].

Esse processo em que o conhecimento de diferentes áreas sofre mudanças, transformando-se em conhecimento escolar, tem sido chamado de *transposição didática* (BRASIL, 2010).

CAPÍTULO 2

TRANSPosição DIDÁTICA: DO SABER CIENTÍFICO PARA O SABER ESCOLAR

As discussões sobre os diferentes tipos de saberes têm estado presente no meio educacional e acadêmico desde o final do século XX, mas tem se intensificado nesta última década do século XXI. As relações entre o saber científico e o saber escolar e o modo desses saberes serem trabalhados nos meios acadêmicos e escolares também tem permeado as pesquisas na área da educação e do ensino.

Para o estudo da transposição didática de um saber sábio (científico) a um saber a ser ensinado (escolar) nos fundamentamos na Teoria Antropológica do Didático e na Transposição Didática, de Yves Chevallard (1985, 1991).

Neste capítulo, trataremos dos conceitos sobre esses saberes e como alguns pesquisadores da Educação Matemática abordaram esses saberes no ensino de matemática, com o objetivo de fundamentar nosso estudo, visto que consideramos haver uma transposição do saber científico sobre divisibilidade (trabalhado no ensino superior na disciplina Teoria dos Números) para o saber escolar trabalhado em sala de aula através do livro didático de matemática.

Neste estudo consideramos alguns conceitos e classificações referentes ao contexto do ensino de matemática elaborados por Chevallard. Entretanto, ressaltamos que a relação professor-aluno não é o foco de nosso estudo, mas sim a relação saber escolar-livro didático, sem desconsiderar o quanto a presença do professor neste contexto é relevante para que de fato haja a transposição didática do saber científico ao saber escolar.

2.1 SABER “SÁBIO” OU SABER CIENTÍFICO E SABER ESCOLAR

Em nosso estudo consideramos que a palavra saber é sinônimo de conhecimento. O dicionário didático de língua portuguesa (2011, p. 739)⁴⁴, traz vários significados, escolhemos dois desses significados para a palavra “saber”: (1) instrução ou acúmulo de conhecimentos sobre um assunto, uma ciência ou uma arte. SIN (Sinônimo). Sabedoria. (2) ter fluência ou desenvoltura sobre (um assunto ou uma área do conhecimento), especialmente se adquirido por meio de estudo. SIN. Conhecer. Dessa forma, vamos considerar os termos saber e conhecimento como palavras sinônimas.

Atualmente lidamos com um grande número de informações. Os estudantes são influenciados por todo tipo de informação por vários meios tecnológicos, entretanto, informação não é conhecimento. Sobre isso Ghedin (2017, p. 11) se posiciona que o conhecimento é um movimento de terceira ordem em relação à informação.

O conhecimento exige a produção da informação, a organização do registro e a interpretação do registro na relação com a produção da informação. Além disso, o conhecimento só se torna possível quando as informações são trabalhadas, refletidas, reelaboradas à luz da problematização ao produzir a própria informação, seu registro, observação, experimentação e organização (GHEDIN, 2017, p.11).

Ou seja, conhecer é um exercício que implica saber lidar com as informações disponíveis, tendo-se questões que mobilizem nossa ação consciente (GHEDIN, 2017, p. 11)

Este conhecer (saber) não se aplica apenas no ambiente acadêmico e, nem tampouco no ambiente escolar, mas na vida que deve ser vivenciada em busca da melhor qualidade, quer seja educacional, social, ética e humana.

Ou seja, a concepção de saber não se restringe ao conhecimento científico, nem ao conhecimento escolar. São várias as formas de saber, como o saber matemático, o saber cultural, o saber de uma determinada tradição. Mas, quando se trata de uma disciplina acadêmica, nos vem à mente a concepção de um saber científico.

⁴⁴ Dicionário da língua portuguesa para o ensino fundamental disponibilizado pelo PNLD 2012.

De acordo com Resende (2007, p. 44), a maioria dos trabalhos e dos textos que tratam dos saberes se preocupa com a discussão da relação entre os saberes científicos e os saberes escolares, esses últimos entendidos como os veiculados nas escolas de educação básica ou nos níveis equivalentes em outros países.

Ressaltamos que os documentos oficiais brasileiros que constituíram algumas reformas na Educação Básica assinalavam essa preocupação com esses saberes. Na reforma ocorrida na década de 70, pela Lei 5.692 e o Parecer nº 853/71⁴⁵, conforme Santos (2014), “a análise do Parecer 853/71 nos permite afirmar que os conselheiros, ao trabalharem com o conceito de amplitude das matérias e criarem o núcleo comum, apresentavam a seguinte visão de ensino”:

Que considera uma diferenciação **entre o saber científico ou acadêmico e o saber em sua forma escolarizada, representado hoje pela categoria de análise *saber escolar***, que leva em conta a existência de uma diferença entre o conhecimento vivenciado na escola e aquele desenvolvido na academia (SANTOS, 2014).

O saber científico, na visão de Chevallard (1991) é identificado por **saber sábio**, diferente do saber escolar. Enquanto o primeiro se preocupa com os estudos científicos e validações de hipóteses, principalmente em ambientes acadêmicos, o segundo está associado à forma didático-pedagógica para ser apresentado aos estudantes.

Entretanto, estamos tratando especificamente do saber matemático, por isso buscamos a partir das concepções de Chevallard uma posição sobre o saber matemático científico e o saber matemático escolar. Como se dá essa relação e como se realiza o processo dessa interação ou transformação ou, melhor dizendo, da transposição de um saber a outro.

2.2 A TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA SEGUNDO CHEVALLARD

Consideramos relevante o aporte teórico da Transposição Didática segundo Chevallard por envolver um saber escolar decorrente de um saber científico

⁴⁵ (BRASIL, 1971b). Conselho Federal de Educação. Câmara de Ensino de 1º e 2º graus. Núcleo-comum para os currículos do ensino de 1º e 2º Graus. A doutrina do currículo na Lei nº 5.692. Parecer nº 853/71, aprovado em 12.11.1971 (de autoria do Conselheiro Valnir Chagas).

assimilado pelos professores de matemática nos cursos de Licenciatura em Matemática através da disciplina acadêmica Teoria dos Números que é apresentado como um saber científico.

Dentro de um panorama internacional de estudos sobre Educação Matemática, vem ganhando destaque o estudo da transposição didática que se situa no campo da Didática da Matemática.

Yves Chevallard escreve sobre a transposição didática⁴⁶ em um artigo intitulado “*transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné*”, publicado em 1985. Neste artigo, ele observou a relação que existe entre professor, aluno e o saber matemático. Estes três “lugares” formam o que ele denominou “um sistema didático” e a relação ternária que existe entre estes três polos, ele classificou de relação didática.

Como já mencionamos no início do capítulo, consideramos as palavras saber e conhecimento como sinônimas, entretanto, para Chevallard (2002), saber e conhecimento têm definições diferentes, mas estão associados, uma vez que o conhecimento está vinculado a um saber pelo princípio “saber-fazer”, assim como todo saber associa-se ao conhecimento decorrente de alguma tarefa em um contexto institucional.

O conceito de transposição didática refere-se à passagem que existe entre o saber sábio para o saber ensinado e à obrigatória distância que separa estes dois saberes. Assim, verifica-se uma transposição didática quando os elementos do saber sábio passam para o saber ensinado. Chevallard entende que a transposição didática remete à ideia de reconstrução nas condições ecológicas do saber.

Para ilustrar esta ideia, ele usa como exemplo, uma peça musical que originalmente é interpretada através de um violino e deverá ser interpretada através de um piano. Sendo que é a mesma peça musical e a mesma música, porém será escrita de maneira diferente para poder ser interpretada por outro instrumento.

Conforme Chevallard,

Um conteúdo do saber sábio que tenha sido designado como saber a ensinar sofre a partir disso um conjunto de transformações adaptativas que o tornarão apto para estar entre os objetos de ensino. O “trabalho” que um objeto de

⁴⁶ Embora a expressão “transposição didática” tenha sido utilizada inicialmente pelo sociólogo francês Michel Verret em sua tese de doutorado, em 1975, que tratava da distribuição do tempo das atividades escolares. Chevallard, dez anos mais tarde, aborda este termo com outro significado.

saber a ensinar é submetido para transformá-lo em um objeto de ensino chama-se transposição didática (CHEVALLARD, 1991, p. 45) (tradução nossa).

Desse modo, temos que a Transposição Didática se constitui em um conjunto de processos adaptativos que transforma um objeto do saber sábio em um objeto de ensino, ou seja, em saber a ensinar.

Figura 3: O Processo da Transposição Didática



Fonte: elaborado pela autora a partir da definição de Chevallard (1985, 1991).

Chevallard faz outra distinção de transposição didática. Distingue a *transposição didática “stricto sensu”* da *transposição didática “lato sensu”*. A primeira consiste na passagem de um conteúdo do saber sistematizado para uma versão didática deste objeto do saber (1985, p. 39). A segunda pode ser representada pelo Esquema 1, segundo Chevallard:

Esquema 1: O Processo da Transposição Didática

Objeto de saber → objeto a ensinar → objeto de ensino

Essa relação perpassa o processo de ensino e aprendizagem, pois se retirar um dos objetos, não se concretiza o ato de ensinar.

Segundo Resende (207) um objeto de saber só é introduzido no sistema didático se ele for considerado útil à economia dos sistemas didático, o que não significa que, uma vez estabelecido como objeto a ensinar, não sofra outras transposições.

2.2.1 A O saber matemático na visão de Chevallard.

No que diz respeito ao ensino de Matemática, Chevallard, a partir da transposição didática situa o saber matemático no centro das atenções e procura se inserir na elaboração de um projeto de análise epistemológica do regime didático do saber.

Assim, para estudar o saber, Chevallard (1991) diferencia e conceitua três noções: as noções matemáticas, as noções paramatemáticas e as noções protomatemáticas.

As noções matemáticas são objetos/conteúdos matemáticos, como por exemplo, o conteúdo de divisibilidade, a partir de sua definição e propriedades.

Chevallard caracteriza como objetos de saber, por exemplo, as noções matemáticas que o professor pretende que o aluno seja capaz de: definir, refazer a construção, de dar as suas propriedades e demonstrá-las, etc.

As noções paramatemáticas são objetos de saber auxiliares, necessários ao ensino dos objetos matemáticos propriamente ditos, ou seja, não se constituem diretamente em objeto de ensino.

Junto das “noções matemáticas” se localizam noções que podemos chamar de “*paramatemáticas*”: por exemplo, a noção de parâmetro, a noção de equação, a noção de demonstração (CHEVALLARD, 1991, p. 58). [Tradução e grifo nossos].

Há também as noções que são mais sutis, pois são mobilizadas implicitamente, são as noções protomatemáticas. Segundo Chevallard (1991), elas são passíveis de se trabalhar na sala de aula, mas não são ensináveis apenas aprendidas.

Para Pais (2015), apud Pereira (2016) as noções protomatemáticas formam uma categoria de habilidades que não se referem diretamente às noções matemáticas em si, mas são exigidas de forma implícita no estudo escolar.

Quando se inicia o estudo de uma noção matemática, por exemplo, mesmo nas séries mais elementares, já se exige do aluno um desempenho mínimo que o capacite no plano intelectual, a empreender uma iniciação ao saber. São competências que antecedem o próprio conhecimento matemático, de raciocínio percepção de modelos, e formulação de questão entre outros. (PAIS, 2015, p.37).

Portanto, as noções protomatemáticas são caracterizadas por capacidades de desenvolvimento, por isso assumem um caráter implícito no processo da Transposição Didática, enquanto que as noções paramatemáticas são conhecimentos característicos como a demonstração e a parametrização (CHEVALLARD, 1991, p. 61).

Sobre o processo de ensino de Matemática com base na Transposição Didática, Chevallard (1991) afirma que a distinção dessas noções está vinculada à prática de ensino. Para Chevallard essas três noções matemáticas constituem extratos profundos do funcionamento didático e são importantes para a análise didática.

Noções matemáticas, paramatemáticas e protomatemáticas constituem extratos cada vez mais profundos do funcionamento didático do saber. *É necessária considerar suas diferenças para a análise didática*: porque analisar a Transposição Didática de qualquer noção matemática, supõe considerações de noções paramatemáticas, que por sua vez devem ser consideradas a luz de certas noções protomatemáticas. (CHEVALLARD, 1991, p. 65)

Para Resende (2007), na análise realizada sobre a disciplina de Teoria dos Números de cursos de Licenciatura em Matemática, fundamentada na transposição didática,

As considerações de Chevallard sobre as noções matemáticas clareiam a posição dos objetos de saber no ensino, na medida em que trazem uma centralidade para as noções matemáticas, entendidas como aquilo que é objeto de ensino, propriamente dito. A posição dos objetos de saber tem sido, muitas vezes, enfraquecida ou obscurecida por propostas de ensino que esvaziavam a escola dos objetos de saber próprios de cada área do conhecimento, confundindo objetos de ensino com objetivos de ensino (RESENDE, 2007).

Desse modo, reconhecer as noções do saber matemático no processo de construção do objeto, no caso, os conteúdos de divisibilidade, passa a ser elemento da Transposição Didática, no processo do saber a ensinar.

Entretanto, no processo em que se dá a transposição didática, existe uma distância até que se concretize esse processo, ou seja, no processo de adaptação do saber sábio para o saber a ensinar podem surgir distorções conceituais e, Chevallard (1991) chama a atenção para esse fato.

O conceito de Transposição Didática, enquanto refere-se à trajetória do saber sábio para o saber ensinado, e, portanto, a eventual distância obrigatória que os separa, testemunha o questionamento necessário, ao mesmo tempo em que se torna a sua primeira ferramenta. Para a didática, esta é uma ferramenta que permite reconsiderar, examinar as evidências, colocar em cheque as ideias simples, se livrar de familiaridade enganosa de seu objeto de estudo. Em uma palavra, que lhe permite exercer sua **vigilância epistemológica**. (CHEVALLARD, 1991, p.16). [Tradução nossa e grifo nosso].

Dessa forma temos que o próprio conceito de transposição didática é a primeira ferramenta para se exercer a vigilância epistemológica sobre o processo, a trajetória percorrida de um saber a outro tipo de saber.

O professor deve estar atento para exercer esse papel na sua prática docente. Assim, a aplicação da vigilância epistemológica poderá se aplicar já no planejamento das aulas, escolha dos conteúdos, das tarefas, da metodologia, do livro didático, etc., bem como em sala de aula, no modo de apresentar o conteúdo, na relação professor-aluno, isso tudo tem implicações no processo da transposição didática.

Pereira (2016) realizou um estudo a partir da abordagem da transposição didática da teoria dos números para o estudo de divisibilidade no Ensino Fundamental e, concluiu o seguinte:

Que exercer a vigilância não é simples, pois o professor deve ter um conhecimento aprofundado sobre o conteúdo matemático (saber sábio), suas aplicações e como abordá-lo didaticamente para que se transforme em saber a ensinar. Por isso é uma ferramenta de balizamento na construção do saber (PEREIRA, 2016).

Para Chevallard (1991) o exercício do princípio de vigilância em Transposição Didática é uma das condições que determina a possibilidade de uma *análise científica* do sistema didático. (CHEVALLARD, 1991, p. 51).

E, além disso, nesse processo de transposição didática, deve-se considerar o que Chevallard chamou “limites” didáticos, aspectos que modificam a natureza do saber sábio ao transformá-lo em objeto de ensino.

Segundo Mendoza (2005)

Os limites colocados por M. Verre que têm a ver com a dessincretização, despersonalização, a programação da aquisição de conhecimento, publicidade e controle social da aprendizagem, são aceitos por Yves Chevallard, que observa que estes são tendencialmente satisfeitos por um

processo de arranjo que ele chama de “colocar em textos de conhecimento”, isto é, textualização (MENDOZA, 2005).

Características da transposição didática

Chevallard (1991) observou que existem aspectos a serem considerados no processo de transposição didática, ou seja, na trajetória do saber sábio até que este se torne ensinável: descontextualização, dessincretização, despersonalização, programabilidade do saber e publicidade e controle social da aprendizagem.

A dessincretização do saber. Para Chevallard (1985), por causa da exigência de explicação discursiva, a “*textualização*” do saber conduz primeiramente à delimitação de saberes “*parciais*”, cada um dos quais se expressa *em um discurso (ficticiamente) autônomo*. Esse processo produz uma “*desintrincação*” do saber, ou seja, sua *desincretização*.

Esse efeito de delimitação produz, segundo Chevallard a “descontextualização do saber”, sua extração da rede de problemas e os problemas que lhe dão sentido completo, a quebra do jogo intersetorial constituindo o saber em seu movimento de criação e realização (CHEVALLARD, 1985, p. 60).

Despersonalização do saber. No momento do nascimento de todo saber sábio, está ligado ao seu criador (produtor). Seu compartilhamento dentro dessa comunidade científica pressupõe um certo grau de despersonalização, que somente permite a publicidade desse saber (CHEVALLARD, 1985).

Este movimento de despersonalização estreia então, na “cidade sábia”, porém, esse movimento não termina aí, mas sim no momento de se ensinar (“você pode acreditar em mim, porque não é meu”) (CHEVALLARD, 1985)

Segundo Mendoza (2005) para Chevallard, a “textualização fez (...) a dissociação entre o pensamento na medida em que dirigida por uma subjetividade, e suas produções discursivas implicam que o sujeito é expulso fora de suas produções” (CHEVALLARD, 1985, p. 61). O saber é então objetivado.

Programabilidade da aquisição do saber. A textualização do saber também implica a introdução de uma programação, uma “norma de progressão do conhecimento” (CHEVALLARD, 1985, p. 62).

Ou seja, pressupõe-se que o texto trabalhado para ser um objeto de ensino tem que ter um início, meio e um fim, ou seja, há uma sequência a ser seguida. Mas, segundo Mendonça (2005), isso não é o caso do saber sábio de referência.

Publicidade e controle social da aprendizagem. A própria objetivação produzida pela textualização do saber conduz à possível publicidade deste saber. O saber a ensinar é então percebido, ele passa a ser público, em oposição ao caráter “privado” dos saberes pessoais adquiridos, por exemplo, por imitação ou associação. Essa publicidade, por sua vez, “permite o controle social da aprendizagem, em virtude de uma certa concepção do que é “saber”, uma concepção bem fundamentada (ou no mínimo legitimada) pela textualização” (CHEVALLARD, 1985, p. 62).

Esses aspectos pelo qual se dá a transposição didática são importantes fatores para se analisar o processo do conhecimento desde sua fonte primária, sua assimilação por parte do professor e sua publicidade ao ser levado aos alunos.

A questão que se coloca aqui vai contra a que alguns pesquisadores ou professores se colocam “por que ensinar Matemática”? Como a Matemática já é um saber institucionalizado no contexto escolar, talvez uma boa pergunta fosse: “como ensinar a Matemática neste contexto”? Então, podemos nos aprofundar nesta questão, ao definirmos nossos objetivos quanto à matemática que queremos que chegue aos alunos. Então, poderiam surgir novas questões, tais como: como ensinar a Matemática para que os alunos gostem da Matemática? Como ensinar a Matemática para que os alunos aprendam a Matemática escolar?

Segundo Pais (2013, p. 25) a presença da Matemática na educação escolar resulta da convergência das diversas fontes de influência da transposição didática, as quais indicam para o professor, além dos conteúdos, os objetivos, os métodos, os recursos e as estratégias.

Chevallard em suas indagações na busca de melhorar seu ponto de vista a respeito do sistema didático do ensino da Matemática, no começo dos anos 90, desenvolve uma aproximação antropológica dos saberes mostrando em especial que todo saber é uma resposta a uma pergunta.

Chevallard reflete sobre a renovação dos saberes na escola, principalmente, no fato de um reexame no currículo está associado ao fato de que muitas vezes há “conteúdos mortos” em certas disciplinas. Para “regenerar” a escola devem-se pensar, em muitos campos, os saberes como respostas às perguntas. Sim, se é possível encontrar a pergunta para uma resposta que já está disponível, então, o conhecimento ensinado na escola deve ser renovado, a fim de fazer surgir “novas questões” fortes nos programas.

Segundo Mendoza (2005) um dos elementos da teoria da transposição didática “renovada” em uma ótica antropológica, consiste então, em se perguntar quais são as “boas perguntas” sobre as quais se devem trabalhar na escola, para então, tentar construir as respostas adaptadas ao ensino, que serão as transposições das respostas já validadas na sociedade.

Atualmente podemos dizer que as pesquisas em educação matemática evoluíram e se expandiram, então é possível encontrar respostas às muitas questões sobre o ensino de matemática já validado na comunidade científica brasileira.

O sistema de ensino escolar tem uma maneira própria de funcionar. Segundo Chevallard,

a cada ano início de um ano letivo escolar, se forma um novo sistema didático, constituído pelas três peças mencionadas anteriormente: o saber, o docente e o aluno. Em torno do programa (ao qual o saber a ensinar está designado) um novo contrato didático é acordado entre um professor e seus alunos, com duração de um ano. Entretanto este sistema didático está imerso em um ambiente que é constituído especialmente pelo sistema de ensino, este mesmo está inserido em um sistema mais amplo que envolve: a sociedade (país, mundo político, meios de comunicação, mestres, etc.) (CHEVALLARD, 1985, p. 23).

Desse modo, o sistema didático situado no seio de um sistema de ensino deve, então, se confrontar regularmente com a sociedade. Esta confrontação se dá por intermédio de uma certa categoria de indivíduos que estão aptos a enfrentar “os problemas que nascem do encontro com a sociedade e de suas exigências (CHEVALLARD, 1985, p. 23).

Dessa forma, Chevallard classifica este lugar onde se pensa o sistema didático como “noosfera”. Assim, a *noosfera* é composta simultaneamente de representantes do sistema de educação e representantes da sociedade, ou seja,

membros da associação de pais dos alunos e professores, especialistas da disciplina que militam em torno de sua educação, representantes de organismos políticos.

Como sabemos, existe um sistema educacional que dita regras para a comunidade escolar, ou seja, as Diretrizes Curriculares definidas em norma nacional pelo Conselho Nacional de Educação são orientações que devem ser necessariamente observadas na elaboração dos currículos e dos projetos político-pedagógicos das escolas (BRASIL, 2010).

Essa elaboração é, contudo, de responsabilidade das escolas, seus professores, dirigentes e funcionários, com a indispensável participação das famílias e dos estudantes. É, também, responsabilidade dos gestores e órgãos normativos das redes e dos sistemas de ensino, consideradas a autonomia e a responsabilidade conferida pela legislação brasileira a cada instância (BRASIL, 2010).

Ou seja, a noosfera também é corresponsável pela elaboração do projeto pedagógico da escola. Contudo, sabe-se que nem sempre os objetos do conhecimento científico compartilhados nas disciplinas científicas serão utilizados diretamente nas salas de aulas da Educação Básica, mas são relevantes para se pensar a escola de forma ampla, considerando a cultura e a diversidade do seu contexto.

Assim, a noosfera, geralmente, é responsável pela manipulação dos saberes, selecionando elementos do saber sábio que serão designados como saberes a ensinar e possivelmente serão submetidos ao processo de transposição didática. Chevallard denomina de trabalho externo o que se opera na noosfera, sendo que o trabalho interno é realizado dentro do próprio sistema didático.

O estudo da transposição didática não é indiferente aos pesquisadores educacionais brasileiros que são responsáveis pela elaboração das Diretrizes Curriculares e Parâmetros Curriculares Nacionais⁴⁷ para a Educação básica e os Pareceres do Conselho Nacional de Educação (CNE).

⁴⁷ Nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (2000, p. 39) “O conhecimento matemático formalizado **precisa, necessariamente, ser transformado para se tornar passível de ser ensinado/aprendido**; ou seja, a obra e o pensamento do matemático teórico não são passíveis de comunicação direta aos alunos. Essa consideração implica rever a ideia, que persiste na escola, de ver nos objetos de ensino cópias fieis dos objetos da ciência” [grifo nosso].

Desse modo, segundo a concepção de currículo no Parecer CNE/CEB Nº 11/2010 que aprovou as Diretrizes Curriculares Nacionais⁴⁸ para o Ensino Fundamental de 9 (nove) anos.

Os conhecimentos escolares podem ser compreendidos como o conjunto de conhecimentos que a escola seleciona e transforma, no sentido de torná-los passíveis de serem ensinados, ao mesmo tempo em que servem de elementos para a formação ética, estética e política do aluno. As instâncias que mantêm, organizam, orientam e oferecem recursos à escola, como o próprio Ministério da Educação, as Secretarias de Educação, os Conselhos de Educação, **assim como os autores de materiais e livros didáticos, transformam o conhecimento acadêmico, segmentando-o de acordo com os anos de escolaridade**, ordenando-o em unidades e tópicos e buscam ainda ilustrá-lo e formulá-lo em questões para muitas das quais já se têm respostas. **Esse processo em que o conhecimento de diferentes áreas sofre mudanças, transformando-se em conhecimento escolar, tem sido chamado de *transposição didática*** (BRASIL, 2010). [Grifo nosso].

Há outro ponto que Chevallard chama a atenção com relação ao desgaste que envolve os saberes, ou objetos de ensino. Ao que ele denominou de desgaste biológico e desgaste moral. Assim como acontece com as pessoas, assim poderá acontecer com os saberes, existindo um “caducar”, ou seja, um envelhecimento (biológico) que atinge um saber, decorrente dos avanços científicos e tecnológicos da área, pois um conhecimento que foi necessário e relevante em algum tempo histórico, em outro momento perde essa relevância, deixa de ser útil. Por outro lado, há também um envelhecimento moral que se dá quando o saber se banaliza, tornando-se próximo do senso comum. Desse modo, o saber deixa de corresponder aos anseios da sociedade em geral. Assim, tanto um quanto outro tipo de envelhecimento torna o saber incompatível para o ambiente escolar e, deixa assim de ser usado.

(...) os objetos de ensino são vítimas do tempo didático, estão submetidos a uma erosão e a um desgaste “moral”, que pressupõe sua renovação no curso de um ciclo de estudo. Podemos dar o nome de obsolescência interna ou relativa a esse fenômeno de desgaste dentro de um ciclo de ensino, para opor-se a obsolescência externa ou absoluta, relativa à sociedade em geral. (CHEVALLARD, 2005, p.79). Grifos do autor. (Tradução nossa).

⁴⁸ São o conjunto de definições doutrinárias sobre princípios, fundamentos e procedimentos na Educação Básica, expressas pela Câmara de Educação Básica do Conselho Nacional de Educação, que orientarão as escolas brasileiras dos sistemas de ensino, na organização, na articulação, no desenvolvimento e na avaliação de suas propostas pedagógicas (BRASIL, 2010).

Chevallard ressalta que nesses casos faz-se necessário uma renovação dos saberes, ou a introdução de novos saberes, via transposição didática.

Além disso, Chevallard aponta outro tipo de desequilíbrio entre o saber sábio e o saber a ensinar no contexto escolar. O saber não “passa” mais, os alunos não conseguem mais absorvê-lo [...] na impossibilidade de mudar os alunos, será necessário mudar os saberes (CHEVALLARD, 1991, p. 32).

Dessa forma surge uma crise no ensino. Segundo Resende (2007, p. 56)

Diante da crise, os professores esperam que a noosfera resolva os problemas de aprendizagem, de modo a devolver aos alunos a vontade de aprender. Diante dessa situação, há dois caminhos a considerar: abandona-se o saber que se apresenta como problemático para a aprendizagem ou se propõe uma reorganização do saber, até que uma verdadeira reforma se estabeleça. A primeira via é simplista, aceitável em alguns casos, mas é preciso ter cuidado para que não ocorra um esvaziamento dos conteúdos o que acaba acontecendo em determinadas épocas de muita abertura do sistema de ensino. A segunda alternativa é mais complexa e supõe a continuidade dos saberes e a sua reorganização dentro de alguns limites (RESENDE, 2007).

Nesse sentido, o texto do saber é importante, pois segundo Chevallard, é a ferramenta essencial da prática do saber.

Sabe-se que uma das fontes de saber para a escola básica encontra-se no livro didático. Desse modo, podemos relacionar com o que pode estar acontecendo com os conteúdos de divisibilidade nos livros didáticos de matemática do sexto ano, visto que em alguns livros não encontramos a presença de alguns conteúdos de divisibilidade e em outros, não há os algoritmos de cálculos, por exemplo. Nosso objetivo com este estudo é investigar sobre o que acontece com este saber nos livros didáticos, verificar a presença ou as reduções que estão ocorrendo.

É o caso talvez, da noosfera exercer sua função.

De acordo com Resende (2007) num movimento de reorganização do saber ou de reforma dos saberes, a noosfera busca construir um novo texto, visando estabelecer um bom ensino. Segundo Chevallard (1991) apud Resende (2007), *a ordem didática que não se curva a nossos desejos, vem lembrar que um ensino, antes de ser bom, deve ser simplesmente possível.*

No estudo da transposição didática de Chevallard percebemos que há muito mais a se considerar do que a simples comparação de um saber científico para o saber escolar correspondente.

2.2.2 A transposição didática da Teoria dos Números como Saber Científico ou Acadêmico para o Saber Escolar

Escolhemos dois estudos para referenciar suas considerações a respeito de suas pesquisas com foco neste tema: a tese de doutorado em Educação Matemática de Resende (2007)⁴⁹ e a dissertação de Pereira (2016)⁵⁰. Estes estudos tratam da transposição didática do saber acadêmico da Teoria dos Números para o saber a ensinar.

Resende (2007, p. 45) em seu estudo, para compreender a Teoria dos Números como disciplina na formação do professor de matemática.

Considera que as disciplinas universitárias ou acadêmicas são um conjunto de: conteúdos e práticas, frutos de uma transposição didática; finalidades; elementos pedagógicos e outros elementos do meio profissional de referência e da sociedade em geral; organizado de modo a manter uma unidade científica e didática (RESENDE, 2007, p. 45).

Sobre as disciplinas nos cursos de Licenciatura em Matemática, Fiorentini e Oliveira (2013) infere que se prioriza o conhecimento matemático clássico, “em sua tradição platônica e euclidiana e às vezes formalista estrutural” em detrimento de “um saber problematizado e vetorizado (isto é voltado e direcionado) à formação matemática e didático-pedagógica do professor da escola básica”.

Mas, digamos que esta concepção está mudando, principalmente por causa da formação continuada dos professores pesquisadores, nos cursos de Pós-Graduação *Strictu Sensu* (mestrado e doutorado) em educação ou similares, como Educação Matemática, Educação em Ensino de Ciências em Matemática etc.

Uma das diferenças entre disciplina escolar e as disciplinas de referências (acadêmicas) segundo Lopes (2000) apud Resende (2007, p. 49) é que a disciplina escolar não é constituída de pensamento, de métodos de investigação, de proposições e de conceitos, tal qual aparecem nas disciplinas científicas. Contudo, Resende (2007) rebate esse pensamento sugerindo que

⁴⁹ RESENDE, Marilene Ribeiro. **Re-significando a disciplina Teoria dos Números na formação do professor de matemática na licenciatura**. Tese de doutorado (PUC/SP, 2007).

⁵⁰ PEREIRA, Rubia Carla. **Transposição didática: interações entre o sexto ano do ensino fundamental e a disciplina de teoria dos números em licenciatura matemática sobre o conceito de divisibilidade**. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática). Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo. Vitória, 2016.

Há um movimento de adaptação dos conceitos, dos métodos, e nesse processo de adaptação surgem ideias, procedimentos que são verdadeiras criações didáticas que, muitas vezes, não fazem parte do conhecimento científico.

Percebe-se no compartilhamento de relatos de experiências em eventos científicos que a forma como os professores percebem as disciplinas pela forma como explicitam suas práticas docentes em sala de aula, mudou consideravelmente.

Para Pereira (2018), o professor de matemática da educação básica está em imediato contato com a matemática científica, como objeto de estudo, e com a matemática básica, como objeto de trabalho na escola.

E, por isso mesmo, os professores que retornam de seus cursos de doutorados para a educação básica, com maturidade científica, já não mais os mesmos de quando saíram da graduação, ou do tempo recluso totalmente dedicado à sala de aula. São esses os professores que estão mudando o modo de se perceber e vivenciar as disciplinas acadêmicas e escolares.

Para Resende (2007, p. 49) no caso específico da Matemática, não podemos negar que o conhecimento científico é uma fonte de referência para o conhecimento escolar, devendo ser transformado, podendo assim se constituir em algo novo, mas não completamente autônomo.

Enfatizamos que o saber a ser ensinado na educação básica, objeto deste estudo – a divisibilidade – presente nos livros didáticos de matemática do sexto ano sofrem transformações didáticas, pois é apresentado de forma diferente do que é apresentado aos futuros professores em formação inicial.

Isto foi comprovado no estudo realizado por Pereira (2016) conforme a seguir:

Para a área de Teoria dos Números define-se por divisibilidade quando um número natural a divide um número natural b , e escreve-se $a|b$, se existe um número natural c , tal que $b = a.c$. Assim, pode-se compreender que o conceito de divisibilidade é uma relação entre dois ou mais números naturais (ou inteiros), associado à operação de multiplicação (HEFEZ, 1993, p.66). Já na matemática básica, a divisibilidade é trabalhada nas relações de múltiplo, ser divisível e divisor, e no contexto escolar, o conceito dessas relações estão associadas à divisão exata. Ou seja, dizemos que a é múltiplo de ou divisível por b se existe c , tal que $a = bc$ e também se $a : b = c$ e o resto dessa divisão é nulo. Ou ainda, dizemos que b é divisor de a .

Dessa forma, fica evidente que a operação de divisão exata para conceituar a relação de divisibilidade é o que Chevallard (1991) classifica como uma criação

didática, pois difere da forma que a divisibilidade é tratada na matemática científica e vem no sentido de facilitar o funcionamento didático desse conteúdo na matemática escolar (PEREIRA, 2016).

Resende (2007) por outro lado, enfatiza que ao procurar compreender a Teoria dos Números como uma disciplina a ensinar, na Licenciatura em Matemática,

vamos aceitar que a transposição didática é inevitável e estaremos ouvindo membros da noosfera, pesquisadores da área, educadores matemáticos, e também professores que poderão explicitar como a Teoria dos Números é ou deveria ser constituída como um componente da formação específica do professor de matemática, pois os programas não são suficientes para que possamos compreender uma disciplina (RESENDE, 2007, p. 66).

Para Pais (2011), a “natureza e o estatuto científico de cada disciplina, moldada pela sua trajetória histórica, determina uma forma particular de valorizar a dimensão educacional de cada saber” (PAIS, 2011, p. 29).

Em sua observação em uma aula de Teoria dos Números, Pereira (2016) evidencia:

Nas aulas em que participei da disciplina de Teoria dos Números, os conceitos e as técnicas de demonstração foram mais formais, o que é normal, visto que a base conceitual do professor de Matemática é muito importante para o desenvolvimento do saber.

[...] é possível observarmos tanto no discurso como na textualização a utilização da linguagem formal empregada em uma didática sem problematização para construir o conceito.

[...] essas construções são importantes e não devem ser descartadas. No entanto,

Para concluir nos utilizamos da fala de Pereira (2016) ao analisar se houve transposição didática ocorrida em aulas da disciplina de Teoria dos Números.

No entanto, a disciplina de Teoria dos Números não discutiu práticas e situações de ensino e aprendizagem a serem empregadas na escola básica, e supomos que essa competência foi transferida para o licenciando. A habilidade de adaptação do conhecimento não é trivial. Por isso, as noções matemáticas, paramatemáticas e protomatemáticas deveriam ser identificadas nas aulas de formação inicial do professor e discutidas as diferenças de tratamento na adaptação do saber para a escola básica (PEREIRA, 2016, p. 83).

Desse modo, é igualmente importante, para a formação do professor que se discuta as adaptações desse saber na educação básica, acentuando as diferenças e

as adaptações de linguagem, pois essas relações são fundamentais para o fortalecimento da didática aplicada pelos futuros professores (PEREIRA, 2016, p. 80).

2.2.3 A Transposição Didática na Análise dos Livros Didáticos de Matemática

Escolhemos a transposição didática de Yves Chevallard porque acreditamos ser uma ferramenta adequada à realização aos objetivos a serem alcançados por este estudo quanto à análise da presença dos conteúdos de divisibilidade dos livros didáticos de matemática.

Neste estudo, abordamos os conteúdos de divisibilidade trazidos pelo livro didático de matemática como um saber a ser assimilado pelo aluno ou a ser ensinado pelo professor, com outra forma de apresentação, ou seja, já transformado didaticamente, mas que para chegar aos alunos poderá ainda ser novamente transformado (complementado ou melhorado) a partir da prática do professor em sala de aula. Segundo Chevallard (1991) o *saber a ensinar* manifesta-se nos materiais pedagógicos, pois estes refletem as determinações do projeto social de ensino e as influências da noosfera.

Desse modo, o *saber a ensinar* é a primeira transformação do saber sábio, chamada de transposição didática externa, e ela ocorre fora da sala de aula. Na passagem do saber a ensinar para o saber ensinado ocorre a transposição didática interna, com a participação do professor, quando este prepara suas aulas, a partir dos livros didáticos, por exemplo. Dessa maneira, ocorre o processo de toda a Transposição Didática do saber sábio até o saber ensinado. Pereira (2016) em seu estudo sobre a transposição didática da Teoria dos Números para a Divisibilidade nos livros didáticos do sexto ano se posiciona da seguinte forma:

Uma das questões que irá permear as investigações neste estudo de caso é: *a o pensamento dedutivo, desenvolvido pela Teoria dos Números, tem sido praticado nas aulas de Matemática da educação básica?*

Considerado o fato de que nos livros didáticos as construções dos critérios de divisibilidade e as propriedades dessa operação são colocadas de forma muito técnica favorecendo a memorização, é possível levantar a hipótese de que o raciocínio dedutivo também não é trabalhado nas aulas de Matemática quando se trabalha esse conteúdo (PEREIRA, 2016).

Pereira (2016) pensa que os conteúdos da Matemática científica precisam ser adaptados e adequados à Matemática escolar, e é papel do professor, ao dominar os conhecimentos pedagógicos, didáticos e matemáticos, ensinar esses conteúdos da melhor forma para seus alunos.

Pereira (2016), de acordo com Chevallard (1991), em seu estudo sobre análise da transposição didática do conceito de divisibilidade em uma turma do sexto ano do ensino fundamental, pontua que o conceito de divisibilidade está distribuído segundo as três noções propostas por Chevallard, a saber: noções matemáticas, paramatemáticas e protomatemáticas.

Seguindo a proposta do livro didático, o conceito de múltiplo (associado à definição de multiplicar) é o que Chevallard classifica de objeto de saber, isso é, a noção matemática⁵¹ (PEREIRA, 2014).

Da análise do livro de Imenes & Lellis (2010, p. 107), Paiva e Pereira (2016) expressam:

Neste contexto, podemos perceber que a noção matemática de divisibilidade foi adaptada a uma situação didática escolar, relacionada à linguagem (de científica para escolar) e à exemplificação, objetivando criar significado para a aprendizagem. Neste sentido a transposição didática contribui para a estruturação de uma educação matemática mais significativa (PAIVA e PEREIRA, 2016).

Segundo Pereira (2016) a associação da relação de divisibilidade entre números naturais e a divisão exata é restrita ao saber escolar, o que configura uma adaptação do objeto matemático. Essa associação assume a característica conceitual do conteúdo matemático para a relação múltiplo, logo é uma noção matemática agregada para dar significação à aprendizagem.

Desse modo, Pereira (2016), conclui que é possível afirmar que as noções matemáticas no contexto escolar diferem do contexto do saber sábio, no entanto, não se contradizem, pois, mantêm a mesma base conceitual. O que ocorre é uma adaptação do conceito, configurando a definição de Transposição Didática.

No estudo de Pereira (2016) sobre “vigilância epistemológica na construção do saber divisibilidade nas aulas da professora Sandra” enfatiza que o processo de

⁵¹ Em geral as noções matemáticas são construídas. Sua construção adota a forma: (i) seja de uma definição, no sentido estrito; (ii) seja de uma “construção”, seguida de uma operação (CHEVALLARD, 1991), apud Paiva e Pereira (2016).

“didatização do saber⁵²” pode, por vezes, causar rupturas conceituais desse conteúdo na educação básica.

Para melhor compreensão do que isso significa transcrevemos da dissertação de Pereira, um recorte da aula da professora, pois segundo Pereira (2016) “outra prática da vigilância epistemológica ocorre sobre o enunciado no livro didático”⁵³

Um detalhe: o número zero é múltiplo dele mesmo. Entretanto, zero não é divisor de si, porque não é possível dividir por zero!

Segundo Pereira (2016, p. 85), sobre o enunciado do livro didático de matemática do 6º ano e a explicação da professora em uma aula⁵⁴ para explicar a divisibilidade por zero:

No enunciado, o autor afirma que “zero é múltiplo de si mesmo”, pois a relação de ‘múltiplo’ tem sua definição na operação de multiplicação, definida para o número zero. Mas a relação ‘divisor’, no contexto do saber escolar, não é equivalente à relação de ‘múltiplo’ ou ‘divisível’, pois sua definição está associada à operação de divisão, não definida para o zero.

No entanto, a abordagem com o zero, sugerida pelo livro didático (Figura 14), sofreu distorção, como no recorte da aula a seguir:

A1 –É verdade que zero dividido por zero dá 1?

P – É, é verdade!

A2 –O quê? Como assim, zero dividido por zero dá 1?

P –Vamos discutir? Tem uma afirmação aí no livro, página 115, depois do exemplo 1 que ele colocou assim: “Um detalhe, o zero é múltiplo dele mesmo, entretanto, o zero não é divisor de si” (Figura 14).

A1 –Mas zero dividido por zero dá 1.

P – Mas zero dividido por zero dá 2, e daí?

A2 –Eu não entendi.

A1 –Você que disse que zero dividido por zero dá 1.

P – Mas zero dividido por zero dá 2. Porque se você pegar $0 = 2 \times 0$, não vale?

A1 –Ah, tá! Zero dividido por zero dá 2.

P – Vamos fazer a tabuada do zero?

A1 – $0 \times 0 = 0$, $0 \times 1 = 0$, $0 \times 2 = 0$, $0 \times 3 = 0$, $0 \times 4 = 0$, $0 \times 5 = 0$.

P –Todo número multiplicado por zero dá zero, né?!

A3 –Então, zero vezes qualquer coisa é zero, aí zero dividido por zero pode dar qualquer coisa?

A4 –Porque tipo assim, eu tenho 15 unidades. 15 para dividir para zero. Eu não vou dividir para nada, então, não vai ter nada para nada, sacou?

P – Saquei não. Olha só, vamos lembrar da operação inversa? Esse meu elemento aqui, $4 \times 8 = 32$, então 32 dividido por 4 dá 8. Vamos fazer a mesma

⁵² Análise da epistemologia do regime didático do saber é um importante processo da Transposição Didática, uma vez que identifica e diferencia as noções de saber descritas por Chevallard (1991) em sua teoria (PEREIRA, 2016).

⁵³ Recorte da página 115 do livro didático do 6º ano do EF, de IMENES; LELLIS. Matemática. 1.ed. SP: Moderna, 2010. Utilizado pela professora Sandra segundo (PEREIRA, 2016, p. 85).

⁵⁴ Recorte da aula com a professora Sandra em 21/5/2015. (PEREIRA, 2016, p. 86).

coisa com o zero? Se zero vezes zero é zero, se eu dividir zero por zero dá zero. Mas se zero vezes um é zero, se eu dividir zero por zero dá um.

A5 – Mas como a gente vai saber qual vai dar.

P – Uai, a operação inversa. Olha aqui! 32 dividido por 4 dá 8, porque 8×4 dá 32.

A5 – Eu entendi isso, mas só tem um jeito de fazer isso?

P – Você pode fazer isso com qualquer número. Qualquer tabuada. Eu estou fazendo com o zero. Só que a tabuada do zero é uma tabuada especial.

A1 – É na tabuada do zero, zero dividido por zero vai dar 4.

P – Calma! A tabuada do zero é especial, porque ela sempre dá de resultado o mesmo número, né?! Então, se eu fizer a operação inversa para todo mundo e vou achar quantos resultados?

A2 – Muitos.

A4 – Infinitos. Mas não entendo que eu divido zero, que é uma quantidade, vamos supor que é nada, por zero que também é nada, como que dá 1?

P – Pela operação inversa da tabuada do zero.

A1 – Matemática é muito doida.

A4 – Tipo assim, eu não tenho nada, para dividir com nada, como que vai dar 1?

P – Pois é, a tabuada do zero é diferente das outras tabuadas, todos os resultados dão zero.

A4 – Tá, isso eu entendi, como que faz isso?

P – Como que acontece?

A5 – Como é que alguém consegue dividir zero por zero e dar 1.

P – É meio abstrato mesmo. Todo número multiplicado por zero dá zero por definição. Porque senão a sequência aqui vai dar errada.

A4 – É mais ou menos assim: o cara decidiu lá que dá zero, e vai ser zero e acabou? É tipo isso?

P – Mais ou menos. Não foi exatamente dessa forma.

A4 – Porque não tem sentido isso. Você não vai colocar esse trem de zero na prova não, né?! Por favor, não coloca.

Assim, nesse recorte, percebemos uma ruptura com o conceito de divisibilidade, pois configura um erro conceitual no processo de “*didatização* do saber”. E, além disso, “houve uma distorção no tratamento da relação da divisibilidade no que se refere ao número zero. Isto é consequência de uma vigilância epistemológica distorcida e de um regime didático mal estabelecido” (PEREIRA, 2016, p. 87).

Pereira (2016) em seu estudo sobre a transposição didática de divisibilidade na relação professor-aluno, conclui que o processo adaptação do saber sábio para o saber ensinável é influenciado pelo saber do professor, principalmente no que se refere aos conteúdos matemáticos que nesse contexto, está diretamente atrelado à disciplina de Teoria dos Números na formação inicial.

Em sua análise sobre o conteúdo de divisibilidade no livro didático e a prática do professor em sala de aula nem sempre a tentativa de se fazer a transposição didática se dá satisfatoriamente, pois pode acontecer uma ruptura conceitual por parte do professor.

Este capítulo nos dá a possibilidade de fazermos uma reflexão sobre nossa prática docente, pois somos responsáveis de promover condições favoráveis à aprendizagem dos alunos, seja em termos da nossa própria capacitação, do uso de novas metodologias, aplicação de diversas teorias de ensino e aprendizagem buscando o que melhor se aplica à realidade escolar ao qual estamos inseridos.

2.3 A DIVISIBILIDADE ENQUANTO SABER CIENTÍFICO E SABER ESCOLAR

Nesta seção abordaremos a Divisibilidade como um saber científico e escolar. É considerado um saber científico visto que faz parte de um corpo maior de saber científico que é a Teoria dos Números, é também um saber escolar porque faz parte da Unidade Temática “Números” que por sua vez faz parte do Componente Curricular e Área de conhecimento “Matemática” do Ensino Fundamental dos Anos finais.

Inicialmente vamos tratar da Teoria dos Números que é considerada por muitos autores (ALENCAR 1986, HEFEZ 2010, SHOKRANIAN, 2010; SANTOS, 2014) como uma ciência que tem por objetivo principal estudar as propriedades dos números Inteiros positivos (também conhecidos como números naturais).

O estudo sobre a Teoria dos Números como saber científico é relevante neste contexto visto que o objeto de conhecimento “divisibilidade” faz parte dos conteúdos abordados pela Teoria dos Números como disciplina acadêmica. Assim, faremos um breve percurso pela História da Matemática, com base em Boyer (2003) e Eves (2004), com o intuito de encontrar alguns elementos esclarecedores da importância desse ramo da Matemática em seu desenvolvimento histórico.

2.3.1 Caminhando pela História da Matemática com a Teoria dos Números.

É na Grécia que inicialmente identificamos a Teoria dos Números tal como a conhecemos hoje em dia (COUTINHO, 2003). Foram os pitagóricos que estudaram as relações entre os números do ponto de vista do que hoje se denomina Teoria dos Números.

Entre os principais estudiosos gregos dessa teoria podemos citar Euclides de Alexandria, pois, construiu a base da Matemática que por muitos séculos sustentou todo o conhecimento matemático existente no ocidente.

Infelizmente pouco se sabe sobre a vida de Euclides, nem a data de nascimento e nem de sua morte, nem mesmo o local onde nasceu. É conhecido como Euclides de Alexandria porque foi lá para ensinar matemática (BOYER, 2003, p. 69).

Os historiadores de Matemática como Boyer (2003) e Eves (2004) são unânimes em afirmar que das obras de Euclides, pelo menos cinco obras completas sobreviveram e chegaram ao nosso tempo, dentre elas um de seus trabalhos mais notáveis, “Os Elementos”⁵⁵ – é composto de 465 proposições distribuídas em 13 livros, sendo que os livros VII, VIII e IX são dedicados à Teoria dos Números.

Nos livros VII e IX encontram-se relevantes temas da Teoria Elementar dos Números que ainda hoje são estudados tanto no Ensino Superior (disciplina Teoria dos Números) quanto na Educação Básica, no objeto de conhecimento “divisibilidade”. O livro VII começa com o processo, hoje conhecido como algoritmo euclidiano, para achar o máximo divisor comum de dois ou mais números inteiros e o usa para verificar se dois inteiros são primos entre si.

No livro IX encontram-se muitos teoremas significativos. A proposição IX 14 é equivalente ao importante *teorema fundamental da aritmética* – a saber, que *todo inteiro maior que 1 pode se expressar como produto de primos de uma e, salvo quanto à ordem dos fatores, uma só maneira* (EVES, 2004, p. 175)

Podemos dizer que Euclides foi precursor do estudo sobre os números primos, visto que além de definir um número primo também demonstrou a infinitude deles. Conforme Eves (2004, p.175), a prova de Euclides da proposição IX 20 (o número de números primos é infinito) é considerada universalmente pelos matemáticos como um modelo de elegância matemática.

Ela emprega o método indireto, ou *reductio ad absurdum*, e em linhas gerais é o seguinte. Suponha que só houvesse um número finito de números primos e denote-os por $a, b, \dots, k$. faça $P = (a)(b)\dots(K)$. Então $P + 1$ ou é primo ou é composto. Mas como $a, b, \dots, k$ são todos os primos, $P + 1$, que é maior que cada um desses números, não pode ser primo. Se $P + 1$ fosse composto deveria ser divisível por algum primo p . Mas p deve ser um dos elementos $a, b, \dots, k$, pois estes são todos os números primos. Logo p deve dividir P e, por consequência, não é divisor de $P + 1$ (pois $p > 1$). Portanto a hipótese inicial

⁵⁵ É lamentável que não se tenha descoberto nenhuma cópia dos Elementos de Euclides que date verdadeiramente da época de seu autor. As edições modernas da obra se baseiam numa revisão preparada pelo comentador grego Têon de Alexandria que viveu quase 700 anos depois do tempo de Euclides. [...] A primeira tradução latina completa dos Elementos não foi feita do grego mas sim do árabe. No século VIII os árabes fizeram traduções de muitos manuscritos bizantinos de trabalhos gregos e em 1120 o erudito inglês Aderlado de Bath fez uma tradução latina dos Elementos a partir de uma dessas antigas versões árabes (EVES, 2004, p. 168).

de que o conjunto dos números primos é finito leva a um absurdo, o que estabelece o teorema (EVES, 2004, p. 175).

Segundo Rooney (2012, p. 85) os primeiros a se beneficiarem do trabalho de Euclides foram os romanos.

Mas a matemática não era muito considerada pelos estudantes romanos e era ensinada por sua utilidade prática, nada mais. Assim, um arquiteto deveria saber geometria, cálculo e capacidade de carga, e um mercador precisaria saber aritmética, mas nenhum deles estava particularmente interessado em ampliar os limites do conhecimento em matemática para seu próprio benefício (ROONEY, 2012, p. 85).

Após Euclides, outros matemáticos gregos foram importantes na constituição da Teoria dos Números, tais como Eratóstenes (276-196 a.C.), pois até hoje o seu método de identificar números primos conhecido por “Crivo de Eratóstenes” é utilizado tanto no ensino superior como no Ensino Fundamental, a maioria dos livros didáticos de matemática do sexto ano apresentam o crivo no capítulo destinado à divisibilidade.

Conforme Eves (2004), Eratóstenes se tornou célebre em aritmética devido a um dispositivo conhecido como crivo, usado para se acharem todos os números primos menores que um número n dado.

Anotam-se em ordem e começando por 3, todos os números ímpares menores que n . Eliminam-se os números compostos da sequência riscando-se, a partir do 3 (exclusive) todos os terceiros números que se seguem, depois, a partir do 5 (exclusive) todos os quintos números que se seguem e assim por diante. Nesse procedimento riscam-se alguns números mais do que uma vez. Todos os números não riscados, mais o número 2, formam a lista dos primos menores que n (EVES, 2004, p. 198).

Outro matemático grego que contribuiu significativamente para a Teoria dos Números, foi Diofanto⁵⁶ de Alexandria, escreveu três trabalhos, mas o de Aritmética foi o mais importante, sendo uma abordagem analítica da teoria algébrica dos números. Dentre os temas que abordou em *Aritmética*, os *problemas algébricos indeterminados em que se devem achar soluções inteiras* são conhecidos como equações diofantinas.

⁵⁶ Tal como o caso de Euclides, de acordo com os historiadores (BOYER, 2003; EVES, 2004) não se sabe a época exata em que Diofanto viveu, tende-se a situá-lo no século III de nossa era. Mas, sabe-se que sua carreira floresceu em Alexandria, mas nada de certo se sabe sobre ele.

Hoje em dia, em muitos livros de teoria dos números e introdução de teoria dos números (usados em disciplinas de teoria dos números nos cursos de Matemática e Licenciatura em Matemática) dedicam um capítulo inteiro às Equações Diofantinas, como é o caso do livro de Shokranian.

Hoje em dia uma grande parte na teoria dos números é o capítulo de Equações Diofantinas atribuído para honrar os trabalhos matemáticos de Diofanto. Equações diofantinas são equações de várias variáveis na qual o objetivo é achar soluções inteiras ou racionais. Por exemplo: $3x + 4y = 2$ (SHOKRANIAN, 2010, p. 12).

Nos cinco trabalhos⁵⁷ sobre Aritmética Modular analisados, para este estudo, os professores e pesquisadores se utilizam dos conteúdos de divisibilidade (Teoria dos números) e das equações diofantinas, para estimular o estudo da Teoria dos Números na Educação Básica, como por exemplo, o trabalho de Pinheiro (2018).

Este trabalho apresenta uma proposta de se trabalhar com Aritmética Modular com os alunos do Ensino Fundamental II (6º, 7º, 8º e 9º anos) com o intuito de tornar o ensino de matemática mais aprofundado e de se desprender dos livros didáticos. Apresentamos uma sequência de conteúdos que se inicia nos números primos e compostos, discutem-se os significados de múltiplos, divisores (e os restos das divisões) e as regras de divisibilidade. Para desenvolver o tema “Aritmética Modular” ainda exploramos as definições das Equações Diofantinas (PINHEIRO, 2018).

Durante séculos os estudos de equações diofantinas ocuparam a atenção de grandes estudiosos, inclusive de Pierre de Fermat⁵⁸ (1601-1665), vários séculos depois, influenciando-o na solução de sua equação mais famosa $x^2 + y^2 = z^2$.

Segundo Shokranian (2010) a divisão dos períodos históricos da Matemática é diferente para a história da teoria dos Números.

Hoje em dia é possível que um historiador de matemática divida a história da teoria dos números em dois períodos grandes: Antes e depois de Fermat. Do ponto de vista da quantidade de problemas oferecidos em teoria dos números antes de Fermat, estamos lidando com um período curto, mas é o depois de Fermat que foi acumulado uma imensa quantidade de informações em teoria dos números, e também foi no século XX que a teoria dos números se

⁵⁷ Dissertações do Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional (PROFMAT): Carvalho (2013), Almeida (2014), Cerqueira (2015), Pinheiro (2016) e Fernandes (2018). Estes estudos destinam-se à Educação Básica. Relação das dissertações encontra-se no Apêndice A.

⁵⁸ Pierre de Fermat nasceu numa família de classe média na cidade de Beaumont de Lomagne no sul da França. No sentido atual de profissional da Matemática, Fermat não era considerado um matemático profissional e não recebia nenhum trabalho financeiro por seus trabalhos matemáticos.

posicionou no mundo das aplicações, e seu valor prático ficou mais evidente. Depois de Fermat é um período de quase quatro séculos, bem mais curto do que antes de Fermat, mas muito produtivo (SHOKRANIAN, 2010, p. 16-17).

Há também outra forma de dividir o período histórico do desenvolvimento da teoria dos números. Segundo Shokranian (2010, p. 17) redefinindo a divisão como, antes de Euclides, de Euclides até Diofanto, de Diofanto até Fermat, e depois de Fermat.

Shokranian (2010) defende essa posição dizendo que a principal contribuição “obvia” para o que hoje em dia conhecemos no nome da teoria dos números, começou formalmente com teoremas de Euclides, e com os estudos das equações diofantinas. Nessa divisão há o grande período de um pouco menos de 400 de Fermat até hoje.

Fermat era considerado um matemático amador. Ele nunca publicou nenhum artigo ou livros, com tudo isso ele e Newton são considerados os melhores matemáticos do século XVII e entre os melhores de todos os tempos (SHOKRANIAN, 2010, p. 56).

Conta-se que Fermat ao ler a obra *Arithmética* de Diofanto anotava nas margens do livro algumas ideias que lhe ocorria, a sua conjectura mais famosa, foi encontrada desse modo. Contudo, sua demonstração nunca foi encontrada, apesar de Fermat ter deixado uma nota⁵⁹ dizendo que encontrara a resposta, mas sem revelar qual era, o que mais tarde e até o século XX, se tornou um dos principais problemas não resolvidos da matemática, conhecido como o “Último Teorema de Fermat”. É o seguinte: “*Não existem inteiros positivos x, y, z, n , de modo que $n > 2$ para $x^n + y^n = z^n$.*”

Este problema atravessou séculos e muitos matemáticos profissionais e amadores tentaram fazer sua demonstração. Mas, essa busca pela solução teve seu fim quando Andrew Wiles⁶⁰, em 1993 anunciou ter encontrado uma prova para o Último Teorema de Fermat. Entretanto, foi encontrado um erro em sua demonstração, o que o fez retornar às pesquisas por mais quatorze meses, até que em 1995, ele ganhou as páginas dos jornais do mundo inteiro e 50 mil libras da Fundação Wolfskehl (SINGH, 2008).

⁵⁹ Segundo Singh (2008) Fermat escreveu em 1637 no livro de Aritmética, de Diofante: “*Eu descobri uma demonstração maravilhosa, mas a margem deste papel é muito estreita para contê-la*”.

⁶⁰ Andrew Wiles, inglês, emigrara para os Estados Unidos na década de 1980. Assumira uma cadeira na Universidade de Princeton onde conquistara a reputação de ser um dos matemáticos mais talentosos de sua geração. Antes da publicação de sua demonstração Wiles passara os últimos sete anos trabalhando em segredo completo tentando resolver o maior problema da matemática (SINGH, 2008, p. 26)

A matemática formal, sistemática e científica (bem diferente da escolar) é uma ciência em que se pode afirmar categoricamente que algo é verdadeiro, ou válido para sempre para determinada espécie de coisa. Por isso que muitos matemáticos uma prova, uma demonstração para o Teorema de Fermat, para saber se sua afirmação era realmente válida, assim como foi para Pitágoras que afirmou e provou que $x^2 + y^2 = z^2$ é válido para todos os triângulos retângulos, ou seja, “num triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa (z^2) é igual à soma dos quadrados dos catetos ($x^2 + y^2$).

A busca pela prova matemática é a busca pelo conhecimento mais absoluto do que o conhecimento acumulado por qualquer outra disciplina. Este desejo pela verdade final através do método da prova, ou demonstração, é o que tem impulsionado os matemáticos nos últimos dois mil quinhentos anos. [...] em matemática, o conceito de prova é muito mais rigoroso e poderoso do que usamos no dia-a-dia e até mesmo mais preciso do que o conceito de prova como entendido pelas ciências Física e Química. A diferença entre prova científica e prova matemática é ao mesmo tempo sutil e profunda. Ela é crucial para que possamos entender o trabalho de cada matemático, desde Pitágoras.

A ideia da demonstração matemática clássica começa com uma série de axiomas, declarações que julgamos serem verdadeiras ou que são verdades evidentes. Então, através da argumentação lógica, passo a passo, é possível chegar a uma conclusão. Se os axiomas estiverem corretos e a lógica for impecável, então a conclusão será inegável. Esta conclusão é o Teorema. Os teoremas matemáticos dependem deste processo lógico e uma vez demonstrados eles serão considerados verdade até o final dos tempos. A prova matemática é absoluta (SINGH, 2008, p. 41).

Para Singh⁶¹ (2008) que esteve com Wiles, entrevistando-o na época em que anunciou ter encontrado a solução,

Ao solucionar Fermat, Andrew Wiles estabeleceu a base sólida para alguns elementos mais importantes da teoria dos números do período pós-guerra, ancorando assim os alicerces de uma pirâmide de conjecturas erguida sobre ele. Não se tratava apenas de resolver o problema mais difícil da matemática, mas sim de ampliar os horizontes da própria matemática. Era como se o problema de Fermat, criado numa época em que a matemática passava por sua infância, estivesse esperando por esse momento (SINGH, 2008, p. 13).

Mas o que era mesmo esse problema tão importante para a Teoria dos Números? Com referência à equação de Pitágoras $x^n + y^n = z^n$, com $n = 2$, ou seja, $x^2 + y^2 = z^2$, por exemplo: $3^2 + 4^2 = 5^2 \Leftrightarrow 9 + 16 = 25$, chama-se “trio pitagórico”. Os

⁶¹ Saimon Singh obteve seu PhD. Em física de partículas na Universidade de Cambridge, na Inglaterra, sendo a busca do quark top a sua principal área de pesquisa. Em 1996 co-produziu e dirigiu o premiado documentário sobre o Último Teorema de Fermat.

pitagóricos conseguiram inventar um método para encontrar esses trios e, ao fazê-lo demonstraram que há um número infinito deles.

Encontrar números inteiros que solucionem a equação original, ou seja, com $n = 2$, é relativamente simples, mas ao mudar a potência de 2 para 3 (do quadrado para o cubo e encontrar números inteiros que satisfaçam a equação cúbica parece impossível.

Segundo Singh (2008) gerações de matemáticos não conseguiram encontrar números que se encaixem perfeitamente na equação elevada ao cubo até que finalmente Andrew Wiles conseguiu, em 1995.

Além deste problema há outros problemas na Teoria dos Números que encantam e motivam matemáticos a buscarem por suas soluções e isto faz com que a Matemática se desenvolva cada vez mais.

Neste pequeno movimento na história antiga da teoria dos números nos voltamos para o século XX e XXI, pois o objetivo não é fazer uma análise histórica, mas sim, mostrar como este ramo da Matemática se constituiu numa parte tão relevante da história do desenvolvimento da Matemática pura, aplicada, acadêmica e escolar.

Segundo Shokranian (2010)⁶², o século XX deve ser considerado como um dos séculos mais produtivos e mais importantes para a evolução e uso prático de teoria dos números e, por essa razão um estudo histórico de teoria dos números no século XX merece atenção especial e investigação profunda”

Para Shokranian (2010) na história da Matemática, a história de teoria dos números tem um lugar especial, pois é considerada como a “Rainha da Matemática”, como dizia Gauss no Século XIX.

Esse apelido não foi dado só pela razão de que a teoria dos números é a parte mais bela da matemática, mas também pelo fato de que ela representa ao mesmo tempo a parte mais antiga, e a mais jovem da matemática. [...] Teoria dos números, essa área tão antiga, tem um passado profundo, espetacular, e tem um presente ativo e um futuro que deve ser julgado pelas gerações vindouras (SHOKRANIAN, 2010).

Para Santos (2014), são três os principais ramos em que se divide a Teoria dos Números: Teoria Elementar, Teoria Analítica e Teoria Algébrica. Em seu livro

⁶² Citação retirada do Prefácio do livro Uma breve História da Teoria dos Números no Século Vinte. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2010.

“Introdução à Teoria dos Números” é tratado apenas sobre a parte elementar, onde se apresentam resultados básicos, não apenas para o estudo das partes analítica e algébrica, como também, para aos demais ramos da matemática.

A Teoria dos Números aparece como ferramenta em diversas áreas da Matemática, tais como: Probabilidade, Álgebra, Sistemas Dinâmicos, etc., servindo de alicerce para muitos resultados significativos.

Em nossa revisão de literatura encontramos na área de ensino de matemática, dos programas de mestrado profissional de matemática pelo menos quinze dissertações a respeito da Teoria dos Números e outras cinco dissertações que tratam de teoria dos números, mas que trazem em seus títulos referência à Teoria da Aritmética Modular.

Segundo Cavalcante (1997), Teoria dos números é uma ciência muito antiga, que visa primordialmente entender as propriedades e relações entre os números. Na busca de tais propriedades, surge uma grande interação entre este e vários outros ramos da matemática pura (como Álgebra, Análise Real e Complexa, Geometria) e aplicada (como Ciência da Computação e Criptografia).

2.3.2 A Teoria dos números como disciplina nos cursos de Licenciatura em Matemática

A respeito da Teoria dos Números como disciplina nos cursos de Licenciatura em Matemática, Resende (2007) enfatiza o seguinte:

A Teoria dos Números é um campo da matemática, estruturado e organizado, mas, ao se constituir em disciplina acadêmica, ela sofre transformações que trazem uma variedade de denominações, expondo, mesmo que não de maneira explícita, as suas inter-relações com a Álgebra e com a Aritmética (Resende, 2007, p. 102).

Como foi observado no estudo de Resende, nem sempre os tópicos de Teoria dos Números estavam contemplados como uma disciplina específica, mas na maioria das universidades constavam em disciplinas de Álgebra e Matemática básica.

Quanto aos conteúdos programáticos como em algumas instituições a disciplina não é específica de Teoria dos Números, há uma grande diversidade de tópicos abordados [...]. No entanto, há um núcleo que está

explicitamente presente em todas as propostas, constituído do estudo da divisibilidade; algoritmo da divisão euclidiana; máximo divisor comum; mínimo múltiplo comum; números primos e teorema fundamental da aritmética; congruências e equações diofantinas (RESENDE, 2007, p. 103).

E, sobre outros tópicos de aritmética e divisibilidade, mais uma vez ressalta a preocupação sobre a formação docente voltada para educação básica.

O estudo de contagem e dos sistemas de numeração, as operações aritméticas, os critérios de divisibilidade, a abordagem histórica da aritmética e dos números, presentes na matemática escolar da educação básica, são raramente citados, o que confirma que não há uma preocupação com a formação do professor (RESENDE, 2007, p. 104).

Para Fonseca (2015, p. 58) a Teoria dos Números oferece uma formalização algébrica consistente para a aritmética dos números inteiros. Em sua tese, enfatiza que

Tópicos da teoria dos números, tais como fatoração, divisores, múltiplos, e congruências fornecem meios para desenvolver e solidificar o pensamento matemático, para o desenvolvimento de uma apreciação enriquecida da estrutura numérica, especialmente no que diz respeito à identificação e reconhecimento de padrões, bem como para formular e testar conjecturas, para fomentar o entendimento dos princípios e respectivas provas, permitindo justificar a verdade de teoremas de formas disciplinada e fundamentada.

Para Resende (2007) em sua pesquisa sobre o estudo da Teoria dos Números (como disciplina) ou tópicos de Teoria dos Números em outras disciplinas, ficou evidente sua preocupação quanto à ausência dos objetivos das disciplinas nos cursos de Licenciatura em Matemática, das onze universidades pesquisadas, de acordo com suas palavras:

A análise nos permitiu verificar que, em algumas das instituições, os objetivos não são apresentados, ficando a impressão de que a ementa é suficiente para definir o papel de uma disciplina dentro dos cursos. Na maioria delas, os objetivos são restritos, pois visam ao domínio do conteúdo pelo conteúdo, ou estão ligados à familiarização do estudante com o método axiomático, não traduzindo, portanto, a preocupação com a formação do professor para a escola básica (RESENDE, 2007, p. 103).

Isto nos leva a refletir sobre a formação básica do futuro professor de matemática e a sua atuação na educação básica, visto que esta formação poderá ser considerada como uma das variáveis para o problema de aprendizagem que os alunos da educação básica apresentam no conhecimento matemático, principalmente, nos conteúdos de divisibilidade.

Resende (2007) analisou as ementas das disciplinas de Álgebra, Aritmética e Teoria dos Números dos cursos de Licenciatura em Matemática de algumas universidades brasileiras⁶³ e concluiu que em se tratando de tópicos de Teoria dos Números, não há uma preocupação com a formação dos professores para a escola básica, embora a maioria dos cursos traga em seus objetivos que é uma formação voltada para a prática na educação básica.

Conforme Fonseca (2015, p. 58) a teoria dos números oferece uma formalização algébrica consistente para a aritmética dos números inteiros. Significativamente, os futuros professores que se interessam pelo assunto percebem nela a essência da matemática.

Tópicos da teoria dos números, tais como fatoração, divisores, múltiplos, e congruências fornecem meios para desenvolver e solidificar o pensamento matemático, para o desenvolvimento de uma apreciação enriquecida da estrutura numérica, especialmente no que diz respeito à identificação e reconhecimento de padrões, bem como para formular e testar conjecturas, para fomentar o entendimento dos princípios e respectivas provas, permitindo justificar a verdade de teoremas de formas disciplinada e fundamentada (FONSECA, 2015, p. 58).

Para Campbell e Zazkis (2002) a Teoria dos Números ainda tem que estabelecer um lugar próprio nas pesquisas em educação matemática.

Para (Pereira, 2016) a disciplina de Teoria dos Números, nos cursos de Licenciatura em Matemática, tem essa estrutura axiomática-dedutiva e pode apontar como trabalhar as práticas para construção do pensamento algébrico e desenvolvimento das suas vertentes fundamentais.

Estes estudos trouxeram contribuições importantes no sentido de se repensar os cursos de Licenciatura em Matemática para que a disciplina Teoria dos Números na formação inicial de professores realmente contribua para a melhoria da prática docente nas salas de aulas da Educação Básica brasileira.

⁶³ PUC-SP, UFBA, UFMG, UFPE, UFSC, UFSCar, UFSM, UnB, UNESP- Rio Claro, UNICAMP, USP.

2.3.3 A Divisibilidade como saber científico na Teoria dos Números nos livros didáticos de Matemática

Apresentamos nesta seção os conteúdos de divisibilidade conforme são apresentados no livro “Introdução à Teoria dos Números” de acordo com Santos (2014).

Segundo o autor, em seu prefácio: “este livro surgiu a partir de notas de aula utilizadas nos últimos 4 anos num curso introdutório de Teoria dos Números que ministramos na Unicamp” (SANTOS, 1998).

Forneceremos, a seguir, uma breve descrição de cada capítulo. No Capítulo 1, estudamos propriedades elementares sobre divisibilidade no conjunto dos inteiros, sendo o Algoritmo da Divisibilidade (Teorema 1.2) o resultado mais importante. Duas das várias provas da infinitude dos primos são fornecidas (SANTOS, 1998).

A seguir, no Quadro 7, apresentamos o sumário de do livro de “Introdução à Teoria dos Números” que é sugerido nas ementas das disciplinas de Aritmética, Álgebra e Teoria dos Números, no qual enfatizamos o capítulo referente aos conteúdos de divisibilidade.

Quadro 7: Sumário do Livro “Introdução à Teoria dos Números”⁶⁴

Sumário do Livro “Introdução à Teoria dos Números	
1 Divisibilidade (p.1 – 31)	2 Congruência (32 – 52)
1.1 Indução	3 Teoria Combinatória dos Números (53 – 66)
1.2. Divisibilidade	4 Funções Aritméticas (67 – 91)
1.3 O Algoritmo da Divisão	5 Resíduos Quadráticos (92 – 115)
1.4 O Máximo Divisor Comum	6 Raízes Primitivas (116 – 127)
1.5 O Algoritmo de Euclides	7 Representação dos Inteiros como soma de Quadrados (128 – 138)
1.6 Números Primos	8 Frações Contínuas (139 – 159)
1.7 Mínimo Múltiplo Comum	9 Partições (160 – 184)
1.8 Critérios de divisibilidade	
1.9 Problemas resolvidos	
1.10 Problemas propostos	

Fonte: Santos (2014). Adaptado pela autora.

⁶⁴ De José Plínio de Oliveira Santos (2014).

O primeiro capítulo, destinado ao estudo de divisibilidade, contém, segundo o autor vários resultados básicos de extrema importância. O Teorema 1.2, sobre a existência e unicidade do quociente e do resto na divisão de inteiros, e o Teorema Fundamental da Aritmética (TFA), sobre a unicidade da representação de um inteiro como produto de potências de primos, são os mais importantes.

O capítulo aborda os conteúdos de divisibilidade: algoritmo de divisão, máximo divisor comum, algoritmo de Euclides, números primos, mínimo múltiplo comum e critérios de divisibilidade. Apresentam no final do capítulo 14 problemas resolvidos e 44 problemas propostos. Todos esses conteúdos são tratados em 29 páginas.

O autor aborda os objetos de conhecimento matemático através de definições, proposições, teoremas e demonstrações. Desse modo, podemos dizer que a abordagem é formalista clássica, o que conduz a um ensino tradicional, pois primeiramente são apresentadas as definições e as propriedades e, somente no final do capítulo apresenta as tarefas, ou seja, problemas resolvidos e problemas propostos.

Dessa forma, apresentaremos apenas as definições, teoremas e regras mais importantes dos conteúdos de divisibilidade, decorrentes desse autor, para termos uma ideia de como este conteúdo é apresentado, ou seja, temos apenas a intenção de mostrar como se configura esse assunto num livro didático usado no ensino superior nas disciplinas de Teoria dos Números ou outras que abordam os conteúdos de divisibilidade.

Não vimos necessidade de fazer aqui comparações com os livros didáticos do sexto ano do Ensino Fundamental dos anos finais, visto que é obvio como esses conteúdos se apresentam de forma diferente em ambos os contextos, do ensino superior e da educação básica.

A Divisibilidade no livro de Introdução à Teoria dos Números⁶⁵

Definição 1 – Se a e b são inteiros, dizemos que a divide b , denotando $a|b$, se existir um inteiro c , tal que $b = ac$.

Se a não divide b escrevemos $a \nmid b$.

⁶⁵ SANTOS (2014) Capítulo 1 – Divisibilidade (páginas de 3 a 31).

Proposição 1 – Se a, b e c são inteiros, $a|b$, e $b|c$, então $a|c$.

Demonstração: Como $a|b$ e $b|c$, existem inteiros k_1 e k_2 com $b = k_1a$ e $c = k_2b$. Substituindo o valor de b na equação $c = k_2b$ teremos $c = k_2k_1a$ o que implica $a|c$.

Exemplo 1 – Como $3|12$ e $12|48$, então $3|48$. Como não existe inteiro c satisfazendo $15 = 4 \cdot c$, então $4 \nmid 15$.

Proposição 2 – Se a, b, c, m e n são inteiros, $c|a$ e $c|b$ então $c|(ma + nb)$.

Demonstração: Se $c|a$ e $c|b$ então $a = k_1c$ e $b = k_2c$. Multiplicando-se estas duas equações respectivamente por m e n teremos $ma = mk_1c$ e $nb = nk_2c$. Somando-se membro a membro obtemos $ma + nb = (mk_1 + nk_2)c$, o que nos diz que $c|(ma + nb)$.

Exemplo 2: como $3|15$ e $3|42$, então $3|(4 \times 15 + 2 \times 42)$.

Teorema 1 a divisão tem as seguintes propriedades:

- (i) $n|n$
- (ii) $d|n \Rightarrow ad|an$
- (iii) $ad|an$ e $a \neq 0 \Rightarrow d|n$
- (iv) $1|n$
- (v) $n|0$
- (vi) $d|n$ e $n \neq 0 \Rightarrow |d| \leq |n|$
- (vii) $d|n$ e $n|d \Rightarrow |d| = |n|$
- (viii) $d|n$ e $d \neq 0 \Rightarrow (n/d)|n$

Demonstração: como $n = 1 \cdot n$ segue da definição que $n|n$, inclusive para $n = 0$. (ii) Se $d|n$ então $n = cd$ para algum inteiro c . logo $na = cad$ o que conclui a demonstração.

Demonstramos (SANTOS, 2014), agora, (viii). Se $d|n$ então $n = k_1d$ e, portanto n/d é um inteiro. Como $(n/d) \cdot d = n$ segue da definição que $(n/d)|n$. os demais itens também são consequência imediata da definição e serão deixados como exercício.

O Algoritmo da Divisão

Antes de introduzirmos o algoritmo da divisão (ele aparece no Livro VII dos “Elementos” de Euclides, escrito por volta do ano 300 a.C.), enunciamos o chamado Teorema de Eudoxius⁶⁶: Dados a e b inteiros com $b \neq 0$, então a é, múltiplo de b ou

⁶⁶ Segundo Santos (2014, p. 5) este resultado costuma se erroneamente a Arquimedes e chamada “Princípio de Arquimedes”.

se encontra entre dois múltiplos consecutivos de b , isto é, correspondendo a cada par de inteiros a e $b \neq 0$

existe um inteiro q tal que para $b > 0$,

$$qb \leq a < (q + 1)b \quad (1.1)$$

e para $b < 0$

$$qb \leq a < (q - 1)b \quad (1.2)$$

Teorema 2 – Dados dois inteiros a e b , $b > 0$, existe um único par de inteiros q e r tais que

$$a = qb + r, \text{ com } 0 \leq r < b \quad (r = 0 \Leftrightarrow b|a)$$

(q é chamado de quociente e r de resto da divisão de a por b).

Demonstração: Pelo Teorema de Eudoxius, como $b > 0$, existe q satisfazendo:

$$qb \leq a < (q + 1)b$$

o que implica $0 \leq a - qb < b$. Desta forma, se definirmos $r = a - qb$, teremos, garantida, a existência de q e r . A fim de mostrarmos a unicidade, vamos supor a existência de outro par q_1 e r_1 verificando:

$$a = q_1b + r_1 \quad \text{com} \quad 0 \leq r_1 < b.$$

Disto temos $(qb + r) - (q_1b + r_1) = 0 \Rightarrow b(q - q_1) = r_1 - r$, o que implica $b|(r_1 - r)$. Mas, como $r_1 < b$ e $r < b$, temos $|r_1 - r| < b$ e, portanto, como $b|(r_1 - r)$ devemos ter $r_1 - r = 0$ o que implica $r = r_1$. Logo $q_1b = qb \Rightarrow q_1 = q$, uma vez que $b \neq 0$.

Observação: embora no enunciado do Teorema 2 exista a restrição $b > 0$, isto não é necessário e, utilizando-se da equação (1.2) teríamos encontrado q e r também para $b < 0$. Podemos pois, enunciar o Algoritmo da Divisão de Euclides da seguinte forma: Dados dois inteiros a e b , $b \neq 0$ existe um único par de inteiros q e r tais que $a = qb + r$ com $0 \leq r < |b|$.

O Máximo Divisor Comum

O máximo divisor comum de dois inteiros a e b (a ou b diferente de zero) denotado por (a, b) , é o maior inteiro e divide a e b .

Teorema 3 – Seja d o máximo divisor comum de a e b , então existem inteiros n e m tais que $d = n_0a + m_0b$.

Teorema 4 – O máximo divisor comum d de a e b é o divisor positivo de a e b o qual é divisível por todo divisor comum.

Números primos entre si

Definição 2⁶⁷: Os inteiros a e b são relativamente primos quando $(a, b) = 1$.

Teorema 5 – Para a, b e x inteiros temos $(a, b) = (a, b + ax)$.

Exemplo 6: $(3, 15) = (3, 15 + 4 \times 3) = (3, 15 + 7 \times 3) = (3, 15 - 8 \times 3) \dots$

Teorema 6. Se $a|bc$ e $(a, b) = 1$, então $a|c$.

Exemplo: $4|(27 \times 20)$, logo $4|20$ uma vez que $(4, 27) = 1$.

O teorema seguinte nos apresenta um resultado elementar, mas de grande importância na demonstração do Algoritmo de Euclides (Teorema 8).

Teorema 7 – Se a e b são inteiros e $a = qb + r$, onde q e r são inteiros, então $(a, b) = (b, r)$.

Demonstração: Da relação $a = qb + r$ podemos concluir que todo divisor de b e r é um divisor de a (Proposição 2). Esta mesma relação, escrita na forma $r = a - qb$, nos diz que todo divisor de a e b é um divisor de r . Logo, o conjunto dos divisores comuns de a e b é igual ao conjunto de divisores comuns de b e r , o que nos garante o resultado $(a, b) = (b, r)$.

Vamos descrever, através de um exemplo, a ideia utilizada na demonstração do Teorema 8. Estamos interessados no cálculo do máximo divisor comum de 1126 e 522. Utilizamos o Algoritmo da Divisão (Teorema 2) para dividir 1126 por 522. Em seguida dividimos 522 pelo resto 82. Depois 82 pelo resto 30 e assim, sucessivamente, até obtermos resto zero.

$$1126 = 2 \times 522 + 82$$

$$522 = 6 \times 82 + 30$$

$$82 = 2 \times 30 + 22$$

$$30 = 1 \times 22 + 8$$

$$22 = 2 \times 8 + 6$$

$$8 = 1 \times 6 + 2$$

$$6 = 3 \times 2 + 0$$

Da última equação temos que $(6, 2) = 2$ e agora, pelo Teorema 7, podemos concluir da equação $8 = 1 \times 6 + 2$, que $(8, 6) = (6, 2)$, da equação $22 = 2 \times 8 + 6$ que $(22, 8) = (8, 6)$ e,

⁶⁷ Essa Definição 2 diz respeito aos números primos entre si, pois dois números primos entre si têm como mdc o número 1.

por sucessivas aplicações do Teorema 7, construir a sequência de igualdades $(2, 6) = (6, 8) = (8, 22) + (22, 30) = (30, 82) = (82, 522) = (522, 1126)$. Tendo encontrado, desta forma o máximo divisor comum de 522 e 1126 que é o último resto não nulo da sequência de igualdades acima.

Determinação do mdc pelo algoritmo de Euclides

Teorema 8 – Sejam $r_0 = a$ e $r_1 = b$ inteiros não negativos com $b \neq 0$. Se o Algoritmo da divisão for aplicado sucessivamente para se obter

$$r_j = q_j r_{j+1} + r_{j+2}, \quad 0 \leq r_{j+2} < r_{j+1}$$

para $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$ e $r_{n+1} = 0$ então $(a, b) = r_n$, o último resto não-nulo.

Demonstração: Tendo em mente o exemplo anterior, fica fácil acompanhar a demonstração deste algoritmo. Vamos, inicialmente, aplicar o Teorema 2 para dividir $r_0 = a$ por $r_1 = b$ obtendo $r_0 = q_1 r_1 + r_2$, em seguida dividimos r_1 por r_2 obtendo $r_1 = q_2 r_2 + r_3$ e assim, sucessivamente, até a obtenção do resto $r_{n+1} = 0$. Como a cada passo o resto é sempre menor do que o anterior e estamos lidando com números inteiros positivos, é claro que após um número finito de aplicações do Teorema 2, teremos resto nulo.

Temos, pois, a seguinte sequência de equações:

$$\begin{aligned} r_0 &= q_1 r_1 + r_2 & 0 < r_2 < r_1 \\ r_1 &= q_2 r_2 + r_3 & 0 < r_3 < r_2 \\ r_2 &= q_3 r_3 + r_4 & 0 < r_4 < r_3 \\ &\vdots \\ r_{n-2} &= q_{n-1} r_{n-1} + r_n & 0 < r_n < r_{n-1} \\ r_{n-1} &= q_n r_n + 0. \end{aligned}$$

A última destas equações nos diz, pelo Teorema 7, que o máximo divisor comum de r_n e r_{n-1} é r_n . Penúltima, que este número é igual a (r_{n-1}, r_{n-2}) e, prosseguindo desta maneira teremos, por repetidas aplicações do Teorema 7, a sequência:

$$r_n + (r_{n-1}, r_n) = (r_{n-2}, r_{n-1}) = \dots = (r_1, r_2) = (r_0, r_1) = (a, b).$$

Portanto, o máximo divisor comum de a e b é o último resto não-nulo da sequência de divisão descrita.

Números primos

Definição 3: Um número inteiro n ($n > 1$) possuindo somente dois divisores positivos n e 1 é chamado primo.

Se $n > 1$ não é primo dizemos que n é composto.

Proposição 4 – Se $p|ab$, p primo, então $p|a$ ou $p|b$.

Demonstração: Se $p \nmid a$, então $(a, p) = 1$ o que implica, pelo Teorema 6, $p|b$.

Teorema 9 – (Teorema Fundamental da Aritmética) Todo inteiro maior do que 1 pode ser representado de maneira única (a menos da ordem) como um produto de fatores primos.

Demonstração: Se n é primo não há nada a ser demonstrado. Suponhamos, pois, n composto. Seja p_1 ($p_1 > 1$) o menor dos divisores positivos de n . Afirmamos que p_1 é primo. Isto é verdade, pois caso contrário existiria p , $1 < p < p_1$ com $p|n$, contradizendo a escolha de p_1 . Logo, $n = p_1 n_1$.

Se n_1 for primo a prova está completa. Caso contrário, tomamos p_2 como o menor fator de n_1 . Pelo argumento anterior, p_2 é primo e temos que $n = p_1 p_2 n_2$.

Repetindo este procedimento, obtemos uma sequência decrescente de inteiros positivos $n_1, n_2, \dots, n_r$. Como todos eles são inteiros maiores do que 1, este processo deve terminar. Como os primos na sequência $p_1, p_2, \dots, p_k$ não são, necessariamente distintos, n terá, em geral, a forma:

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}.$$

Para mostrarmos a unicidade usamos indução em n . Para $n = 2$ a afirmação é verdadeira. Assumimos, então, que ela se verifica para todos os inteiros maiores do que 1 e menores do que n . Vamos provar que ela também é verdadeira para n . Se n é primo, não há nada a provar. Vamos supor, então, que n seja composto e que tenha duas fatorações, isto é,

$$n = p_1 p_2 \dots p_s = q_1 q_2 \dots q_r.$$

Vamos provar que $s = r$ e que p_i é igual a q_j . Como p_i divide o produto $q_1 q_2 \dots q_r$ ele divide pelo menos um dos fatores q_j . Sem perda de generalidade podemos supor que $p_1 | q_1$. Como são ambos primos, isto implica $p_1 = q_1$. Logo $n/p_1 = p_2 \dots p_s = q_2 \dots q_r$. Como $1 < n/p_1 < n$, a hipótese de indução nos diz que as duas fatorações são idênticas, isto é, $s = r$ e, a menos da ordem, as fatorações $p_1 p_2 \dots p_s$ e $q_1 q_2 \dots q_s$ são iguais.

Teorema 12 – (Euclides) A sequência dos números primos é infinita.

Demonstração: Vamos supor que a sequência dos primos seja finita. Seja pois, $p_1, p_2, \dots, p_n$ a lista de todos os primos. Consideramos o número $R = p_1 p_2 \dots p_n + 1$. É claro que R não é divisível por nenhum dos p_i de nossa lista e R é maior do que qualquer p_i . Mas, pelo Teorema

9, ou R é primo ou possui algum fator primo e isto implica na existência de um primo que não pertence à nossa lista. Portanto, a sequência dos números primos não pode ser finita.

Teorema 15 – Se n não é primo, então n possui, necessariamente, um fator primo menor do que ou igual a $\sqrt{n}$.

Demonstração: Sendo n composto então $n = n_1 \cdot n_2$, onde $1 < n_1 < n$ e $1 < n_2 < n$. sem perda de generalidade vamos supor $n_1 \leq n_2$. Logo, n_1 tem que ser $\leq \sqrt{n}$ pois, caso contrário, teríamos $n = n_1 \cdot n_2 > \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = n$ o que é absurdo. Logo, como pelo Teorema 9, n_1 possui algum fator primo p , este deve ser $\leq \sqrt{n}$. Como p , sendo um fator primo de n_1 é também um fator de n , a demonstração está completa.

Este resultado tem uma importante aplicação prática. Ele nos diz que, para testarmos se um número é primo, é suficiente testarmos a divisibilidade apenas pelos primos $\leq \sqrt{n}$. Portanto, se desejarmos obter a lista de todos os primos menores que 60 devemos excluir dentre os números de 2 a 60 aqueles que são múltiplos de 2, 3, 5 e 7, pois estes são os primos $\leq \sqrt{60}$. Este Processo é chamado de crivo de Eratóstenes.

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~

Logo, os primos entre 2 e 60 são todos aqueles que não foram eliminados pelo processo descrito, isto é,

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59.

Mínimo Múltiplo Comum

Definição 4: O mínimo múltiplo comum de dois inteiros positivos a e b é o menor inteiro positivos que é divisível por a e b . Vamos denotá-lo por $[a, b]$.

Proposição 5 – Se $a = p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \dots p_n^{a_n}$ e $b = p_1^{b_1} p_2^{b_2} p_3^{b_3} \dots p_n^{b_n}$ onde p_1, p_2, p_n , são os primos que ocorrem nas fatorações de a e b , então

$$[a, b] = p_1^{\max\{a_1, b_1\}} p_2^{\max\{a_2, b_2\}} \dots p_n^{\max\{a_n, b_n\}}$$

Demonstração: Da definição de mínimo múltiplo comum, nenhum fator primo p_i deste mínimo poderá ter um expoente que seja inferior nem a a_i e nem a b_i . Se tomarmos, pois, o maior destes dois para expoente de p_i teremos, não apenas um múltiplo comum, mas o menor possível dentre todos eles. O que conclui a demonstração.

CrITÉRIOS de divisibilidade

*Começamos com o critério de **divisibilidade por 3**. Os critérios que apresentamos são, basicamente, aplicações da Proposição 2.*

Vamos, para descrever a ideia, considerar um número n com 5 dígitos $abcde$. Como estamos considerando a representação dele na base 10^{68} , ele pode ser escrito na forma:

$$n = a \times 10^4 + b \times 10^3 + c \times 10^2 + d \times 10 + e.$$

Fazemos, a seguir as seguintes substituições:

$$10 = 9 + 1$$

$$100 = 99 + 1$$

$$1000 = 999 + 1$$

$$10000 = 9999 + 1$$

obtendo:

$$n = a(9999 + 1) + b(999 + 1) + c(99 + 1) + d(9 + 1) + e$$

$$n = (9999a + a) + (999b + b) + (99c + c) + (9d + d) + e$$

$$n = (9999a + 999b + 99c + 9d) + (a + b + c + d + e)$$

$$= 9(1111a + 111b + 11c + d) + (a + b + c + d + e)$$

Disto concluímos que se $3|n$, então como $3|9(1111a + 111b + 11c + d)$, pela Proposição 2, 3 deve dividir $(a + b + c + d + e)$. Reciprocamente, se $3|(a + b + c + d + e)$, então $3|n$, uma vez que $3|9(1111a + 111b + 11c + d)$.

Provamos, desta maneira, o segundo critério de divisibilidade por 3: “Um número é divisível por 3 se, e somente se, a soma de seus dígitos é divisível por 3”.

Para obter um critério de divisibilidade por 9 basta, no argumento acima, substituir 3 por 9, concluímos o seguinte: “Um número é divisível por 9 se, somente se, a soma de seus dígitos é divisível por 9”.

Exemplo: 4578 é divisível por 3 pois, $(4 + 5 + 7 + 8) = 24$ é divisível por 3.

Entretanto 4578 não é divisível por 9 pois, $(4 + 5 + 7 + 8) = 24$ não é divisível por 9.

⁶⁸ A expansão de um número natural qualquer no sistema decimal: $M = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \dots + a_1 \times 10 + a_0$. Sabendo-se que $M = a_n \cdot a_{n-1} \dots a_1 a_0$, onde $0 \leq a \leq 9$, $\forall 0 \leq i \leq n$.

Critério de divisibilidade por 2 – Como todo número inteiro pode ser escrito na forma $10k + j$, onde j é o dígito das unidades, e como 10 é divisível por 2, então ele será divisível por 2 se, e somente se, j for múltiplo de dois. Em outras palavras se, e somente se, ele for par.

Em Santos (2014) os exercícios são apresentados no final do capítulo. Quanto ao assunto divisibilidade o autor apresentou 14 problemas resolvidos e 44 problemas propostos.

Apresentamos no Quadro 8 um exemplo de um problema resolvido e no Quadro 9, alguns exemplos dos problemas propostos de divisibilidade:

Quadro 8: Exemplo de um problema resolvido sobre divisibilidade

Exemplo de um problema resolvido sobre divisibilidade
Problema 1.14 Mostrar que se $a^n - 1$ for primo, $n > 1$ e $a > 1$ então $a = 2$ e n é primo. <i>Solução:</i> Como $a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)$, e o fator da direita é maior do que 1 ($a > 1$) concluímos que $a - 1$ deve ser igual a 1 uma vez que $a^n - 1$ é primo. Portanto a deve ser igual a 2. Se n não for primo então $n = rs$, $r > 1$ e $s > 1$. Disto concluímos que $2^{rs} - 1 = (2^{r(s-1)} + 2^{r(s-2)} + \dots + 2^r + 1)$ O que contradiz o fato de $2^n - 1$ ser primo, o que implica que n deve ser primo.

Fonte: Santos (2014, p. 28).

Quadro 9: Exemplos de alguns problemas propostos sobre divisibilidade

Exemplos de alguns problemas propostos sobre divisibilidade
1. Encontrar, usando o algoritmo de Euclides, o máximo divisor comum dos seguintes pares de números: a) 542 e 234 b) 9652 e 252 c) 24573 e 1387 d) 4276 e 1234 15. Mostrar que além de $2 = 1^3 + 1$ nenhum número da forma $n^3 + 1$ é primo. 27. Determinar todos os números de 3 algarismos divisíveis por 8, 11 e 12.

Fonte: Santos (2014, pp. 28-29).

2.3.4 Considerações sobre o saber sábio de divisibilidade na Teoria dos Números

Assim como o livro de Santos (2014) cujos conteúdos de divisibilidade foram apresentados anteriormente, Resende (2007) analisou onze livros didáticos de matemática que tratam de tópicos ou propriamente da Teoria dos Números e, que são sugeridos para os cursos de Licenciatura em Matemática. Todos os livros tratam das questões ligadas à divisibilidade: algoritmo da divisão, máximo divisor comum, números primos, Teorema Fundamental da Aritmética.

Desse modo, os conteúdos de divisibilidade são vistos a partir de uma abordagem quase que exclusivamente lógico-formal-dedutiva, inclusive, a maioria das tarefas propostas exige a demonstração de proposições apresentadas numa linguagem simbólico-formal.

Ao pensar na formação do professor para a escola básica, a retomada dos conteúdos ligados aos números inteiros, como a sua representação, as operações e suas propriedades e a divisibilidade, é de fundamental importância, pois são assuntos que estão presentes no ensino básico.

No entanto, a supervalorização da abordagem lógico-formal-dedutiva pode distanciar esses saberes dos saberes escolares, não permitindo que o licenciando associe o que ele já sabe ao conhecimento que lhe é apresentado, isto é, o conhecimento “novo” ao “antigo”, reduzindo, assim, as oportunidades de que o licenciando possa discutir, refletir, repensar, reconstruir, ampliar os significados dos conhecimentos que deve ensinar (RESENDE, 2007 p. 133).

Resende (2007) em seu estudo sobre a Teoria dos Números nos cursos de Licenciatura em Matemática enfatiza que a Teoria dos Números tem interfaces e elementos de intersecção com outros campos da matemática, em especial com a Álgebra e com a Aritmética.

Este fato tem trazido algumas interpretações indevidas no ensino. Tem justificado, inclusive, a ausência ou pouca ênfase dada à Teoria dos Números nos currículos dos diferentes níveis de ensino, não só no Brasil, como em outros países, conforme apontam Campbel e Zazkis (2002). Segundo esses pesquisadores, conteúdos de Teoria dos Números são incluídos nos cursos de Álgebra ou de Aritmética, em contextos menos formais, ou contextos do dia-a-dia, o que não lhes garante, muitas vezes, uma posição de destaque e de importância nas propostas curriculares.

No Brasil, conjecturamos que a situação não tem sido diferente. Como os *currículos mínimos* de antes e as *diretrizes curriculares* de agora, indicam a Álgebra como matéria a ser ensinada nas licenciaturas, a ênfase é colocada em outros assuntos, como nas estruturas algébricas. Na escola básica alguns temas de teoria elementar dos números, por uma falta de compreensão mais ampla, vão sendo esvaziados nos currículos por não ter uma aplicação imediata. (RESENDE, 2007, p. 72).

Fonseca (2015) em seu estudo com 19 licenciandos de Matemática⁶⁹ sobre a compreensão do conceito de Números primos e o TFA, se propôs a fazer uma intervenção em sala de aula e como conclusão apresentou algumas considerações sobre as dificuldades apresentadas pelos licenciandos na aprendizagem desses conteúdos de divisibilidade.

Segundo Fonseca (2015, p. 153) o processo desenvolvido nessa pesquisa apontou a dificuldade de reificação, em geral, e sugeriu que algum ponto ou nível particular esteja “fora de alcance” para alguns alunos, pelo menos no momento da formação que vivenciam.

Esta dificuldade foi ilustrada no caso de decomposição de um número composto em seus fatores primos. [...] A unicidade dessa decomposição se dará apenas se o número for completamente decomposto em fatores primos. É esta a diferença de decomposição entre fatores e fatores primos que precisa de um trabalho mais amplo do ponto de vista didático e de outras pesquisas. [...] se os conceitos de primos e compostos não foram adequadamente construídos, essa ocorrência provavelmente inibirá uma conceituação significativa de decomposição em primos, bem como o reconhecimento de representações que dependam de conhecimentos assim constituídos (FONSECA, 2015, p. 153).

Além disso, conforme Fonseca (2015, p. 154), a pesquisa demonstrou necessária uma compreensão adequada do conceito de decomposição em fatores para avançar no sentido de que se entenda a estrutura dos números inteiros.

Como conclusão a esse respeito, Fonseca (2015, p. 154) julga importante para os futuros professores a compreensão sobre a importância do significado do TFA, bem como, levanta como possibilidade de continuidade dessa investigação, outros estudos que procurem investigar se uma abordagem de validações (provas e/ou demonstrações) pode ser eficiente no sentido de trabalhar aspectos conceituais da Teoria dos Números, umas das questões essenciais vistas ao longo de seu estudo.

⁶⁹ Da Universidade Estadual do Pará (UEPA).

Além disso, Fonseca (2015) considera que sua pesquisa se insere como uma contribuição sobre a relação entre a transparência do conceito de número primo e do Teorema Fundamental da Aritmética e as representações em que esses conceitos são codificados, pois, segundo o autor, pesquisas em Teoria dos Números quase não existem no Brasil (FONSECA, 2015, p. 157).

Com esta exposição percebemos o quanto é importante repensar não somente esta disciplina Teoria dos Números como a própria formação de professores para a educação básica, colocando como ponto central a transposição didática, ou seja, como o conhecimento matemático científico ou acadêmico deve ser trabalhado na graduação para que seja transposto para a educação básica a fim de minimizar a problemática da aprendizagem de Matemática.

2.3.5 A Divisibilidade como saber escolar

Anteriormente as disciplinas escolares foram caracterizadas como um conjunto de conteúdos, frutos da transposição didática, incluindo elementos pedagógicos, organizados de modo a manter uma unidade didática. Desse modo, as disciplinas escolares não podem ser vistas como uma mera reunião de conteúdos organizados cronologicamente e sim, como um meio para que os alunos tenham a possibilidade de adquirir conhecimentos a fim de formar uma base sólida para sua vida em sociedade.

As disciplinas escolares são um meio para a escola cumprir com o que se preconiza nos Parâmetros Curriculares Nacionais e, atualmente na Base Nacional Comum Curricular, ou seja, através dos objetos de conhecimentos das áreas específicas de cada nível de escolaridade e, seguindo orientações didático-metodológicas promover o desenvolvimento da formação humana integral dos alunos da educação básica.

Desse modo, é relevante verificar a presença dos conteúdos de divisibilidade (divisibilidade como saber escolar) nos Parâmetros Curriculares Nacionais e na Base Nacional Comum Curricular, pois estes documentos são as referências para os Estados brasileiros através de suas Secretarias de Educação elaborarem seus documentos curriculares para a Educação Básica. Desse modo, também pretendemos verificar a presença dos conteúdos de divisibilidade no Ensino

Fundamental dos Anos Finais, tendo como fonte os documentos curriculares propostos pelas Secretarias de Educação dos seguintes estados: Minas Gerais, Paraná, Pernambuco, Roraima, Rio de Janeiro e São Paulo.

CAPÍTULO 3

CONFIGURAÇÃO E ASPECTOS METODOLÓGICOS

Este capítulo apresenta a descrição dos procedimentos que foram adotados para o desenvolvimento da pesquisa, assim como as etapas, os critérios que foram adotados para a escolha do objeto de pesquisa, as técnicas e os métodos para a análise dos dados.

3.1 DO PERCURSO METODOLÓGICO

Para o alcance dos objetivos este estudo delinea-se como uma pesquisa documental e bibliográfica. A pesquisa documental segundo Moreira e Caleffe (2008, p. 75) além de ser realizada em bibliotecas também poderá ser feita em institutos, centros de pesquisa, museus, acervos particulares e, além disso, a pesquisa documental vale-se de materiais que não receberam ainda um tratamento analítico, ou que ainda podem ser reelaborados de acordo com os objetivos da pesquisa (GIL, 2007, p. 68).

Atualmente pode-se incluir a essa lista a Internet, visto que encontramos vários livros que foram digitalizados e que se encontram disponíveis na internet, o que permite que um público cada vez maior tenha acesso à informação.

Para melhor compreensão do engendramento da pesquisa sobre os conteúdos de divisibilidade nos livros didáticos e documentos oficiais, tais como os documentos curriculares dos estados brasileiros para a educação básica, buscamos em vários pesquisadores sobre a análise de livros didáticos de matemática e análise de programas curriculares de matemática.

Dessa forma, a pesquisa torna-se também bibliográfica, pois se utiliza fundamentalmente das contribuições de diversos autores sobre determinado assunto (GIL, 2007, p. 68).

Quanto à análise dos dados daremos mais ênfase à análise qualitativa descritiva ou interpretativa visto que este termo é mais inclusivo e não dá à pesquisa a conotação de ser essencialmente não quantitativa (MOREIRA, 2011, p. 47).

Evidentemente também haverá algumas características do aspecto quantitativo, considerando que ambos são complementares (SAMPIERI, 2013). Contudo, não será usado como método misto, apenas os dados quantitativos serão utilizados para melhor compreensão do fenômeno estudado.

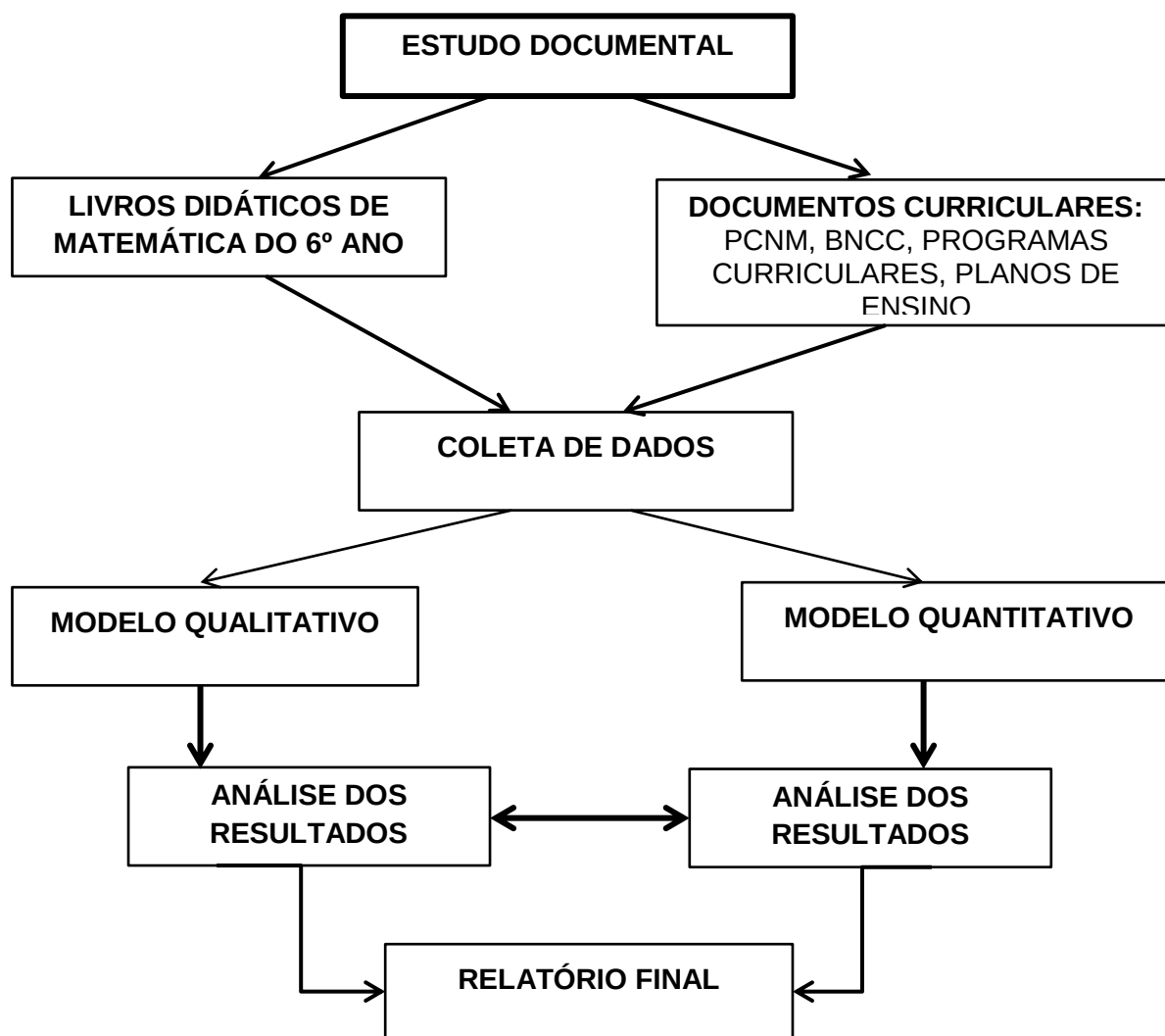
Sampieri (2011) enfatiza que o pesquisador deve ser metodologicamente plural e guiar-se pelo contexto, situação e pelos recursos de que dispõe, considerando seus objetivos e o problema do estudo em questão.

Ao iniciarmos a pesquisa, consideramos primeiramente fazer um estudo exploratório nos livros didáticos de matemática do sexto ano, com o objetivo de analisar os sumários. Quanto à revisão de literatura, inicialmente encontramos poucos estudos sobre o tema divisibilidade, mas com o decorrer da pesquisa, percebemos que o campo para a procura dos estudos publicados poderia se ampliar e encontramos vários trabalhos de dissertações voltados para o ensino de Matemática na Educação Básica.

Além, disso, ampliamos o desenho do estudo para a análise dos documentos curriculares da educação básica (Parâmetros Curriculares de Matemática, BNCC e Programas curriculares estaduais) com o intuito de averiguar como os conteúdos de divisibilidade estão postos e indicados para aplicação em sala de aula, visto que estes documentos são os referenciais para a Educação Básica brasileira e que vão orientar os projetos pedagógicos das escolas.

3.2 OBJETO E DESCRIÇÃO DO LÓCUS DA PESQUISA

Para a realização dessa pesquisa os objetos de estudo são os livros didáticos de matemática do 6º ano, os documentos curriculares da Educação Básica, especificamente do Ensino Fundamental dos anos finais, tais como: Parâmetros Curriculares de Matemática (PCNM), Base Nacional Comum Curricular (BNCC), Documentos Curriculares dos Estados brasileiros, e Planos de Ensino de Matemática. A seguir na figura 4 temos o desenho de nossa pesquisa.

Figura 4: Desenho da Pesquisa

Conforme podemos observar na Figura 4 acima, é um desenho de pesquisa simples, visto se tratar de uma pesquisa documental, mas ao mesmo tempo complexa, por não ser um estudo linear, considerando os vários objetos de estudo e sua relevância no contexto educacional, pois há uma preocupação subjacente com a aprendizagem do conhecimento matemático pelos alunos da Educação Básica brasileira.

Os locais escolhidos para a pesquisa no primeiro momento foram: bibliotecas das escolas estaduais de Boa Vista (RR), bibliotecas das instituições superiores, e bibliotecas públicas estaduais e municipais para encontrar exemplares dos livros didáticos de matemática do sexto ano.

Para adentrarmos nas escolas, primeiramente fomos ao departamento da Educação Básica da Secretaria de Educação do Estado de Roraima solicitar autorização e encaminhamento para realizar a pesquisa nas bibliotecas das escolas estaduais. Na ocasião também solicitamos a relação das escolas estaduais de Ensino Fundamental dos anos finais, onde constavam 47 escolas urbanas.

Escolheu-se apenas trabalhar inicialmente com 10 (dez) escolas do centro de Boa Vista. Iniciando as visitas nas escolas somente a partir da segunda semana de agosto (2017), visto que mais de 50% das escolas estaduais se encontravam em recesso.

Nesta segunda fase a pesquisa teve a abordagem documental dos livros didáticos escolhidos pelas escolas através do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), bem como dos livros antigos usados pelos professores, tendo como referência o Movimento da Matemática Moderna, já que foi um ponto de rupturas e mudanças no ensino da matemática a nível mundial. Então, passamos a procurar por livros antigos de matemática anterior à década de 1960.

As visitas iniciais às escolas estaduais públicas (do Ensino Fundamental dos anos finais) de Boa Vista (RR) serviram para coletar informações a respeito dos livros didáticos de Matemática do 6º ano, escolhidos pelos professores para este triênio: 2017-2018-2019 e, verificar a existência dos livros dos PNLD anteriores, bem como a disponibilidade dos livros para empréstimos.

A seguir apresentamos no Quadro 10 a relação das escolas da cidade de Boa Vista, capital do Estado de Roraima, que foram visitadas para se obter informações sobre os livros didáticos de matemática para este estudo.

Quadro 10: Relação das Escolas Estaduais de Boa Vista – RR do Ensino Fundamental Anos Finais

Relação das Escolas Estaduais de Boa Vista (RR) do Ensino Fundamental	
Escolas Estaduais	Escolas Estaduais
1. Colégio de Aplicação – UFRR 2. Diva Alves de Lima 3. Euclides da Cunha 4. Hildebrando Ferro Bittencourt 5. Oswaldo Cruz 6. Monteiro Lobato 7. Gal. Penha Brasil	8. Presidente Costa e Silva 9. São José 10. Professora Vitória Mota Cruz

3.3 ESTRATÉGIAS E INSTRUMENTOS DE COLETA DE DADOS

Os instrumentos utilizados nesta pesquisa foram: (i); ficha de informações do LDM (ii) roteiro para a visita nas escolas e bibliotecas públicas; (iii) ficha para avaliação da existência dos conteúdos de divisibilidade dos livros didáticos.

A coleta dos dados foi feita através de livros físicos e digitalizados, dados sobre o PNLD nos sites do MEC e portal do FNDE. Para os livros que não puderam ser disponibilizados usou-se um *smartfone* para fotografar e digitalizar os livros didáticos de matemática.

Ao iniciar a busca pelos livros didáticos de matemática antigos nas escolas não pensei que fosse me deparar com tanta dificuldade, mas nas escolas da capital do Estado de Roraima não encontrei nenhum livro, mesmo porque outros pesquisadores já haviam procurado pelos livros. Coloquei avisos em grupos de matemática no *WhatsApp*,⁷⁰ procurei em sebos, não só de Boa Vista, como de Belém e Brasília.

Encontrei relatos de pesquisadores com as mesmas dificuldades para encontrar os livros didáticos antigos de matemática, nas escolas públicas.

Segundo o relato de Coelho⁷¹ (2017, p. 20) “quando chegávamos às escolas estaduais recebíamos as mesmas respostas, diziam que não havia livros dessa época (1975 ou mais antigos) e que os mais antigos eram jogados no lixo ou doados para as escolas do interior do estado”.

Ao visitar algumas escolas no interior do Estado de Roraima, nos municípios vizinhos, não encontrei nenhum livro de época anterior ao ano 2000. Mas, nas visitas que fiz para orientação na cidade de Belém, visitei a biblioteca pública “Artur Viana” e encontrei alguns livros didáticos de matemática de várias épocas.

Contudo, no acervo de obras raras não encontrei nenhum livro de matemática. Visitei também sebos e, em alguns encontrei alguns livros da década de 70, mas o maior achado foi na biblioteca da escola de aplicação da Universidade Federal do Pará, onde encontrei vários livros da década de 60 a 70, porém, a maioria era de nível

⁷⁰ WhatsApp é um software para smartphones utilizado para troca de mensagens de texto instantaneamente, além de vídeos, fotos e áudios, através de uma conexão a internet, sendo lançado oficialmente em 2009, pelo grupo Yahoo empresa americana de serviços para a internet que funciona na cidade de Santa Clara, na Califórnia, Estados Unidos. Disponível em <https://www.significados.com.br/whatsapp/> acesso em 11 nov./2018.

⁷¹ TCC de Adjairon da Silva Coelho (UFRR, 2017) “O ensino de álgebra nos livros didáticos de 5ª a 8ª séries, segundo a proposta curricular para Roraima (Década de 1970)”.

médio, além disso, ainda na cidade de Belém (PA), no acervo pessoal do meu orientador encontrei alguns livros antigos, inclusive o de Osvaldo Sangiorgi (de 1968).

É importante frisar que a trajetória que nos conduz a um resultado final não foi linear, houve muitas idas e vindas, muitos ajustes e reformulação das questões, dos objetivos e das análises.

A nossa pesquisa teve um redirecionamento para a época atual, por considerações levantadas pela Banca de Avaliação, contudo, como consideramos relevante fazer comparações sobre os conteúdos de divisibilidade abordados em diferentes épocas, resolvemos analisar os livros selecionados por épocas que marcaram o ensino de Matemática em nosso país.

Então, selecionamos um livro da década de 20, dois da década de 60, época do Movimento da Matemática Moderna, dois livros da década de 70, dois livros da década de 80, dois livros da década de 90. No período de 2000 a 2011, selecionamos três livros dos dois autores mais escolhidos pelos professores, Andrini (2002) e Dante (2005 e 2009) e um de outros autores (2002). Além desses, selecionamos seis livros de matemática do 6º ano mais escolhidos do PNLD-2014 e oito livros do último PNLD-2017, para o triênio 2017-2018-2019.

Além, da análise dos livros, tivemos que começar um novo estudo sobre os documentos oficiais curriculares de seis estados brasileiros, incluindo o de Roraima, contexto principal desta pesquisa, para verificar como os conteúdos de divisibilidade estavam sendo sugeridos para o estudo na Educação Básica brasileira.

Para a seleção dos referenciais curriculares dos estados, iniciamos a busca nos sites das Secretarias de Educação das principais capitais brasileiras, mas encontramos dificuldades para acessar esses sites (alguns se encontravam indisponíveis para acesso). Então, tomamos outra decisão, escolher pelas regiões: Norte (Estado de Roraima), Nordeste (Pernambuco), Sudeste (Minas Gerais, São Paulo e Rio de Janeiro), Sul (Paraná).

Também decidimos verificar em três planos de ensino para o ensino fundamental anos finais de algumas das escolas visitadas de Boa Vista (RR), a fim de comparar com os livros didáticos adotados por essas escolas.

Na próxima seção apresentamos os livros selecionados para a pesquisa.

3.3.1 Seleção dos Livros Didáticos de Matemática para o Estudo

Para esta pesquisa selecionamos 27 livros didáticos de matemática do sexto ano do Ensino Fundamental dos anos finais ou nível e anos similares, anteriores ao PNLD 2017, para servir de comparação com os oito livros mais escolhidos pelos professores brasileiros do PNLD-2017. Assim, para essa seleção consideramos algumas épocas relevantes em que houveram reformas no ensino de Matemática, por isso dividimos a análise em três fases:

A primeira fase (Fase 1) compreende o período anterior ao Movimento da Matemática Moderna (MMM), durante o MMM e até o final da década de 70. Para esse período escolhemos analisar um livro da segunda década do início do século XX, mais precisamente, o livro de Euclides Medeiros Guimarães Roxo, de 1926. Do período que compreende a época vigente do MMM (1960 a 1979), escolhemos dois livros de Osvaldo Sangiorgi, o do ano de 1963 e 1968, e dois da década de 70, um de Scipione Di Pierro Neto (1970) e outro de Lydia Lamparelli et al., (1974), conforme podemos visualizar na Tabela 7 a seguir.

Tabela 7: Relação dos livros didáticos de matemática selecionados para análise da Fase 1 (1926 a 1979)

Relação dos Livros de Matemática da Fase 1 (1926 a 1979)				
LDM	Título dos livros de Matemática	Ano	Autores	Editora
1	Lições de Arithmética	1926	Euclides Roxo	Francisco Alves
2	Matemática curso moderno para os ginásios – Volume 1.	1963	Osvaldo Sangiorgi	São Paulo Editora S.A.
3	Matemática curso moderno para os ginásios – 1º volume	1968	Osvaldo Sangiorgi	Cia. Ed. Nacional
4	Matemática na escola renovada curso ginásial	1970	Scipione Di Pierro Neto	Saraiva
5	Matemática para o 1º Grau (5ª Série)	1974	Lydia Lamparelli et al.	Ed. do Brasil

A Fase 2 está dividida em duas partes: para a primeira, selecionamos oito livros do período de 1980 a 2010 e para a segunda parte, selecionamos seis livros do PNLD-2014. Desse modo, escolhemos um ou dois livros de cada década, ou seja, dois livros da década de 80, dois da década de 90 e quatro do período de 2000 a 2010. A seguir, na Tabela 8, apresentamos a relação completa da Fase 2, primeira parte.

Tabela 8: Relação dos livros didáticos de matemática selecionados para análise da fase 2 – parte 1 (1980 a 2010)

Relação dos livros de matemática da fase 2 – parte 1 da 5ª série (1980 a 2010)				
LDM	Título dos livros de Matemática	Ano	Autores	Editores
6	Matemática 5ª série	1984	Álvaro Andrini	Brasil
7	Praticando Matemática 5ª série	1989	Álvaro Andrini	Brasil
8	Matemática fácil – 5ª série	1991	Linaldo Malveira	Ática
9	Matemática e vida 5ª série	1995	Bongiovanni, Vissoto e Laureano	Ática
10	Matemática: ideias e desafios	2002	Iracema Mori e Dulce Onaga	Saraiva
11	Novo praticando matemática 5ª série	2002	Álvaro Andrini e Maria José Vasconcelos Zampirolo	Brasil
12	Tudo é matemática 5ª série	2005	Luiz Roberto Dante	Ática
13	Tudo é matemática 5ª série	2010	Luiz Roberto Dante	Ática

Continuando com a Fase 2, segunda parte, preferimos fazer uma relação específica dos livros selecionados, do PNLD-2014, conforme Tabela 9 a seguir. Escolhemos estes seis livros a partir da seleção dos dez livros de matemática do 6º ano mais escolhidos pelos professores brasileiros (FNDE, 2014).

Tabela 9: Relação dos livros didáticos de matemática do 6º ano selecionados para análise da fase 2 – parte 2 (PNLD-2014)

Relação dos livros de matemática selecionados para a Fase 2 – parte 2 do 6º ano – PNLD 2014 (Os mais escolhidos do PNLD-2014)				
Lugar		Título dos livros de Matemática	Autores	Editores
1º	LDM-14	Praticando Matemática Edição Renovada	Álvaro Andrini e Maria José Vasconcelos	Do Brasil
2º	LDM-15	Vontade de saber matemática	Joamir Souza e Patrícia Moreno Pataro	FTD
3º	LDM-16	Projeto Teláris – Matemática	Luiz Roberto Dante	Ática
4º	LDM-17	Matemática - Bianchini	Edwaldo Bianchini	Moderna
6º	LDM-18	Matemática: Teoria e contexto	Marília Centurió & José Jakubovic	Saraiva
7º	LDM-19	Matemática: ideias e desafios	Iracema Mori e Dulce Satiko Onaga	Saraiva

Fonte: FNDE (2014). Elaborada pela autora.

Por fim, para a terceira e última fase escolhemos oito dos dez livros mais escolhidos pelos professores brasileiros do PNLD-2017. A relação dos dez livros de

Matemática do 6º ano mais escolhidos, conforme o FNDE (2017), encontra-se no item 5.1.3 na página 221. Os dois livros que não foram selecionados (8º e 10º lugares) para a análise do PNLD-2107, são livros que não foram escolhidos pelas escolas estaduais de Boa Vista (RR) e, por isso não encontramos os exemplares desses livros, conforme a Tabela 10.

Tabela 10: Relação dos livros didáticos de matemática selecionados para análise da Fase 3 (PNLD-2017)

Relação dos livros de matemática do 6º ano selecionados para a fase 3 – PNLD 2017 (Os mais escolhidos do PNLD-2017)				
Lugar		Título dos livros do 6º ano	Autores	Editora
1º	LDM-20	Praticando matemática	Álvaro Andrini e M ^a José Vasconcelos	Brasil
2º	LDM-21	Vontade de saber matemática	Joamir Souza e Patrícia Moreno Pataro	FTD
3º	LDM-22	Matemática – compreensão e prática	Ênio Silveira	Moderna
4º	LDM-23	Projeto Teláris – Matemática	Luiz Roberto Dante	Ática
5º	LDM-24	Matemática - Bianchini	Edwaldo Bianchini	Moderna
6º	LDM-25	Projeto Araribá – Matemática	Editora Moderna (organização)	Moderna
7º	LDM-26	Convergências matemática	Eduardo Chavante	SM
9º	LDM-27	Descobrimos e aplicando a matemática	Alceu dos Santos Mazzeiro e Paulo Antônio Fonseca Machado	Dimensão

Fonte: Portal FNDE (2017). Elaborada pela autora.

Após selecionarmos os 27 livros didáticos de matemática, faremos a identificação dos capítulos ou unidades que contêm os conteúdos de divisibilidade conforme os sumários dos livros e mediante essas informações vamos comparar os conteúdos contidos nos sumários e no interior das unidades ou capítulos de cada livro para, finalmente, computar em uma ficha de análise cada conteúdo de divisibilidade presente em cada LDM.

Os livros didáticos de matemática dos 6º anos serão identificados, por um código, como por exemplo: LDM-1, LDM-2 e assim sucessivamente.

3.3.2 Ordenação dos conteúdos de divisibilidade

Entendemos que os conteúdos de divisibilidade teriam uma melhor ordem para organizar e distribuir os conteúdos nos livros, para isso classificamos os conteúdos em principais e secundários. Os conteúdos principais (CP) seguem a

ordem: CP-1 Múltiplos; CP-2 Divisores; CP-3 Critérios de divisibilidade; CP-4 Números primos; CP-5 Fatoração completa (Decomposição em fatores primos); CP-6 Máximo divisor comum; CP-7 Mínimo múltiplo comum.

Essa ordem se justifica por considerarmos os assuntos precedentes como conhecimentos prévios necessários para a aprendizagem dos demais conteúdos na ordem proposta. Desse modo, para aplicar os critérios de divisibilidade os alunos já devem conhecer e saber calcular os múltiplos e divisores de um número, ou seja, e ter a noção de quando um número pode ser “múltiplo de” e “divisível por” e, assim seu conhecimento se amplia e se consolida com os critérios de divisibilidade podendo desenvolver mais facilmente o cálculo mental.

Quando o aluno for trabalhar com os números primos poderá aplicar facilmente os cálculos envolvendo múltiplos e divisores e poderá reduzir os cálculos para a identificação dos números primos aplicando os critérios de divisibilidade. O aluno só poderá fazer a decomposição em fatores primos após conhecer esses assuntos mencionados anteriormente.

Para o estudo de Máximo divisor comum e Mínimo múltiplo comum colocamos primeiro o assunto de MDC, visto que para a determinação do mmc, existe uma regra que usa o mdc dos números dados, bem como a relação dos números primos entre si que são identificados desse modo por possuírem o 1 como mdc e, desse modo, também são usados na determinação do mmc.

Apresentamos a seguir uma relação dos conteúdos de divisibilidade, objeto do nosso estudo, que irá nos guiar para a análise da presença/ausência desses conteúdos nos livros didáticos de matemática do sexto ano ou série equivalente, bem como nos documentos curriculares nacionais.

A organização desses conteúdos conforme apresentada no Quadro 11 decorre da observação de como foram comumente apresentados nos livros didáticos antigos e por observação em sala de aula sobre a melhor ordem para se apresentar aos alunos, a fim de favorecer uma aprendizagem satisfatória. Assim, esta ordem nos parece satisfatória, considerando o conhecimento matemático que o aluno deverá assimilar para atender aos objetivos dos conteúdos de divisibilidade.

Quadro 11: Relação dos conteúdos principais e secundários de divisibilidade para a análise dos livros didáticos de matemática do 6º ano.

Conteúdos de Divisibilidade para análise dos livros didáticos de matemática
DIVISIBILIDADE 1 MÚLTIPLOS 1.1 Definição de múltiplos de um número 1.2 Ideia de “múltiplo de” 1.3 Cálculos dos múltiplos (pela operação de multiplicação) 1.4 Sequência dos múltiplos de um número
2. DIVISORES 2.1 Definição de divisor de um número 2.2 Ideia de “divisível por” 2.3 Determinação pela sequência dos divisores (ou pela divisão ou multiplicação) 2.4 Determinação de todos divisores pela DFP (fatoração completa) 2.5 Determinação de todos divisores pela DFP (pelo algoritmo de Euclides) 2.6 Cálculo do Número (quantidade) de divisores
3 CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE 3.1 Definição 3.2 Divisibilidade por 2: 3.3 Divisibilidade por 3 3.4 Divisibilidade por 4 3.5 Divisibilidade por 5 3.6 Divisibilidade por 6: 3.7 Divisibilidade por 7 3.8 Divisibilidade por 9 3.9 Divisibilidade por 10 3.10 Divisibilidade por 11
4 NÚMEROS PRIMOS 4.1 Definição de Números Primos 4.2 Definição de Números Compostos 4.3 Identificação de números primos pelo crivo de Eratóstenes. 4.4 Reconhecimento de um número primo pela divisão por primos
5 FATORAÇÃO COMPLETA – DECOMPOSIÇÃO EM FATORES PRIMOS (DFP) 5.1 Definição de fatoração 5.2 Definição de Fatoração Completa (Teorema Fundamental da Aritmética - TFA) 5.3 Cálculo dos fatores primos pela multiplicação (método da árvore) 5.4 Decomposição em fatores primos por divisão sucessiva (com traço vertical) 5.5 Aplicação de fatoração no cálculo de raiz quadrada
6 MÁXIMO DIVISOR COMUM (MDC) 6.1 Definição de Máximo divisor comum 6.2 Determinação do mdc pela sequência de divisores 6.3 Determinação do mdc pela divisão sucessiva ou fatoração completa 6.4 Determinação do mdc pela DFP divisão sucessiva e simultânea 6.5 Determinação do mdc pelo processo prático de Euclides 6.6 Identificação dos números primos entre si.
7 MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM (MMC) 7.1 Definição de mmc 7.2 Determinação do mmc pela sequência de múltiplos 7.3 Determinação do mmc pela DFP em separado ou fatoração completa 7.4 Determinação do mmc pela DFP divisão sucessiva simultânea 7.5 Determinação do mmc pela relação com o mdc.

Quanto à organização dos conteúdos de divisibilidade, gostaríamos de fazer uma observação sobre o assunto de divisores, pois esse assunto se encontra, na maioria dos livros didáticos no início apenas como parte introdutória, com definição ou apresentando a ideia de “divisível por”. A determinação dos divisores (os cálculos e algoritmos) muitas vezes estão iniciando o assunto de mdc onde se apresentam a definição e a determinação dos divisores comuns.

A partir desta organização, definimos como *conteúdos principais* (CP) os itens 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 e como *conteúdos secundários* (CS) os subitens apresentados no Quadro 11, para análise de averiguação da presença-ausência dos conteúdos de divisibilidade nos livros didáticos de matemática do sexto ano. Para computar os dados sobre os conteúdos de divisibilidade presentes ou ausentes, elaboramos uma ficha com esses conteúdos para a análise dos livros didáticos de matemática por autores apresentada no Quadro 12.

Essa ficha possibilitará identificar os conteúdos de divisibilidade presentes e os ausentes nos livros selecionados. Da análise realizada no LDM e computada na Ficha de Análise (Quadro 12), fazemos uma computação resumida, com o conceito referente aos pontos obtidos da análise, na Tabela 11, logo após a ficha, que irá constar em cada livro analisado no capítulo 6, seguida de um gráfico para se ter uma melhor visão da quantidade dos conteúdos de divisibilidade presentes e ausentes.

Para a análise quantitativa e qualitativa da presença/ausência dos conteúdos principais (CP) e secundários (CS) de divisibilidade da ficha acima (Quadro 12), elaboramos alguns indicadores e condições para atribuir os valores e qualificação de conceitos: Identificamos sete conteúdos principais e atribuímos o valor unitário para cada um deles, bem como o valor máximo de 7 (sete) atribuído para a presença de todos os conteúdos principais de divisibilidade.

É possível que alguém pense que a existência de todos os conteúdos seja suficiente para atribuir o conceito ótimo, mas esses conteúdos principais sem o apoio dos conteúdos secundários não são suficientes para garantir uma boa aprendizagem. Assim, para se conseguir alcançar o mínimo de competência matemática e o desenvolvimento das habilidades para trabalhar esses conteúdos de forma conceitual ótima, além de contar com a presença dos conteúdos principais, deve ter no mínimo 90% da presença desses conteúdos, ou seja, no mínimo de 36 conteúdos secundários de divisibilidade do total de 40 que relacionamos.

A seguir, no Quadro 12, apresentamos a Ficha de análise (modelo) que servirá para analisar a presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade de cada um dos 27 livros selecionados.

Quadro 12: Ficha de análise (modelo) da presença e ausência dos conteúdos de divisibilidade nos livros didáticos de matemática do 6º ano.

Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade LDM de.....				
	CONTEÚDOS DE DIVISIBILIDADE	(P)	(A)	T.CD
1	Múltiplos	---	---	---
1.1	Definição de múltiplos de um número			
1.2	Ideia de “múltiplo de”			
1.3	Cálculos dos múltiplos (pela multiplicação)			
1.4	Sequência dos múltiplos de um número			
	TOTAL CS-1			04
2	Divisores	---	---	---
2.1	Definição de divisor de um número			
2.2	Ideia de “divisível por”			
2.3	Determinação dos divisores pela sequência (divisão ou multiplicação)			
2.4	Determinação de todos divisores pela DFP (Fatoração completa)			
2.5	Determinação de todos divisores pela DFP (Algoritmo de Euclides)			
2.6	Cálculo do Número (quantidade) de divisores			
	TOTAL CS-2			06
3	Critério de divisibilidade	---	---	---
3.1	Definição			
3.2	Divisibilidade por 2			
3.3	Divisibilidade por 3			
3.4	Divisibilidade por 4			
3.5	Divisibilidade por 5			
3.6	Divisibilidade por 6			
3.7	Divisibilidade por 7			
3.8	Divisibilidade por 9			
3.9	Divisibilidade por 10			
3.10	Divisibilidade por 11			
	TOTAL CS-3			10
4	Números primos	---	---	---
4.1	Definição de Números primos			
4.2	Definição de Número composto			
4.3	Identificação de números primos pelo Crivo de Eratóstenes.			
4.4	Reconhecimento de um número primo pela divisão por primos			
	TOTAL CS-4			04
5	Fatoração completa – Decomposição em Fatores Primos (DFP)	---	---	---
5.1	Definição de fatoração			
5.2	Definição de fatoração completa (TFA)			
5.3	Cálculo dos fatores primos pela multiplicação			
5.4	Decomposição em fatores primos por divisão sucessiva			
5.5	Aplicação de fatoração no cálculo de raiz quadrada			
	TOTAL CS-5			05

Quadro 12: Continuação

Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade LDM de.....				
	CONTEÚDOS DE DIVISIBILIDADE	(P)	(A)	T.CD
	TOTAL CS-5			05
6	Máximo Divisor Comum (MDC)	---	---	---
6.1	Definição de Máximo divisor comum			
6.2	Determinação do mdc pela sequência de divisores			
6.3	Determinação do mdc pela fatoração completa			
6.4	Determinação do mdc pela DFP, divisão sucessiva e simultânea			
6.5	Determinação do mdc pelo processo prático de Euclides			
6.6	Identificação de primos entre si			
	TOTAL CS-6			06
7	Mínimo múltiplo comum (MMC)	---	---	---
7.1	Definição de mmc			
7.2	Determinação do mmc pela sequência dos múltiplos			
7.3	Determinação do mmc pela DFP em separado ou fatoração completa			
7.4	Determinação do mmc pela DFP divisão sucessiva e simultânea			
7.5	Determinação do mmc pela relação com o mdc.			
	TOTAL CS-7			05
TOTAL GERAL				40

Legenda: (P) presente; (A) ausente; CS (conteúdos secundários de divisibilidade)

Para computar os dados sobre a presença e ausência dos conteúdos de divisibilidade (principais e secundários) dos 27 livros didático de matemática dos 6º anos a partir da Ficha de análise, de modo resumido, elaboramos a Tabela 11 a seguir.

Tabela 11: LDM_: Resultado final quantitativo e qualitativo da presença/ausência dos Conteúdos de Divisibilidade do Livro de _____

Resultado final quantitativo e qualitativo da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade LDM de					
Conteúdos Principais			Conteúdos Secundários		Total
CP	CP _P	CP _A	CS _P	CS _A	CD _P
CP1					04
CP2					06
CP3					10
CP4					04
CP5					05
CP6					06
CP7					05
Total					40
Conceito:					

Legenda: CD_P (Conteúdos de divisibilidade presentes); CP_P (Conteúdos principais presentes); CP_A (Conteúdos principais ausentes); CS_P (Conteúdos secundários presentes); CS_A (Conteúdos secundários ausentes).

Os valores atribuídos à presença dos conteúdos principais e secundários de divisibilidade na Tabela 11 acima, serviram de referência para elaborar os indicadores e conceitos com os quais iremos analisar a presença/ausência desses conteúdos nos livros didáticos de matemática, contidos na Ficha de análise (Quadro 12).

3.3.3 Categorias para Verificar a Presença/ausência dos Conteúdos de Divisibilidade nos Livros Didáticos de Matemática

Ao fazermos as análises das teses, dissertações e artigos sobre os conteúdos abordados neste estudo procuramos por modelos de análise de livros didáticos de matemática que pudessem auxiliar em nossa pesquisa. Entretanto, não encontramos nenhum com a mesma configuração por nós proposta. Isto possibilitou que elaborássemos os nossos próprios modelos de análise da presença/ausência de um dado conteúdo num livro didático. Esperamos que este material possa contribuir para pesquisas futuras que tenham objetivos similares.

Conforme podemos observar na Tabela 11, cada conteúdo principal (CP) tem um quantitativo de conteúdo secundário (CS) e, a partir dessas quantidades fizemos cálculo para compor os indicadores para computar a quantidade de conteúdos de divisibilidade presentes e ausentes. Para um intervalo de números equivalentes à quantidade de conteúdos presentes teremos um determinado o conceito, conforme podemos observar nos Quadros 13 e 14.

As categorias usadas para gerar os indicadores foram as seguintes:

- (1) Se todos os conteúdos principais estão presentes (CP_P) e não há nenhum dos conteúdos secundários ausentes (CS_A);
- (2) Se todos os conteúdos principais estão presentes (CP_P), e há um ou mais de um dos conteúdos secundários ausentes (CS_A).

Estas categorias estão presentes no Quadro 13 e, de acordo com a quantidade dos CS presentes-ausentes, obtém-se os conceitos: ótimo, bom, regular, fraco e insuficiente. O LDM recebe o conceito ótimo devido à “ausência inexpressiva” constatada dos conteúdos de divisibilidade; recebe o conceito bom devido à “ausência pouco expressiva” dos conteúdos de divisibilidade; recebe o conceito regular devido à “ausência moderadamente expressiva” dos conteúdos de divisibilidade; recebe o conceito fraco devido à “ausência expressiva” dos conteúdos de divisibilidade; recebe

o conceito insuficiente devido à “ausência muito expressiva” constatada dos conteúdos de divisibilidade.

Quadro 13: Indicadores para qualificar os livros didáticos de matemática selecionados quanto à presença-ausência dos conteúdos de divisibilidade (CD)

Indicadores para a análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade nos livros didático de matemática do 6º ano		
Indicadores	Quantidade de CD presente	Conceito
► Se estão todos os 7CP_P presentes e todos CS_P ► Se todos os 7 CP_P e de 1 – 4 CS_A: $(CS_T - CS_A) = CD_P$ $1 \leq CS_A \leq 4 \Leftrightarrow 36 \leq CD_P \leq 40$ 1ª) $40 - 1 = 39 \Leftrightarrow 97,5 \%$ 2ª) $40 - 2 = 38 \Leftrightarrow 95 \%$ 3ª) $40 - 3 = 37 \Leftrightarrow 92,5 \%$ 4ª) $40 - 4 = 36 \Leftrightarrow 90 \%$	36 – 40	Ótimo
► Se todos os 7 CP_P e de 5 – 9 CS_A: $5 \leq CS_A \leq 9 \Leftrightarrow 31 \leq CD_P \leq 35$ 5ª) $40 - 5 = 35 \Leftrightarrow 87,5 \%$ 6ª) $40 - 6 = 34 \Leftrightarrow 85 \%$ 7ª) $40 - 7 = 33 \Leftrightarrow 82,5 \%$ 8ª) $40 - 8 = 32 \Leftrightarrow 80 \%$ 9ª) $40 - 9 = 31 \Leftrightarrow 77,5 \%$	31 – 35	Bom
► Se todos os 7 CP_P e de 10 – 14 CS_A: $10 \leq CS_A \leq 14 \Leftrightarrow 26 \leq CD_P \leq 30$ 10ª) $40 - 10 = 30 \Leftrightarrow 75 \%$ 11ª) $40 - 11 = 29 \Leftrightarrow 72,5 \%$ 12ª) $40 - 12 = 28 \Leftrightarrow 70 \%$ 13ª) $40 - 13 = 27 \Leftrightarrow 67,5 \%$ 14ª) $40 - 14 = 26 \Leftrightarrow 65 \%$	26 – 30	Regular
► Se todos os 7 CP_P e de 15 – 19 CS_A: $15 \leq CS_A \leq 19 \Leftrightarrow 21 \leq CD_P \leq 25$ 15ª) $40 - 15 = 25 \Leftrightarrow 62,5 \%$ 16ª) $40 - 16 = 24 \Leftrightarrow 60 \%$ 17ª) $40 - 17 = 23 \Leftrightarrow 57,5 \%$ 18ª) $40 - 18 = 22 \Leftrightarrow 55 \%$ 19ª) $40 - 19 = 21 \Leftrightarrow 52,5 \%$	21 – 25	Fraco
► Se todos os 7 CP_P e de 20 – 24 CS_A: $20 \leq CS_A \leq 24 \Leftrightarrow 16 \leq CD_P \leq 20$ 20ª) $40 - 20 = 20 \Leftrightarrow 50 \%$ 21ª) $40 - 21 = 19 \Leftrightarrow 47,5 \%$ 22ª) $40 - 22 = 18 \Leftrightarrow 45 \%$ 23ª) $40 - 23 = 17 \Leftrightarrow 42,5 \%$ 24ª) $40 - 24 = 16 \Leftrightarrow 40 \%$	16 – 20	Insuficiente

Além disso, se algum livro apresentar a ausência de um ou mais de um dos conteúdos principais de divisibilidade, pensamos em outras categorias, conforme relacionamos a seguir:

(3) Se faltar um conteúdo principal (1 CP_A), e um ou mais de um dos conteúdos secundários ausentes ($1 - n CS_A$);

(4) Se faltar dois conteúdos principais (2 CP_A) e um ou mais de um dos conteúdos secundários ausentes ($1 - n CS_A$);

(5) Se faltar três conteúdos principais (3 CP_A) e um ou mais de um dos conteúdos secundários ausentes ($1 - n CS_A$).

Os conceitos correspondentes a essas categorias são: bom, regular, fraco e insuficiente.

Para o caso de faltar um dos conteúdos principais definimos que o livro não poderá ter um conceito ótimo, pois qualquer um dos conteúdos principais de divisibilidade é relevante. Desse modo, estes indicadores terão “bom” como conceito máximo. Vamos dar um exemplo do cálculo realizado para se obter estes indicadores:

Cada CP tem uma quantidade de CS que varia de 4 a 10, numa média de 6 CS, conforme podemos observar na ficha de análise (Quadro 12), por exemplo, a quantidade de CS é a mesma para CP-1 e CP-4 que é de 4 CS, a quantidade de CS é a mesma para CP-2 e CP-6 que é de 6 CS, a quantidade de CS é a mesma para CP-5 e CP-7 que é de 5 CS, e, somente CP-3 tem quantidade diferente de todos, que é 10 CS (são os critérios de divisibilidade).

Relacionamos os CP com quantidades iguais, como por exemplo, CP-1 e CP-4 que têm 4 CS. Desse modo, identificamos os CP de mesma quantidade de CS, como por exemplo, CP-1/4_A, ou seja, se um desses CP estiver ausente, temos a diferença $40 - 4 = 36$, isto é, restará somente 36 CS presentes e, desses 36, calculamos as possibilidades de ausências dos demais CS restantes, da seguinte forma:

- Se faltar 1 CP_A , por exemplo, se faltar CP-1 ou CP-4, temos $40 - 4 = 36$ CS. Logo, a base de cálculo já não será mais 40 e sim, 36 CS. Então, a partir da falta de um dos conteúdos principais (CP), passa-se a observar a quantidade de CS que estarão ausentes em algum livro. Por exemplo, se faltar um CP, estará faltando no mínimo 4 CS e, ainda estará dentro do intervalo da quantidade para CS presentes do conceito “ótimo”, mas um livro que falta um CP não pode ser considerado ótimo. Então, definimos os indicadores no Quadro 14, tendo “bom” como conceito máximo.

- Nesse caso, para se obter um conceito bom, o livro deve ter de 31 a 35 conteúdos secundários presentes ($31 \leq CS_P \leq 35$). Como para o conceito ótimo há a possibilidade de variação de 1 a 5 conteúdos secundários ausentes, então para o caso do conceito “bom” a variação dos conteúdos secundários ausentes será a partir de 5 até 9, e indicamos por $5-9CS_A$.

Quadro 14: Indicadores para qualificar os LDM selecionados se faltar um ou mais de um dos conteúdos principais de divisibilidade nos livros selecionados

Indicadores para a análise, no caso de faltar um ou mais de um, dos conteúdos principais de divisibilidade no LDM		
Indicadores	Quantidade de CD_P	Conceito
▶ Se faltar um CP e algum CS (1CP varia entre 4 a 10 CS) $1-5 CS_A$ ($01 \leq CS_A \leq 5$)	31 – 35	Bom
▶ Se faltar um CP e mais de 5CS ($06 \leq CS_A \leq 10$) ▶ Se faltar $2CP_A$ e mais de 1CS ($02 \leq CS_A \leq 6$) ▶ Se faltar $3CP_A$ e nenhum CS_A	26 – 30	Regular
▶ Se faltar um CP e mais de 10CS ($11 \leq CS_A \leq 15$) ▶ Se faltar $2CP_A$ e mais de 6 CS_A ($7 \leq CS_A \leq 11$) ▶ Se faltar $3CP_A$ e mais de 2 CS_A ($3 \leq CS_A \leq 7$)	21– 25	Fraco
▶ Se faltar um CP e mais de 15CS ($16 \leq CS_A \leq 20$) ▶ Se faltar $2CP_A$ e mais de 11 CS_A ($12 \leq CS_A \leq 16$) ▶ Se faltar $3CP_A$ e mais de 7 CS_A ($8 \leq CS_A \leq 12$)	16 – 20	Insuficiente

Com esses indicadores esperamos fazer uma análise justa, considerando a variação de 40% a 100% de presença dos conteúdos de divisibilidade nos livros didáticos de matemática, conforme os indicadores para os casos previstos nos Quadros 13 e 14.

3.3.4 Considerações sobre a qualificação dos livros didáticos de matemática

Com base nos Quadros 13 e 14 tecemos algumas considerações sobre as categorias, indicadores e a qualificação dos livros didáticos de matemática do 6º ano analisados.

Se um livro obtiver conceitos **ótimo** é porque todos os conteúdos principais estão presentes e pelo menos 90 % dos conteúdos secundários também estão

presentes, ou seja, a ausência irá variar de 1 a 4 CS. Logo, a ausência de algum conteúdo secundário não foi relevante para comprometer a aprendizagem do aluno.

Se um livro obtiver um conceito **bom**, é porque todos os conteúdos principais estão presentes ou há ausência de apenas um deles e, no máximo a ausência de 5 (cinco) dos conteúdos secundários. Logo, a ausência de algum conteúdo principal e secundário ainda é pouco expressiva para que possa comprometer a aprendizagem do aluno.

Se um livro obtiver um conceito **regular** é porque há, pelo menos, de 10 a 14 conteúdos secundários ausentes e nenhum CP ausente ou um dos CP ausentes. Logo, a ausência desses conteúdos principais e secundários poderá comprometer a aprendizagem do aluno, sendo considerada uma redução moderadamente expressiva dos conteúdos de divisibilidade.

Se um livro obtiver um conceito **fraco e/ou insuficiente**, é porque foi constatado a ausência de mais de 15 conteúdos secundários e de pelo menos três conteúdos principais ausentes. Logo, a ausência desses conteúdos principais e secundários poderá comprometer bastante a aprendizagem do aluno, sendo considerada uma redução muito expressiva dos conteúdos de divisibilidade.

As reflexões ocorridas a partir do trabalho para a elaboração das categorias e indicadores para a análise dos livros didáticos de matemática, nos levou a elaborar as categorias e indicadores para a análise dos documentos oficiais e curriculares, para os quais não haverá qualificação conceitual sobre a presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade, pois consideramos que são sugestões de conteúdos e que dependerá da escola através de seus projetos pedagógicos a escolha dos conteúdos que serão apresentados aos alunos e, além disso, no final, caberá mesmo aos professores a decisão dos conteúdos que serão trabalhados na sala de aula.

Desse modo, criamos as seguintes categorias para a análise dos documentos oficiais e curriculares: (1) contempla todos os conteúdos de divisibilidade (não há redução); (2) contempla parcialmente os conteúdos de divisibilidade com ausência de apenas um CP, tem redução inexpressiva; (3) contempla parcialmente os conteúdos de divisibilidade com redução de mais de dois CP, há redução expressiva.

Então, para a computação dos dados da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade nos documentos oficiais e curriculares analisados, elaboramos a Tabela 12.

Tabela 12: Dados da análise da presença-ausência dos Conteúdos de Divisibilidade nos Documentos Oficiais e Curriculares do 6º ano

Conteúdos de divisibilidade nos documentos oficiais e curriculares		(P)	(A)
CP-1	Múltiplos		
CP-2	Divisores		
CP-3	Critérios de divisibilidade		
CP-4	Números primos e Números compostos		
CP-5	Decomposição em fatores primos		
CP-6	Máximo divisor comum		
CP-7	Mínimo múltiplo comum		
Total CD_P			

Legenda: CP (Conteúdos principais); (P) presente; (A) ausente.

Esperamos que as ferramentas elaboradas para a coleta dos dados sobre a presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade nos documentos oficiais e curriculares, bem como nos livros didáticos de matemática do 6º ano do Ensino Fundamental anos finais possam nos ajudar a retratar a realidade desse objeto de conhecimento tão importante para a aprendizagem da Matemática pelos estudantes da Educação Básica.

CAPÍTULO 4

ANÁLISE DOS CONTEÚDOS DE DIVISIBILIDADE NOS DOCUMENTOS CURRICULARES

Neste capítulo faremos as análises de alguns documentos oficiais da Educação Básica brasileira referente ao Ensino Fundamental Anos Finais, a fim de averiguar a presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade. Os documentos selecionados para a análise foram os seguintes: Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, 6º ano do Ensino Fundamental Anos Finais, a BNCC, com relação à Matemática do 6º ano, Ensino Fundamental Anos Finais e Programas Curriculares de alguns Estados Brasileiros, tais como: Minas Gerais, Paraná, Pernambuco, Rio de Janeiro, Roraima e São Paulo.

4.1 ANÁLISE DOS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS DE MATEMÁTICA DO ENSINO FUNDAMENTAL ANOS FINAIS

Nosso objetivo é verificar o que os PCNM estão tratando sobre os conteúdos de divisibilidade no Ensino Fundamental dos Anos Finais.

Apesar de haver um capítulo de “Conteúdos propostos para o ensino de Matemática no terceiro ciclo” não há uma lista desses conteúdos, há apenas indicações, como por exemplo:

Com relação aos números naturais é fundamental que o aluno continue a explorá-los em situações de contagem, de ordenação, de codificação em que tenha a oportunidade de realizar a leitura de números ‘grandes’ e de desenvolver uma compreensão mais consistente das regras que caracterizam o sistema de numeração que utiliza” (BRASIL, 1998).

Entretanto, os conteúdos de divisibilidade nos Parâmetros Curriculares de Matemática (PCNM) encontram-se explícitos em poucas passagens como é apresentado “nos conteúdos propostos para o ensino de Matemática no terceiro ciclo” – o estudo dos conteúdos apresentados no bloco “Números e Operações”.

Conceitos como os de “**múltiplo**” e de “**divisor**” de um número natural ou do conceito de “**número primo**” podem ser ampliados neste ciclo como uma ampliação do campo multiplicativo, que já vinha sendo construído nos ciclos anteriores, e não como um assunto novo, desvinculado dos demais. Além disso, *é importante que tal trabalho não se resuma à apresentação de diferentes técnicas ou de dispositivo práticos que permitem ao aluno encontrar, mecanicamente, o **mínimo múltiplo comum** e **máximo divisor comum** sem compreender as situações-problema que esses conceitos permitem resolver* (BRASIL, 1998, p. 66). [Grifo nosso].

É relevante observar que não foi dito que se deveria deixar de aplicar “técnicas ou os dispositivos práticos de cálculos” que envolvam mmc e mdc, mas sim que os alunos sejam estimulados a entender o funcionamento e sua aplicação em situações-problemas contextualizadas, pois “é importante superar a mera memorização de regras e algoritmos e os procedimentos mecânicos que limitam de forma desastrosa o ensino tradicional” (BRASIL, 1998, p. 67).

Elencamos algumas orientações relevantes para o terceiro ciclo referentes ao bloco “Números e Operações”, que, mesmo não tendo um direcionamento para um determinado conteúdo, podemos perfeitamente aplicar aos conteúdos de divisibilidade, tais como:

- No uso de símbolos e da linguagem matemática para representar números “pode ser estudado do ponto de vista histórico e também do ponto de vista prático. Neste ciclo, os alunos têm boas condições para perceber que os números têm múltiplas representações...” (BRASIL, 1998, p. 67).
- No decorrer do trabalho com os números é fundamental estudar relações funcionais pela exploração de padrões em sequências numéricas que levem os alunos a fazer algumas generalizações e compreender, por um processo de aproximações sucessivas, a natureza das representações algébricas. A construção dessas generalizações e de suas respectivas representações permite a exploração das primeiras noções de álgebra (BRASIL, 1998, p. 68).

Como podemos observar, é dada uma grande relevância para o estudo da aritmética no terceiro ciclo (5ª e 6ª séries), contudo não podemos considerar que deva se encerrar aí o seu estudo, o que inclusive é observado no próprio PCNM:

É importante salientar que no quarto ciclo não se pode configurar o abandono da Aritmética como muitas vezes ocorre. Os problemas aritméticos praticamente não são postos como desafios aos alunos deste ciclo (BRASIL, 1998, p. 83).

Estudos atuais sobre Teoria dos Números (Aritmética e Aritmética modular) e Divisibilidade de professores pesquisadores⁷² tais como Chaparin (2010), Azambuja (2013), Santos (2014), Góes (2015) e Pereira (2015) têm sugerido inclusive que os conteúdos de divisibilidade sejam estendidos também para o Ensino Médio, pois a maioria desses estudos apresenta as equações Diofantinas como uma ferramenta importante para resolver algumas situações do nosso cotidiano e, para isso, utilizam-se dos conceitos de divisibilidade, números primos, critérios de divisibilidade, máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum.

4.2 ANÁLISE DA BNCC QUANTO À ORGANIZAÇÃO CURRICULAR DE MATEMÁTICA

O conteúdo de divisibilidade faz parte da Unidade Temática “Números”, tratando-se de um objeto de conhecimento que é apresentado aos alunos desde o 5º do Ensino Fundamental dos Anos Iniciais (EFAI), sendo aprofundado no 6º ano do Ensino Fundamental dos Anos Finais e em alguns casos se estendendo até o 7º ano. Pretendemos verificar a presença dos conteúdos de divisibilidade na BNCC e, como está se dando esta indicação.

A leitura completa dos quadros apresentados na BNCC dos objetos de conhecimento e das habilidades essenciais de cada ano (6º ao 9º) nas cinco Unidades Temáticas (Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas e Probabilidade e Estatística) permite uma visão das possíveis articulações entre as habilidades indicadas para as diferentes temáticas.

Recomendando-se também que se faça uma leitura vertical de cada unidade temática, com a finalidade de identificar como foi estabelecida a progressão das habilidades.

⁷² Estudos apresentados por professores da Educação Básica dos mestrados profissionais de Matemática em Rede Nacional – PROFMAT.

A BNCC (2017, p. 296) esclarece que essa maneira é conveniente para comparar as habilidades de um dado tema a serem efetivadas em um dado ano escolar com as aprendizagens propostas em anos anteriores e também para reconhecer em que medida elas se articulam com as indicadas para os anos posteriores, tendo em vista que as noções matemáticas são retomadas ano a ano, com a ampliação e aprofundamento crescentes.

A seguir, no Quadro 15, apresentamos a proposta para o ensino de matemática do 6º ano de acordo com a BNCC (2017, p. 298), contendo todas as descrições das habilidades referentes aos objetos de conhecimento da unidade temática “números”, sendo que o quadro completo se encontra no Anexo B.

Fizemos uma adaptação dos quadros da BNCC, mas mantemos as informações relevantes neles contidas dos objetos de conhecimento da Unidade Temática Números, que é o que nos interessa neste estudo.

Quadro 15: Matemática para o 6º ano de acordo com a BNCC – 2017

Unidade Temática: Números 6º ano	
Objetos de conhecimento	Habilidades
Sistema de numeração decimal: características, leitura, escrita e comparação de números naturais e de números racionais representados na forma decimal	(EF06MA01) (EF06MA02)
- Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números naturais - Divisão euclidiana	(EF06MA03)
- Fluxograma para determinar a paridade de um número natural Múltiplos e divisores de um número natural Números primos e compostos	(EF06MA04) Construir algoritmo em linguagem natural e representá-lo por fluxograma que indique a resolução de um problema simples (por exemplo, se um número natural qualquer é par). (EF06MA05) Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos “é múltiplo de”, “é divisor de”, “é fator de”, e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000. (EF06MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor.

Fonte: BNCC (2017, p. 298). Adaptado pela autora. [Grifo nosso].

Como podemos observar no Quadro 15 acima, na Unidade Temática “Números” não há, para o 6º ano, a indicação de todos os conteúdos principais de

divisibilidade que relacionamos para a análise, pois estão ausentes os conteúdos de decomposição em fatores primos, mdc e mmc.

Temos como resultado da análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade na BNCC-2017, para o 6º ano, os dados na Tabela 13, a seguir:

Tabela 13: Dados da Análise da presença-ausência dos Conteúdos de Divisibilidade na BNCC-2017 – Unidade Temática “Números” do 6º ano

Conteúdos de divisibilidade na BNCC-2017 – Matemática do 6º ano		(P)	(A)
CP-1	Múltiplos	P	--
CP-2	Divisores	P	--
CP-3	Crítérios de divisibilidade	P	--
CP-4	Números primos e Números compostos	P	--
CP-5	Fatoração (Decomposição em fatores primos)	--	A
CP-6	Máximo divisor comum	--	A
CP-7	Mínimo múltiplo comum	--	A
Total CD _p		04	03

Legenda: CP (Conteúdos principais); (P) presente; (A) ausente.

Fonte: BNCC-2017. Elaborada pela autora.

Conforme a Tabela 13 acima, temos o resultado da análise da presença/ausência, considerando apenas os conteúdos principais de divisibilidade na BNCC-2017 que sugere para o 6º ano apenas quatro conteúdos principais de divisibilidade: múltiplos, divisores, critérios de divisibilidade e números primos e compostos. Estando ausentes os conteúdos de decomposição em fatores primos, máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum.

Desse modo, de acordo com as categorias para a análise dos documentos oficiais e curriculares, constatamos que para o 6º ano há uma redução expressiva dos conteúdos principais de divisibilidade.

Encontramos alguns conteúdos de divisibilidade como sugestões para o 7º ano, conforme podemos observar no Quadro 16 – “Matemática para o 7º ano”. Encontramos a indicação dos conteúdos de divisibilidade na Unidade Temática “Números”, como objetos de conhecimento “Múltiplos e divisores de um número natural” e em habilidades, contempla em parte o que estaria faltando no 6º ano, porém, se observa a ressalva “podendo incluir” máximo divisor comum ou mínimo múltiplo comum e “sem a aplicação de algoritmos”, o que a nosso ver implica em redução, pois há a possibilidade de se escolher “incluir” ou não o mdc ou mmc e, o que é mais grave

“sem a aplicação dos algoritmos” que comumente são apresentados nos livros didáticos e que facilitam à compreensão dos conceitos e a resolução de problemas.

Quadro 16: Matemática para o 7º ano de acordo com a BNCC – 2017

Unidade Temática: Números 7º ano	
Objetos de conhecimento	Habilidades
Múltiplos e divisores de um número natural	(EF07MA01) Resolver e elaborar problemas com números naturais, envolvendo as noções de divisor e de múltiplo, podendo incluir máximo divisor comum ou mínimo múltiplo comum , por meio de estratégias diversas, sem a aplicação de algoritmos
Cálculo de porcentagens e de acréscimos e decréscimos simples	(EF07MA02)
Números inteiros: usos, história, ordenação, associação com pontos da reta numérica e operações.	(EF07MA03) e (EF07MA04).
Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador	(EF07MA05) a (EF07MA09).
Números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações.	(EF07MA10) a (EF07MA12).

Fonte: BNCC (2017, p. 304). Adaptada pela autora. [Grifo nosso].

Temos como resultado da análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade na BNCC-2017, para o 7º ano, os dados na Tabela 14, a seguir:

Tabela 14: Dados da Análise da presença-ausência dos Conteúdos de Divisibilidade na BNCC-2017 – Unidade Temática “Números” do 7º ano

Conteúdos de Divisibilidade na BNCC-2017: Matemática do 7º ano		(P)	(A)
CP-1	Múltiplos	P	--
CP-2	Divisores	P	--
CP-3	Critérios de divisibilidade	--	A
CP-4	Números primos e Números compostos	--	A
CP-5	Fatoração (Decomposição em fatores primos)	--	A
CP-6	Máximo divisor comum	P	--
CP-7	Mínimo múltiplo comum	P	--
Total CD_P		04	03

Legenda: CP (Conteúdos principais); (P) presente; (A) ausente.

Fonte: BNCC-2017. Elaborada pela autora.

Como podemos observar nos Quadros 15 e 16 e nas tabelas 13 e 14, o conteúdo de fatoração (decomposição em fatores primos) não foi mencionado, ou seja, continua ausente, o que implica numa ausência expressiva, pois este assunto é

relevante para aplicação em outros conteúdos de divisibilidade como a determinação dos divisores e do mdc e mmc, bem como outros algoritmos da Matemática.

Investigamos nos demais agrupamentos dos objetos de conhecimentos dos 8º e 9º anos e não se retoma nenhum dos conteúdos de divisibilidade.

Considerando que sendo a BNCC do Ensino Fundamental (2017) referência para as escolas reformularem seus projetos pedagógicos, poderá haver uma mudança significativa na escolha dos conteúdos matemáticos, pois, como podemos observar, os conteúdos de divisibilidade que antes eram contemplados todos no 6º ano, como sugestão da BNCC não serão mais, sendo alguns conteúdos sugeridos para o 7º ano. Entretanto, dependerá de cada escola e de seus professores as escolhas dos conteúdos e da abordagem a ser adotada na apresentação aos alunos em sala de aula.

4.3 ANÁLISE DOS DOCUMENTOS CURRICULARES QUE TRATAM DE DIVISIBILIDADE

Nesta seção faremos a análise dos documentos curriculares dos seguintes estados brasileiros: Minas Gerais, Paraná, Pernambuco, Rio de Janeiro, Roraima e São Paulo, a fim de verificar a presença dos conteúdos de divisibilidade (múltiplos, divisores; critérios de divisibilidade; números primos; máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum) no Componente Curricular Matemática do Ensino Fundamental dos Anos Finais. Comumente estes objetos de conhecimento matemático são apresentados na 5ª série/6º ano.

4.3.1 Minas Gerais – Documento Curricular de Matemática para 5ª série/6º ano – Ensino Fundamental Anos Finais (2018)

O Currículo Referência de Minas Gerais (CRMG) foi elaborado a partir dos fundamentos educacionais exposto: na Constituição Federal (CF/1988), na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB 9394/96), no Plano Nacional de Educação (PNE/2014), na Base Nacional Comum Curricular (BNCC/2017) e a partir do reconhecimento e da valorização dos diferentes povos, culturas, territórios e tradições existentes do estado de Minas Gerais.

Além disso, este documento é também resultado do regime de colaboração estabelecido entre a Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais – SEEMG e a União Nacional dos Dirigentes Municipais de Educação de Minas Gerais, seccional Minas Gerais – UNDIME/MG.

Em sua apresentação o Currículo Referência de Minas Gerais reporta-se ao educador da seguinte maneira:

“Ao final, educador(a), você deverá compreender a relação deste documento com o seu dia a dia na escola, ter consciência e compreensão dos preceitos aqui tratados e a capacidade de trabalhá-los na sala de aula e na escola, a partir de sua autonomia, de forma dialogada com seus pares, com a gestão escolar e com os seus estudantes, fortalecendo os princípios do direito à aprendizagem de qualidade, da equidade, do reconhecimento e da valorização das diversidades, da inclusão e da gestão democrática e participativa. Com vistas a promover a educação em sua integralidade” (CRMG, 2018).

Minas Gerais é o estado brasileiro com maior número de municípios (853), representando 15% do total do país (5570 municípios). Está localizado na região Sudeste e é o quarto em área territorial do país em uma área de 586.520.732 Km²⁷³ e com uma população estimada de 21.119.536 habitantes⁷⁴. O estado é um retrato quase sempre fiel da realidade brasileira, com 10% (20.7 milhões) da população nacional, representando a grande diversidade regional, econômica, política e social. Em termos educacionais, o estado conta com 16.151 escolas, das quais 3.622 são estaduais, 8.751 municipais e 3.778 privadas, distribuídas em 47 regionais de ensino (SER) e 4.032.949 estudantes matriculados, sendo que 86% deles estão na rede pública (CRMG, 2018).

Segundo o CRMG (2018) a versão preliminar deste documento, dentre outras, contou com a participação de mais de 3.100 escolas e 120.000 profissionais de todas as partes do estado, cujas contribuições foram analisadas e incorporadas ao documento pelos redatores.

Este documento é fruto do trabalho coletivo de milhares de profissionais de todas as regiões do estado, versando sobre a pluralidade de ideias, identidades e

⁷³ Fonte: Área territorial brasileira. Rio de Janeiro: IBGE, 2018. Disponível em: <<http://cidades.ibge.gov.br/brasil/mg/panorama>> Acesso em 12 jul.2018.

⁷⁴ Fonte: População estimada: IBGE, Diretoria de Pesquisas, Coordenação de População e Indicadores Sociais, Estimativa da população residente com data de referência 10.06. 2018. Disponível em: <<http://cidades.ibge.gov.br/brasil/mg/panorama>> Acesso em 12 jul..2018.

expressões de Minas Gerais e, em consonância com a Base Nacional Comum Curricular, será referência curricular para as redes a partir de 2019.

Dentre seus preceitos é importante destacar o seguinte:

Que a integralidade da educação é um dos princípios fundantes do Currículo Mineiro. A concepção de educação integral nos permite organizá-lo desconsiderando a hierarquização dos saberes, garantindo a construção do conhecimento a partir das diversas dimensões humanas. Assim, iremos trabalhar aqui a concepção de currículo como processo e não como produto, como comumente se compreende (CRMG, 2018).

A concepção de currículo segundo o CRMG (2018) tornou-se mais ampla, sendo o currículo considerado uma experiência vivida e como tal envolve não só o levantamento dos conteúdos a serem “ensinados”, mas também práticas, atitudes, formas de organização do trabalho. A palavra “integralização”, dessa forma, é sinônimo de: articulação; de construção de redes; de trocas de experiências; de processos educativos onde o encontro de saberes permite novas aprendizagens e novos desafios.

Segundo o CRMG (2018) o Projeto Político Pedagógico (PPP) da escola deverá abarcar as diretrizes e perspectivas da Base Nacional Comum Curricular e do Currículo Referência de Minas Gerais (CRMG), considerando tais aspectos na definição do perfil, no planejamento das atividades nas escolas e nas suas metas e ações. Desse modo,

o componente curricular de Matemática tem como finalidade o desenvolvimento das competências gerais de investigação, compreensão de fenômenos, construção de representações significativas e argumentações nos mais variados contextos (CRMG, 2018).

O CRMG, chama a atenção para a progressão horizontal existente entre as habilidades de uma mesma Unidade Temática ao longo de todo Ensino Fundamental. Vale ressaltar, que a progressão se apresenta à medida que a habilidade se aprofunda, exigindo do estudante um desenvolvimento cognitivo cada vez mais elevado (CRMG, 20128, 655).

No Quadro 17 apresentamos um exemplo de como se dá a progressão de uma habilidade dentro da Unidade Temática Números de acordo com o CRMG.

Quadro 17: Exemplo de Progressão de Habilidade na Unidade Temática “Números” de acordo com CRMG (2018).

Progressão de Habilidades na Unidade Temática “Números”		
5º ano	6º ano	7º ano
(EF05MA01) Ler, escrever e ordenar números naturais até a ordem das centenas de milhar com compreensão das principais características do sistema de numeração decimal.	(EF06MA01) Comparar, ordenar, ler e escrever números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita, fazendo uso da reta numérica.	(EF07MA01) Resolver e elaborar problemas com números naturais, envolvendo as noções de divisor e de múltiplo, podendo incluir máximo divisor comum ou mínimo múltiplo comum, por meio de estratégias diversas, sem aplicação de algoritmos.

Fonte: CRMG (2018, p. 656). Adaptado pela autora.

Vale ressaltar que, apesar de existir uma ordem de apresentação das Unidades Temáticas no Currículo de Matemática, cabe ao professor, realizar a organização, conforme as habilidades e competências citadas, mas não deve ser visto como algo engessado (CRMG, 2018, p. 656).

Os objetos de conhecimento de Matemática para o Ensino Fundamental Anos Finais foram selecionados levando-se em consideração a proposta da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e as particularidades apresentadas no Estado de Minas Gerais. Sendo assim, foram organizados em cinco Unidades Temáticas, a saber: (1) Números, (2) Álgebra; (3) Geometria; (4) Grandezas e Medidas e (5) Probabilidade e Estatística.

Assim, a partir das cinco unidades temáticas, de acordo com o CRMG para o ensino de Matemática para os anos finais:

Têm-se a expectativa que os estudantes resolvam problemas com números naturais, inteiros e racionais, envolvendo as operações fundamentais com seus diferentes significados, utilizando-se de estratégias diversas e, compreendendo os processos envolvidos nas operações (CRMG, 2018, p. 662).

No Quadro 18 apresentamos o referencial curricular de matemática do 6º ano, conforme CRMG (2018), observando que só mencionamos as habilidades referentes aos conteúdos de divisibilidade, por ser essencial para nosso estudo. Quanto as habilidades dos outros objetos de conhecimento colocamos apenas um traço, devido à economia de espaço.

Quadro 18: Referencial Curricular de Matemática de Minas Gerais para o 6º ano

Matemática – 6º ano (CRMG) Unidade Temática: Números	
Objetos de Conhecimento	Habilidades
Fluxograma para determinar a paridade de um número natural Múltiplo e divisores de um número natural Números primos e compostos Fatoração de números naturais	(EF06MA05) Classificar números em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos “é múltiplo de”, “é divisor de”, “é fator de”, e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000. (EF06MA37MG) Fatorar números naturais em produto de números primos. (EF06MA38MG) Utilizar a fatoração em primos e números primos. (EF06MA39MG) Resolver problemas que envolvam o algoritmo de Euclides.
Fluxograma para determinar a paridade de um número natural Múltiplo e divisores de um número natural Números primos e compostos Fatoração de números naturais Mínimo Múltiplo Comum Máximo Divisor Comum	(EF06MA40MG) Determinar o M.D.C. e M.M.C. de números naturais. (EF06MA06A) Resolver problemas que envolvam as ideias de múltiplo e divisor. (EF06MA06B) Elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor.
Frações:	--
Operações com números racionais.	--
Aproximação de números para múltiplos de potências de 10.	--
Cálculo de porcentagens	--

Fonte: CRMG (2018). Adaptado pela autora [grifo nosso].

Como podemos observar no Quadro 18, acima, todos os conteúdos de divisibilidade estão contemplados no 6º ano. Para melhor visualização dos dados apresentamos na Tabela 15, o resultado final da análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no Referencial Curricular de Minas Gerais.

Tabela 15: Dados da Análise da presença-ausência dos Conteúdos de Divisibilidade do CRMG – Unidade Temática “Números” do 6º ano

Conteúdos de divisibilidade No CRMG-2018: Matemática do 6º ano		(P)	(A)
CP-1	Múltiplos	P	--
CP-2	Divisores	P	--
CP-3	Critérios de divisibilidade	P	--
CP-4	Números primos e Números compostos	P	--
CP-5	Fatoração (Decomposição em fatores primos)	P	--
CP-6	Máximo divisor comum	P	--
CP-7	Mínimo múltiplo comum	P	--
Total CD_P		07	00

Legenda: CP (Conteúdos principais); (P) presente; (A) ausente.

Fonte: CRMG (2018). Elaborada pela autora.

Conforme podemos observar na tabela 15, todos os conteúdos principais de divisibilidade foram contemplados no “Currículo Referência de Minas Gerais” (CRMG) de Matemática para o 6º ano. Lembramos que a elaboração deste documento foi fundamentada na BNCC-2017 e não se ateve às sugestões para contemplar parcialmente os conteúdos de divisibilidade para o 6º ano.

4.3.2 Paraná – Referencial Curricular de Matemática 5ª série/6º ano do Ensino Fundamental das séries finais do Estado do Paraná

Para elaborar as Diretrizes Curriculares Estaduais do Estado do Paraná (DCE-PR), a Secretaria de Estado da Educação promoveu durante os anos de 2004, 2005 e 2006 vários encontros, simpósios, semanas de estudos pedagógicos. Além disso, nos anos de 2007 e 2008 a equipe pedagógica do Departamento de Educação Básica percorreu 32 Núcleos Regionais de Educação realizando o evento chamado DEB Itinerante para todos os professores da Rede Estadual de Ensino, com dezesseis horas de formação continuada com objetivo de discutir os fundamentos teóricos das DCE e os aspectos metodológicos para sua implementação em sala de aula.

Dessa forma os dois textos que compõe as DCE de Matemática do Ensino Fundamental das séries finais são apresentados com a seguinte ordem e estrutura: o primeiro, sobre a Educação Básica; o segundo texto refere-se à disciplina de matemática, com um breve histórico sobre a constituição da disciplina. Em seguida, apresenta os fundamentos teóricos e metodológicos e, os conteúdos estruturantes que devem organizar o trabalho docente.

O DCE-PR enfatiza que a sua elaboração teve como base a perspectiva da Educação Matemática, o que implicou pensar na transposição didática que regula a ligação entre a Matemática como campo de conhecimento e disciplina escolar. As discussões realizadas com os professores da Rede Pública Estadual de Ensino resultaram na seleção de *Conteúdos Estruturantes*⁷⁵ de Matemática.

Os conteúdos estruturantes propostos nestas diretrizes curriculares, para o ensino de Matemática da Educação Básica da Rede Pública do Estado do Paraná,

⁷⁵ Entende-se por *Conteúdos Estruturantes* os conhecimentos de grande amplitude, os conceitos e as práticas que identificam e organizam os campos de estudos de uma disciplina escolar, considerados fundamentais para a sua compreensão. Constituem-se historicamente e são legitimados nas relações sociais (DEB-PARANÁ, 2008, p. 49).

são: Números, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometrias, Funções e Tratamento da Informação e para o Ensino Fundamental, os conteúdos estruturantes: Números e Álgebra se desdobram nos seguintes conteúdos: conjuntos numéricos e operações, equações e inequações, polinômios e proporcionalidade.

Quanto às expectativas de ensino e de aprendizagem desses conteúdos estruturantes espera-se que, no ensino fundamental, os alunos compreendam:

- O sistema de numeração decimal e o conceito de notação científica;
- Os conceitos de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação de números pertencentes aos conjuntos dos naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais e suas propriedades;
- O conceito de razão e proporção, regra de três, porcentagem, frações e dos números decimais e as suas operações (DCE-PARANÁ, 2008, p. 51).

Os conteúdos básicos da disciplina de matemática estão distribuídos para as séries/anos: 5ª série/6º ano, 6ª série/7º ano, 7ª série/8º ano e 8ª série/9º ano. Entende-se por conteúdos básicos os conhecimentos fundamentais para cada série da etapa final do Ensino Fundamental e para o Ensino Médio, considerados imprescindíveis para a formação conceitual dos estudantes nas diversas disciplinas da Educação Básica (DCE-PR, 2008, p. 76).

Desse modo, de acordo com a DCE-PR os conteúdos básicos devem ser tomados como ponto de partida para a organização da proposta pedagógica curricular das escolas.

Por serem conhecimentos fundamentais para a série, **não podem ser suprimidos nem reduzidos**, porém o professor poderá acrescentar outros conteúdos básicos na proposta pedagógica, de modo a enriquecer o trabalho de sua disciplina naquilo que a constitui como conhecimento especializado e sistematizado (DCE-PR, 2008, p. 76). [Grifo nosso].

Segundo o DCE-PR (2008), é no plano de trabalho docente que os conteúdos básicos terão abordagens diversas a depender dos fundamentos que recebem de cada conteúdo estruturante, pois o plano é o lugar da criação pedagógica do professor, onde os conteúdos receberão abordagens contextualizadas históricas, social e politicamente, de modo que façam sentido para os alunos.

Para a nossa análise vamos considerar apenas os conteúdos estruturantes “Números/Álgebra” referente ao 1º semestre de 5ª série/6º ano, em que estão

contemplados os conteúdos de divisibilidade. Dessa forma não detalharemos os conteúdos básicos que não se referem à divisibilidade, conforme Quadro 19.

Quadro 19: Matemática para 5ª série/6º ano do Ensino Fundamental – Diretrizes Curriculares Estaduais do Estado do Paraná (DCE-PR)

Matemática para a(o) 5ª série/6º ano (DCE – PR)		
Conteúdos Estruturantes	Conteúdos Básicos	Avaliação
Números e álgebra	• Sistemas de numeração; • números Naturais • Múltiplos e divisores • Potenciação e radiciação • Números fracionários • Números decimais	• Conheça os diferentes sistemas de numeração; • Identifique o conjunto dos naturais, comparando e reconhecendo seus elementos; • Realize operações com números naturais; • Expresse matematicamente, oral ou por escrito, situações-problema que envolvam as operações com números naturais; • Estabeleça relação de igualdade e transformação entre: fração e número decimal, fração e número misto; • Reconheça o MMC e MDC entre dois ou mais números naturais; • Reconheça as potências como multiplicação de mesmo fator e a radiciação como sua operação inversa; • Relacione as potências e as raízes quadradas e cúbicas com padrões numéricos e geométricos;

Fonte: DCE-PR – Matemática (2008, p. 77). Adaptado pela autora [grifo nosso].

Como podemos observar no Quadro 19, acima, na segunda coluna (conteúdos básicos) são apresentados “Múltiplos e divisores”, entretanto, na terceira coluna denominada “avaliação” encontramos apenas um item referente aos conteúdos de divisibilidade: “Reconheça o MMC e MDC entre dois ou mais números naturais”, ou seja, não estão contemplados todos os conteúdos de divisibilidade, faltando os critérios de divisibilidade, números primos e decomposição em fatores primos. Desse modo, resolvemos pesquisar nos quadros das outras séries (6ª a 8ª série) do Ensino Fundamental, mas não encontramos nenhuma referência aos conteúdos de divisibilidade.

Os dados da análise do DCE-PR sobre os conteúdos de divisibilidade presentes-ausentes, nas sugestões para a 5ª série/6º ano, estão computados na Tabela 16, a seguir:

Tabela 16: Dados da análise da presença-ausência dos conteúdos de divisibilidade nas DCE-PR – Unidade Temática “Números” 5ª série/6º ano

Conteúdos de divisibilidade no DCE-PR Matemática 5ª série/6º ano		(P)	(A)
CP-1	Múltiplos	P	--
CP-2	Divisores	P	--
CP-3	Critérios de divisibilidade	--	A
CP-4	Números primos e Números compostos	--	A
CP-5	Fatoração (Decomposição em fatores primos)	--	A
CP-6	Máximo divisor comum	P	--
CP-7	Mínimo múltiplo comum	P	--
Total CD_P		04	03
Legenda: CP (Conteúdos principais); (P) presente; (A) ausente.			
Fonte: DCE-PR. Elaborada pela autora.			

Conforme podemos observar na Tabela 16, acima, houve redução expressiva dos conteúdos de divisibilidade nas Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná. Como este documento não está atualizado, poderá haver mudanças significativas para as futuras atualizações decorrentes das orientações e sugestões da BNCC-2017.

4.3.3 Pernambuco – Currículo de Matemática para o Ensino Fundamental do Estado de Pernambuco

Este documento não apresenta data, nem apresentação e sumário. Contempla apenas os quadros descritivos do 6º ao 9º ano, com os “campos ou eixos” (1ª coluna), “Conteúdos” (2ª coluna) e “Expectativas de aprendizagem” (3ª coluna). Os conteúdos de cada ano (6º ao 9º) estão separados por bimestres.

Os quadros que apresentaremos constarão apenas dos tópicos referentes aos “Campos ou Eixos” de: Geometria, Estatística e probabilidade, Álgebra e funções, Grandezas e medidas, a título de informação, para se ter uma visão geral de como esses assuntos estão sendo dispostos em cada bimestre. A segunda e terceira colunas dos quadros referentes a esses campos, estão vazias, visto que somente interessa para este estudo o campo de “Números e operações” e seus respectivos: “conteúdos” (2ª coluna) e “expectativas de aprendizagem” (3ª coluna) que serão expostos de acordo com os quadros originais, com ênfase nos conteúdos de divisibilidade (negrito).

Pensamos em apresentar essa organização interna dos Quadros 20-29 (6º ao 9º ano) do Currículo de Matemática para o Ensino Fundamental do Estado de

Pernambuco para mostrar a ordem como esses conteúdos estão sendo sugeridos para se trabalhar em sala de aula pelos professores.

Quadro 20: Matemática para o 6º ano (3º bimestre) dos Parâmetros Curriculares do Estado de Pernambuco (PCM-PE)

Matemática – 6º ano (3º Bimestre) do Estado do Pernambuco		
Campos ou eixos	Conteúdos	Expectativas de aprendizagem
Geometria		
Estatística e Probabilidade		
Álgebra e funções		
Grandezas e medidas		
Números e Operações	Número primo e número composto	Compreender o conceito de números primos e números compostos
	Características de um número natural	Compreender as características dos números e suas relações, por exemplo: par, ímpar, múltiplo, divisor, etc.
	Problemas envolvendo cálculo de porcentagem	
	Comparação de números racionais positivos	
	Problemas envolvendo números racionais	
	Operação adição e sua inversa subtração	
	Operação divisão e sua inversa multiplicação	
Matemática – 6º ano (4º Bimestre)		
Números e Operações	<i>Critério de divisibilidade por: 2, 3, 5 e 10</i>	<i>Reconhecer e usar os critérios de divisibilidade por 2, 3, 5 e 10.</i>

Fonte: Parâmetros Curriculares do Estado de Pernambuco – Matemática 6º ano. Adaptado pela autora. [Grifo nosso].

Observamos que para o 6º ano não foram apresentados todos os conteúdos de divisibilidade. Para o 3º bimestre consta em “Conteúdo”: números primos e números compostos e, na terceira coluna “Expectativa de aprendizagem”, temos: “compreender o conceito de números primos e números compostos”, “compreender as características de múltiplos e divisores”.

Já para o 4º bimestre em “Conteúdo”: critérios de divisibilidade por 2, 3, 5 e 10 e, na terceira coluna “Expectativa de aprendizagem”, “Reconhecer e usar os critérios de divisibilidade por 2, 3, 5 e 10”. Faltando contemplar, decomposição em fatores primos, mdc e mmc.

Dessa forma, seguimos pesquisando os outros anos e encontramos alguns conteúdos de divisibilidade no 7º ano (1º e 3º bimestres), conforme Quadros 21.

Quadro 21: Matemática para o 7º ano (1º e 3º bimestres) dos Parâmetros curriculares do Estado de Pernambuco (PCM-PE)

Matemática para o 7º ano – 1º Bimestre (Pernambuco)		
Campos ou eixos	Conteúdos	Expectativas de aprendizagem
Números e Operações	Critérios de divisibilidade por: 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 e 10	Reconhecer e usar os critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 e 10.
	Potenciação (com expoente inteiro e positivo)	
	Cálculo de potências (com expoente inteiro e positivo)	
	Propriedades da potenciação	
	Múltiplos e divisores de um número	Reconhecer e determinar múltiplos e divisores de um número.
	Raiz quadrada de um número	
Matemática para o 7º ano – 3º Bimestre		
Números e Operações	Adição e subtração de números inteiros relativos	
	Decomposição de um número em fatores primos (ou não primos)	Reconhecer a decomposição de um número em fatores primos e não primos.
	MMC e MDC de números inteiros	Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum, sem o recurso ao algoritmo.

Fonte: PCM-PE – Matemática 7º ano. Adaptado pela autora. [Grifo nosso].

Conforme podemos observar no Quadro 21, no 1º bimestre do 7º ano, estão contemplados os conteúdos de *critérios de divisibilidade* incluindo a divisibilidade por mais números do que indicado para o 6º ano, bem como *reconhecer e determinar múltiplos e divisores de um número* e no 3º bimestre, os assuntos de: *decomposição em fatores primos; mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum*. Estes dois últimos, sem, contudo, o recurso ao algoritmo.

Também encontramos no 2º bimestre do 8º ano o assunto de *Decomposição de um número em fatores primos (ou não primos)* em “conteúdos” e na coluna “Expectativa de aprendizagem” *Decompor um número em fatores primos e não primos*.

Os conteúdos de divisibilidade que também foram mencionados no 1º bimestre do 9º ano em “conteúdos” são os assuntos de *MMC e MDC de números inteiros* e “Expectativa de aprendizagem”: *Resolver e elaborar problemas que*

envolvam as ideias de mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum, sem o recurso ao algoritmo.

Como podemos observar, neste documento curricular do Estado de Pernambuco os conteúdos de divisibilidade estão contemplados em todos os anos do Ensino Fundamental – Anos Finais, contudo, no 6º ano, que comumente se trabalha todos os conteúdos, estão ausentes os assuntos de decomposição em fatores primos, mdc e mmc, o que se pode caracterizar como uma redução expressiva. Os dados da análise do PCM-PE sobre a presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade para o 6º ao 9º ano, estão computados na Tabela 17.

Tabela 17: Dados da análise da presença-ausência dos Conteúdos de Divisibilidade nas PCM-PE – Matemática para o 6º ao 9º ano

Conteúdos de divisibilidade no DCM-PE Matemática do 6º ao 9º ano		6º ano		7º ano		8º ano		9º ano	
	Conteúdos de divisibilidade	(P)	(A)	(P)	(A)	(P)	(A)	(P)	(A)
CP-1	Múltiplos	P	--	P	--	--	A	--	A
CP-2	Divisores	P	--	P	--	--	A	--	A
CP-3	Crterios de divisibilidade	P	--	P	--	--	A	--	A
CP-4	Números primos e Números compostos	P	--	P	--	--	A	--	A
CP-5	Fatoração (Decomposição em fatores primos)	--	A	P	--	P	--	--	A
CP-6	Máximo divisor comum	--	A	P	--	--	A	P	--
CP-7	Mínimo múltiplo comum	--	A	P	--	--	A	P	--
Total CD_P		04	03	07	00	01	06	02	05

Legenda: CP (Conteúdos principais); (P) presente; (A) ausente.

Fonte: PCM-PE. Elaborada pela autora.

Conforme podemos observar na Tabela 17, acima, houve redução expressiva dos conteúdos de divisibilidade nos Documento Curriculares do Estado de Pernambuco no 6º ano, mas no 7º ano todos os conteúdos de divisibilidade foram contemplados. Entretanto, no 8º e 9º anos foram contemplados parcialmente com um ou dois conteúdos. Como este documento não está atualizado, poderá haver mudanças significativas para as futuras atualizações decorrentes das orientações e sugestões da BNCC-2017.

4.3.4 Rio de Janeiro – Currículo Mínimo de Matemática– Ensino Fundamental para 5ª série/6º ano (CMM-RJ)

A secretaria de Estado de Educação do Rio de Janeiro elaborou o Currículo Mínimo de Matemática (CMM-RJ) para os anos finais do Ensino Fundamental e para

o Ensino Médio no ano de 2011, como referencial para as escolas, apresentando as competências e habilidades que devem estar nos planos de curso e nas aulas.

A concepção, redação, revisão e consolidação deste documento foram conduzidas por equipes disciplinares de professores da rede estadual, coordenadas por professores doutores de diversas universidades do Rio de Janeiro, que se reuniram e se esforçaram em torno dessa tarefa, a fim de promover um documento que atendesse as diversas necessidades do ensino da rede e, tem a finalidade de

orientar, de forma clara e objetiva, os itens que não podem faltar no processo de ensino e aprendizagem, em cada disciplina, ano de escolaridade e bimestre. Com isso, pode-se garantir uma essência básica comum a todos e que esteja alinhada com as atuais necessidades de ensino, identificadas não apenas nas legislações vigentes, Diretrizes e Parâmetros Curriculares Nacionais, mas também nas matrizes de referência dos principais exames nacionais e estaduais. Consideram-se também as compreensões e tendências atuais das teorias científicas de cada área de conhecimento e da educação e, principalmente, as condições e necessidades reais encontradas pelos professores no exercício diário de suas funções (CMM-RJ, 2012, p. 2).

Segundo o CMM-RJ os professores da Rede Estadual participaram ativamente da elaboração desse documento, levantaram várias questões que envolviam a distribuição e adequação de conteúdos dos anos escolares do Ensino Fundamental.

A seguir, apresentamos parte do referencial do Currículo Mínimo de Matemática do Estado do Rio de Janeiro para o 6º ano em que os conteúdos estão distribuídos por bimestres. Encontramos referência aos conteúdos de divisibilidade, apenas no 2º bimestre, conforme Quadro 22.

Quadro 22: Currículo Mínimo de Matemática do Rio de Janeiro (6º ano)

Currículo Mínimo de Matemática (CMM-RJ) para o 6º ano (2º Bimestre)	
Campo Numérico Aritmético	Números naturais
Habilidades e Competências	• Calcular potências com expoente e base naturais. • Calcular raiz quadrada de números naturais quadrados perfeitos. • Reconhecer números primos e decompor um número em fatores primos. • Resolver problemas aplicando o cálculo do M.M.C. e do M.D.C. entre números naturais. • Resolver problemas aplicando os critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5 e 6.

Fonte: CMM do Rio de Janeiro (2012, p. 6). Adaptado pela autora. [Grifo nosso].

Como podemos observar no Quadro 22, os conteúdos de divisibilidade no Currículo Mínimo de Matemática do Estado do Rio de Janeiro (CMM-RJ, 2012) estão contemplados no segundo bimestre e referenciados na descrição de “habilidades e competências” de forma que o aluno possa “reconhecer números primos e decompor um número em fatores primos; resolver problemas aplicando o M.M.C. e o M.D.C. entre números naturais; resolver problemas aplicando os critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5 e 6”. Não há menção aos assuntos de “múltiplos e divisores”. Os dados da análise do CMM-RJ sobre os conteúdos de divisibilidade presentes-ausentes, nas sugestões para o 6º ano, estão computados na Tabela 18.

Tabela 18: Dados da Análise da Presença-Ausência dos Conteúdos de Divisibilidade no CMM-RJ – Unidade Temática “Números” 6º ano.

Conteúdos de divisibilidade no CMM-RJ Matemática para o 6º ano		(P)	(A)
CP-1	Múltiplos	--	A
CP-2	Divisores	--	A
CP-3	Critérios de divisibilidade	P	--
CP-4	Números primos e Números compostos	P	--
CP-5	Fatoração (Decomposição em fatores primos)	P	--
CP-6	Máximo divisor comum	P	--
CP-7	Mínimo múltiplo comum	P	--
Total CD_p		05	02
Legenda: CP (Conteúdos principais); (P) presente; (A) ausente.			
Fonte: CMM-RJ (2011). Elaborada pela autora.			

Conforme podemos observar na tabela 18, a maioria dos conteúdos principais de divisibilidade foi contemplado no “Currículo Mínimo de Matemática do Estado do Rio de Janeiro (CMM-RJ) para o 6º ano. Os dois primeiros conteúdos: múltiplos e divisores não foram mencionados.

A ausência desses conteúdos é de muita preocupação pois, tanto as definições, como a ideia de “múltiplo de” e “divisível por” são fundamentais para a aprendizagem dos demais conteúdos de divisibilidade.

Entretanto, esse documento curricular está desatualizado tendo em vista o ano que foi elaborado e nova proposta da BNCC-2017 que é o referencial oficial para que todos os Estados brasileiros possam reformular suas propostas curriculares do Ensino Fundamental.

4.3.5 Roraima – Documento Curricular de Roraima (DCR)

O novo Documento Curricular de Roraima (DCR), ao qual tivemos acesso a um exemplar preliminar, deverá ser apresentado às escolas estaduais do estado de Roraima a partir de março de 2019, para que comecem a atualização de seus projetos políticos pedagógicos.

A construção do Documento Curricular de Roraima⁷⁶ (DCR-2019) alinhou-se à política de qualidade da educação, conforme a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), definindo as aprendizagens essenciais que todos os alunos devem aprender ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, traduzidas nas dez competências⁷⁷ da BNCC. Desse modo, o DCR apresenta a seguinte estrutura:

Estabelece o foco no desenvolvimento das competências e habilidades, para as etapas da Educação Infantil e Ensino Fundamental, indicadas nos campos de experiências, objetivos de aprendizagem, competências gerais, competências das áreas, competências específicas dos componentes, textos e fundamentos didáticos pedagógicos, além das questões regionais destacadas nas orientações didáticas e metodológicas para o desenvolvimento da formação humana integral dos alunos da Educação Básica (DCR, 2019).

De acordo com o DCR a concepção de currículo fundamenta-se na abordagem sociointeracionista, na concepção *vygotskyana*, visto que parte do princípio de que o sujeito não nasce pronto e acabado, nem mesmo é uma cópia do ambiente em que está inserido, pois sua evolução intelectual pressupõe uma interação com o outro, com o meio e, sua interação social promove a transformação de um ser biológico em um ser humano (DCR, 2019, p. 10).

Pelo fato do Estado de Roraima⁷⁸ situar-se no extremo Norte, tem características muito diferenciadas em relação ao cenário nacional. Com uma

⁷⁶ Os trabalhos para a elaboração do novo Documento Curricular de Roraima iniciaram a partir da Portaria nº 2812/17/SEED/GAB/RR que instituiu a Comissão Estadual e Comitê Executivo da BNCC. Em abril de 2018, Pela Portaria nº 1040/18/SEED/GAB/RR foi constituída a equipe de gestão e de redatores do Currículo estadual, sendo responsável pelo processo de elaboração, análise, escrita e monitoramento do DCR. Entretanto, somente em maio de 2018 se formalizou o Termo de adesão e Compromisso ao Currículo único e termo de Cooperação Técnica entre o Estado e 14 municípios do território roraimense, normalizando o regime de colaboração para a implementação da BNCC e elaboração do DCR.

⁷⁷ Ver Anexo A (as 10 competências gerais formuladas pela BNCC).

⁷⁸ Tem aproximadamente 523 mil habitantes (BRASIL, 2017). Segundo o Censo Escolar (BRASIL, 2017), a Rede Estadual de Educação de Roraima conta atualmente com 381 escolas, dentre as quais, 258 são escolas indígenas, distribuídas entre as 32 Terras Indígenas homologadas, que representa 46,2% do território do Estado, com algumas que já estão na zona urbana da capital Boa Vista. Outro

população indígena que representa, não apenas a maioria populacional, mas que também é muito diversa, envolvendo dez diferentes povos, com línguas, costumes e tradições bastante diversificados. Além disso, também faz fronteira com a Guiana e Venezuela, o que propicia a vinda de estrangeiros e, atualmente vivencia uma grande problemática de migração do povo venezuelano que vem para o estado com a perspectiva de firmar residência em seus 15 municípios, bem como em várias cidades brasileiras. Este fato implicou em aumento das demandas por vagas nas redes públicas de ensino do estado de Roraima, o que faz com que o sistema de ensino passe a ter maiores responsabilidades para proporcionar uma educação básica de qualidade.

Assim, a construção do Currículo de Matemática de Roraima embasou-se no desenvolvimento das competências e habilidades que estão relacionadas aos diferentes objetos de conhecimento – aqui entendidos como conteúdos, conceitos e processos, de acordo com a BNCC (2017). Estão organizados nas cinco unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística, para cada ano do Ensino Fundamental – Anos Finais.

Apresentamos nos Quadros 23 e 24 os conteúdos de divisibilidade que estão contemplados nos 6º e 7º anos do DCR (2019).

Quadro 23: Organizador Curricular de Matemática para o 6º ano (DCR-2019)

Organizador Curricular do DCR – Matemática – Números (6º ano)		
Objetos de conhecimento	Habilidades	Orientações didáticas/ Metodológicas
Fluxograma para determinar a paridade de um número natural; Múltiplos e divisores de um número natural; Números primos e compostos	(EF06MA04) Construir algoritmo em linguagem natural e representá-lo por fluxograma ...	Apropriar-se dos algoritmos do tipo $2n$ e $2n+1$...
	(EF06MA05) Classificar números naturais em primos e compostos , estabelecer relações entre números, expressos pelos termos – “é múltiplo de”, “é divisor de”, – “é fator de”, e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000 .	Apresente e aplique as regras dos critérios de divisibilidade, números primos e compostos, decomposição em fatores primos, estabelecendo as relações entre – “é múltiplo de”, – “é divisor de”, – “é fator de”. Sugira aos alunos que estabeleçam os <i>critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000</i> , por meio de investigações.
	(EF06MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor .	Apresente situações envolvendo o <i>múltiplo</i> e o <i>divisor</i> de números naturais, podendo ser resolvidos através da fatoração.

Fonte: Documento Curricular de Roraima (DCR, 2019). Adaptado pela autora. [Grifo nosso].

aspecto importante a ser destacado, é a migração maciça de venezuelanos que, de acordo com os dados da Secretaria Estadual de Educação, entre 2017 e 2018, gerou uma demanda de atendimento de mais de 1300 alunos nas classes de Ensino Fundamental anos finais e Ensino Médio.

Para atender ao objetivo de nosso estudo, vamos apresentar apenas a Unidade Temática “Números” em que estão contemplados os conteúdos de divisibilidade.

Como podemos observar no Quadro 23, não se mencionam todos os conteúdos principais de divisibilidade, pois estão ausentes os assuntos de *máximo divisor comum* e *mínimo múltiplo comum*.

Conforme pudemos verificar ao continuar pesquisando nos outros anos subsequentes, alguns conteúdos de divisibilidade estão contemplados no 7º ano, de acordo com o Quadro 24 a seguir.

No DCR-Matemática do 7º ano, a Unidade Temática “Números” contempla em “habilidades” os conteúdos de divisibilidade que estão ausentes no 6º ano, porém, apresenta-se uma ressalva “podendo incluir” máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum e, além disso, “sem a aplicação de algoritmos”, ou seja, se o professor seguir literalmente o que este quadro sugere, tira-se a possibilidade de os alunos se aprofundarem no conhecimento matemático desses conteúdos.

Quadro 24: Organizador Curricular de Matemática para o 7º ano (DCR-2019)

Organizador Curricular – 7º ano Matemática – Números no DCR-2019		
Objetos de conhecimento	Habilidades	Orientações didáticas/ Metodológicas
Múltiplos e divisores de um número natural	(EF07MA01) Resolver e elaborar problemas com números naturais, envolvendo as noções de divisor e de múltiplo , podendo incluir máximo divisor comum ou mínimo múltiplo comum , por meio de estratégias diversas, sem a aplicação de algoritmos.	Aplice as características e propriedades dos números naturais: significado de múltiplos, divisores, mínimo múltiplo comum (MMC) e máximo divisor comum (MDC), resolvendo situações problemas que envolvam o MMC e MDC entre dois ou mais números naturais, aplicando estratégias diversas.

Fonte: Adaptado do Documento Curricular de Roraima (2019) – Matemática 7º ano. [Grifo nosso].

Por outro lado, considerando uma organização de conteúdos com os objetivos de adquirir habilidades necessárias para dar prosseguimento à aquisição de novos assuntos como o estudo de frações, ainda no 6º ano, seria necessário abordar mdc e mmc, pelo menos como conhecimento prévio e, no 7º ano poderiam ser abordados como revisão para dar seguimento aos novos conhecimentos.

Os dados da análise do DCR sobre a presença-ausência dos conteúdos de divisibilidade para o 6º e o 7º ano, estão computados na Tabela 19, a seguir:

Tabela 19: Dados da Análise da Presença-Ausência dos Conteúdos de Divisibilidade no DCR – Matemática dos 6º e 7º anos

Conteúdos de divisibilidade no DCR Matemática do 6º e 7ºanos		6º ano		7º ano	
	Conteúdos de divisibilidade	(P)	(A)	(P)	(A)
CP-1	Múltiplos	P	--	P	--
CP-2	Divisores	P	--	P	--
CP-3	Critérios de divisibilidade	P	--	--	A
CP-4	Números primos e Números compostos	P	--	--	A
CP-5	Fatoração (Decomposição em fatores primos)	P	--	--	A
CP-6	Máximo divisor comum	--	A	P	--
CP-7	Mínimo múltiplo comum	--	A	P	--
Total CD _P		05	02	04	03

Fonte: DCR (2019). Elaborada pela autora.

Conforme podemos observar nos Quadros 23 e 24 e na Tabela 19, cindo dos conteúdos principais de divisibilidade estão contemplados no Documento Curricular de Roraima para o 6º ano, e os que estão ausentes, são mencionados no 7º ano.

Considerando que estando vigentes as recomendações da BNCC e, que embora haja redução expressiva dos conteúdos de divisibilidade para o 6º ano, observamos que os conteúdos de divisibilidade ausentes no 6º ano, estão contemplados no 7º ano, como recomendado pela BNCC-2017.

4.3.6 São Paulo – Documento Curricular: Matemática e suas Tecnologias do Ensino Fundamental (Ciclo II)

O Currículo do Estado de São Paulo, publicado em 2011, preparado por especialistas de cada área do conhecimento, com valiosa participação crítica e propositiva dos profissionais do ensino, os Cadernos do Currículo constituem orientação básica para o trabalho do professor em sala de aula.

Em 2008 a Secretaria de Educação do Estado de São Paulo propôs um currículo básico para as escolas da rede estadual da Educação Básica que serviu de base para a elaboração deste documento que apresenta os princípios orientadores do currículo para uma escola capaz de promover as competências indispensáveis ao enfrentamento dos desafios sociais, culturais e profissionais do mundo contemporâneo.

Além desse documento básico curricular, há um segundo conjunto de documentos, com orientações para a gestão do Currículo na escola, intitulado Caderno do Gestor. E, além disso, o Currículo se completa com um conjunto de

documentos dirigidos especialmente aos professores e alunos: os Cadernos do Professor e do Aluno, organizados por disciplinas/série/ano/bimestre.

Nos cadernos dos professores e dos alunos são apresentadas situações de aprendizagem para orientar o trabalho do professor no ensino dos conteúdos disciplinares específicos e a aprendizagem dos alunos. Esses conteúdos, habilidades e competências são organizados por série/ano e acompanhados de orientações para a gestão da aprendizagem em sala de aula e para a avaliação e a recuperação.

O Currículo do Estado de São Paulo traz uma concepção de “escola que também aprende a ensinar”, onde as interações entre os responsáveis pela aprendizagem dos alunos têm caráter de ações formadoras.

Este currículo referenciado em competências supõe que se aceite o desafio de promover os conhecimentos próprios de cada disciplina articuladamente às competências e habilidades do aluno. Tais competências e habilidade podem ser consideradas em uma expectativa geral, isto é, no que tem de comum com as disciplinas e tarefas escolares ou no que têm de específico. Dessa forma, o currículo referenciado em competências é uma concepção que requer que a escola e o plano do professor indiquem o que o aluno vai aprender. Assim, a aprendizagem é o centro da atividade escolar (CURRÍCULO-SP, 2011).

O novo Currículo de São Paulo manteve a área de Matemática como área específica.

Assim, ao respeitar a rica história da disciplina e alçá-la a uma área do conhecimento, busca-se apenas criar as condições para uma exploração mais adequada das possibilidades de a Matemática servir às outras áreas, na grande tarefa de transformação da informação em conhecimento em sentido amplo, em todas as formas de manifestação (CURRÍCULO SP, 2011).

Assim, a Matemática nos currículos de São Paulo deve constituir, em parceria com a língua materna, um recurso imprescindível para uma expressão rica, uma compreensão abrangente, uma argumentação correta, um enfrentamento assertivo de situações-problema, uma contextualização significativa (CSP, 2011).

Desse modo, os conteúdos da disciplina de Matemática são considerados um meio para o desenvolvimento das competências e estão organizados em três grandes blocos temáticos: Números, Geometria e Relações. Cada um desses três blocos de conteúdos está presente, direta ou indiretamente, na lista dos temas a serem

ensinados em todas as séries/ano e, com pequenas e matizadas diferenças, tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio.

De acordo com o CSP (2011), a lista dos conteúdos curriculares de Matemática apresentada não se distancia substancialmente dos programas usualmente oferecidos em outros currículos, nos livros didáticos ou nos diversos sistemas de ensino.

É preciso estar atento ao fato de que tais habilidades também não são um fim em si mesmo; elas constituem apenas indicadores de que a exploração das ideias fundamentais, no caminho que leva das disciplinas às competências, estaria sendo realizada de modo fecundo (CSP-SP, 2011).

Para nosso estudo daremos ênfase ao Bloco “Números”. De acordo com o Currículo de São Paulo (2011), no Ensino Fundamental, o trabalho com o bloco de conteúdos denominado **Números** tem por objetivo principal um enriquecimento do escopo da linguagem numérica, inicialmente restrita a situações e problemas envolvendo a contagem e a medida (CSP, 2011).

A seguir apresentamos no Quadro 25 os conteúdos e habilidades de Matemática para a 5ª série/6º ano do Ensino Fundamental (Ciclo II) do Currículo de São Paulo. Entretanto, faremos apenas um recorte do bloco “Números”, enfatizando os conteúdos de divisibilidade.

Quadro 25: Matemática da 5ª série/6º ano – Currículo do Estado de São Paulo

Matemática da 5ª série/6º ano – Currículo de São Paulo – 1º Bimestre	
Conteúdos	Habilidades
Números Números naturais • Múltiplos e divisores • Números primos • Operações básicas (+, −, •, ÷) • Introdução às potências Frações	• Compreender as principais características do sistema decimal: significado da base e do valor posicional • Conhecer as características e propriedades dos números naturais: significado dos números primos, de múltiplos e de divisores • Saber realizar operações com números naturais de modo significativo [...] • Compreender o significado das frações [...]

Fonte: Currículo do Estado de São Paulo (2011). Adaptado pela autora. [Grifo nosso].

Como podemos observar o Quadro 25 está dividido em duas colunas: conteúdos e habilidades de acordo com o quadro original. Assim, a 1ª coluna com

“Números”, contempla apenas, *múltiplos, divisores e números primos*. Na 2ª coluna, “habilidades”, encontramos apenas “significado dos números primos, de múltiplos e de divisores”.

No Currículo de São Paulo, encontramos referência aos conteúdos de divisibilidade somente no 1º bimestre do 6º ano. Procuramos também nas séries subsequentes e não encontramos nenhuma menção a qualquer dos conteúdos de divisibilidade. Portanto, como resultado da análise da presença-ausência dos conteúdos de divisibilidade para o 6º ano no CSP, temos os dados conforme Tabela 20.

Tabela 20: Dados da Análise da Presença-Ausência dos Conteúdos de Divisibilidade do CSP – Matemática para o 6º ano

Conteúdos de divisibilidade No CSP: Matemática do 6º ano		(P)	(A)
CP-1	Múltiplos	P	--
CP-2	Divisores	P	--
CP-3	Critérios de divisibilidade	--	A
CP-4	Números primos e Números compostos	P	--
CP-5	Fatoração (Decomposição em fatores primos)	--	A
CP-6	Máximo divisor comum	--	A
CP-7	Mínimo múltiplo comum	--	A
Total CD _p		03	04
Legenda: CP (Conteúdos principais); (P) presente; (A) ausente.			
Fonte: CSP. Elaborada pela autora.			

Conforme os dados da Tabela 20 podemos dizer que nesse documento curricular há redução expressiva dos conteúdos de divisibilidade, visto que estão ausentes os seguintes conteúdos principais: Critérios de divisibilidade, Decomposição em fatores primos, Máximo divisor comum e Mínimo múltiplo comum.

4.3.7 Considerações Finais sobre a Análise dos Documentos Oficiais e Documentos Curriculares Analisados

Conforme a análise realizada nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática ficou constatado que não contempla todos os conteúdos de divisibilidade, como também não detalha os objetos de conhecimento de todas as unidades temáticas e, por não apresentar nenhuma organização dos conteúdos Matemáticos,

não incluímos com os demais documentos curriculares, para a análise geral da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade para o 6º ano.

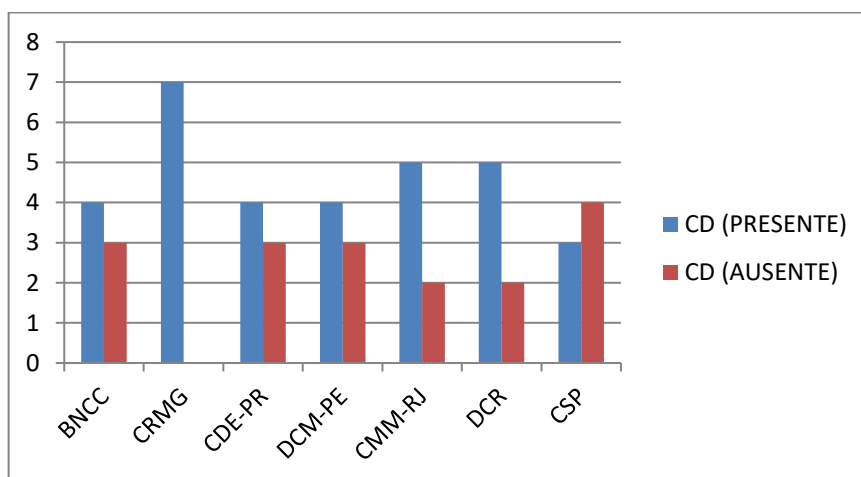
Apresentamos na Tabela 21 e no Gráfico 2, os resultados finais das análises realizadas nos seis documentos curriculares dos estados brasileiros: Minas Gerais, Paraná, Pernambuco, Rio de Janeiro, Roraima e São Paulo, bem como da BNCC-2017 do Ensino Fundamental.

Tabela 21: Resultado final da análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade nos sete documentos oficiais e curriculares analisados

Resultado final da análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade nos documentos oficiais e curriculares								
	Conteúdos de divisibilidade do 6º ano	BNCC	CRMG	CDE-PR	PCM-PE	CMM-RJ	DCR	CSP
CP-1	Múltiplos	P	P	P	P	A	P	P
CP-2	Divisores	P	P	P	P	A	P	P
CP-3	Crítérios de divisibilidade	P	P	A	P	P	P	A
CP-4	Números primos e Números compostos	P	P	A	P	P	P	P
CP-5	Fatoração – DFP	A	P	A	A	P	P	A
CP-6	Máximo divisor comum	A	P	P	A	P	A	A
CP-7	Mínimo múltiplo comum	A	P	P	A	P	A	A
	Total CD_P	04	07	04	04	05	05	03

Legenda: P (Presente); A (Ausente)

Gráfico 2: Resultado final da análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade para o 6º ano nos Documentos Oficiais e Curriculares.



Conforme podemos observar na Tabela 21 e no Gráfico 2, dos seis documentos analisados, apenas um, do Estado de Minas Gerais, contempla todos os conteúdos de divisibilidade para o 6º ano, dois desses documentos curriculares, do Estado do Rio de Janeiro e de Roraima contemplam 71,4% dos conteúdos de divisibilidade para o 6º ano, dois documentos curriculares.

Do Estado do Paraná e do Estado do Pernambuco e, inclusive a BNCC-2017, contemplam apenas 57% dos conteúdos de divisibilidade para o 6º ano e apenas o documento de São Paulo contempla abaixo de 50%, ou seja, 43% dos conteúdos de divisibilidade para o 6º ano.

Desses documentos curriculares dos estados brasileiros analisados, apenas dois deles estão atualizados com base na BNCC-2017, são os documentos dos Estados de Minas Gerais e de Roraima.

Pelos dados apresentados inferimos que há redução expressiva dos conteúdos principais de divisibilidade para o 6º ano, o que poderá influenciar de forma não satisfatória na aprendizagem dos conhecimentos matemáticos pelos alunos deste período escolar.

4.4 ANÁLISE DOS PLANOS DE ENSINO DOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Como pudemos observar nos Parâmetros Curriculares da Matemática para o Ensino Fundamental anos finais, não se dá muita ênfase a esses conteúdos, encontramos apenas uma referência no bloco “Números e operações”, enfatizando o cuidado na apresentação desses assuntos devido à fase de transição pela qual passam os alunos do ensino fundamental anos iniciais para o próximo nível.

Conceitos como os de “múltiplo” e “divisor” de um número natural ou o conceito de “número primo” podem ser abordados neste ciclo como uma ampliação do campo multiplicativo, que já vinha sendo construído nos ciclos anteriores, e não como assunto novo, desvinculado dos demais. Além disso, é importante que tal trabalho não se resuma à apresentação de diferentes técnicas ou de dispositivos práticos que permitem ao aluno encontrar, mecanicamente, o mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum sem compreender as situações-problema que esses conceitos permitem resolver (PCN-M, 1998, p. 66) (grifo nosso).

Dessa forma, trazemos a seguir alguns Planos de Ensino de Matemática do 6º ano do Ensino Fundamental Anos finais de 2016 e 2017, cedidos pelos professores das escolas participantes da pesquisa, a fim de ter um referencial para comparar com os conteúdos de divisibilidade apresentados nos sumários dos livros didáticos.

Os planos de ensino dos professores são importantes para o acompanhamento pedagógico tanto pelo próprio professor quanto pela coordenação pedagógica. Refletem a intensão de ensino do professor.

Infelizmente não foram todas as escolas que disponibilizaram os Planos de Ensinos de Matemática (PEM) dos professores de Matemática referentes ao 6º ano de Matemática, pois não estavam com os dados atualizados.

Os três Planos de Ensinos de Matemática (PEM) disponibilizados serão denominados de PEM-01, PEM-02 e PEM-03. Todos têm os planejamentos para todo o ano letivo, divididos em 4 (quatro) bimestres, entretanto vamos fazer um recorte do plano informando apenas a parte que contiver os conteúdos de divisibilidade, conservando o máximo possível do modelo original e, por questões éticas vamos preservar o nome das escolas.

4.4.1 Análise do Plano de Ensino de Matemática – PEM-01

Nesta seção apresentaremos um recorte dos Planos de Ensino de Matemática do 6º ano de três escolas estaduais de Boa Vista (RR), comparando os conteúdos de divisibilidade dos planos com os livros didáticos de matemática adotados pelas escolas do PNLD-2017 vigente.

Observamos no PEM-01 algumas imprecisões nos objetivos quanto aos conteúdos de divisibilidade com relação a “fazer fatoração dos números divisíveis”, quanto a “definir divisibilidade”, fica uma dúvida se esta definição abrange múltiplos e divisores e também os critérios de divisibilidade, porém, os três assuntos não são mencionados. Explicitamente, o PEM-01 contempla os seguintes conteúdos de divisibilidade: divisibilidade, números primos e compostos, determinação dos números primos pelo crivo de Eratóstenes. Observamos a ausência dos seguintes conteúdos: múltiplos, divisores, critérios de divisibilidade, mdc e mmc. Dessa forma, inferimos que há uma redução expressiva dos conteúdos de divisibilidade.

Quadro 26: Recorte do Plano de Ensino de Matemática do 6º ano (PEM-01)

Plano de Ensino de Matemática do 6º ano 2º Bimestre CONTEXTO: Ciência e Tecnologia: Avanços e Contradições – Tratamento da Informação OBJETIVOS GERAIS: Investigar, calcular, analisar, elaborar e construir situações problemas a partir da estatística na atividade humana, regularidades nas tabelas de grandezas, gráficos, cálculos de probabilidades, dentro da perspectiva do trabalho coletivo. Tema: “Matemática está em tudo”				
Objetivos específicos	Conteúdos	Metodologia	Recursos	Avaliação
. Definir radiação e resolver operações com a radiação. . Conhecer e definir Divisibilidade . . Fazer fatoração dos números divisíveis . . Identificar os Números Primos e os Números Compostos . . Determinar os números primos pelo Crivo de Eratóstenes . . Determinar a Média Aritmética. . Transformar frações em porcentagem. . Resolver problemas envolvendo porcentagem. . Aproximar os resultados possíveis através de probabilidades.	. Radiação. . Divisibilidade . Fatoração dos números divisíveis . . Números Primos e os Números Compostos . Determinação dos Números Primos pelo Crivo de Eratóstenes . . Média Aritmética . Porcentagem. . Frações e problemas. . Probabilidade – moeda. . Cálculos problemas envolvendo as quatro operações.	. Aulas Expositivas. . Estudo Dirigido . Realização das atividades propostas . Estudo em grupo e individual. . Desenvolver atividades diferenciadas para alunos PNE . Utilizar semanalmente o Projeto Maleta da Matemática.	. Quadro . Pincel . Apagador . Livro Didático . Caderno . Caneta . Lápis . Borracha . Hidrocor . Régua . Esquadro . Transferidor . Biblioteca . Sala Informática . Sala de multimeios	. O aluno será avaliado de forma contínua e processual: . Exercícios propostos; . Trabalhos Individuais; . Trabalhos em grupo; . Trabalhos em Dupla; . Participação Individual e Coletiva nas aulas; . Prova Bimestral; . Prova final; . Alunos PNE através de Relatórios de acordo com o amparo da LDB vigente. Exame Final.

Fonte: Escola Estadual de Boa Vista (RR). [Grifo nosso].

4.4.2 Análise do Plano de Ensino de Matemática – PEM-02

A seguir, no Quadro 27, apresentamos um recorte do Plano de Ensino de Matemática (PEM-02) do 6º ano referente aos conteúdos de divisibilidade de uma escola estadual de Boa Vista (RR).

Quadro 27: Recorte do Plano de Ensino de Matemática do 6º ano (PEM-02)

GOVERNO DO ESTADO DE RORAIMA SECRETARIA DE EDUCAÇÃO E DESPORTOS DE RORAIMA ESCOLA ESTADUAL ...		Disciplina: MATEMÁTICA		Bimestre: 01	
		Professor(a):			
		Série/Ano: 6º		Turmas: A, B, C, D, G e H	
Planejamento Anual – 2017					
Habilidades	Conteúdos	Metodologia		Recursos	Avaliação
Reconhecimento de múltiplos e divisor de um número. Resolver por meio de fatoração múltiplos e divisores.	Números primos Fatoração (MMC e MDC)	• A adoção de uma metodologia de aprendizagem ativa e alternativa permitirá que se desenvolva um trabalho no qual o aluno assim crie situações de aprendizagem, instigadoras, desafiadoras que levam as discussões de ideias sobre temas abordados. Pensando nisso, temos a resolução de problemas a partir dos quais vão construindo seu saber matemático, através de: • Modelagem de situações Problema; • Trabalhos extraclasse. • Abordagem da História da Matemática; • Jogos Lúdicos Exercícios		Material Impresso Xerocado Cartolina Papel cartão, cola e tesoura Livro didático Projetos Exercícios do cotidiano Trabalhos individuais e em grupos.	• Avaliar de diversas maneiras, como observação, intervenção, revisão de noções e subjetividades, isto é, formas escritas, orais, de demonstração, com uso de materiais manipuláveis, computador e/ou calculadora. • Observação de trabalhos em sala, avaliando a disciplina e o comportamento adequado, bem como a realização das atividades propostas; • Trabalhos e pesquisa. • Avaliações escritas; • Observação contínua do desempenho do aluno.

Fonte: Escola Estadual de Boa Vista (RR). [Grifo nosso].

O PEM-02 em sua proposta, na coluna “habilidade” traz o seguinte: “Reconhecimento de múltiplos e divisor de um número; Resolver por meio de fatoração múltiplos e divisores”, mas na segunda coluna, apresenta apenas “Números primos; fatoração (MMC, MDC)”. O modo como foi colocado “fatoração (mmc e mdc)”, parece que é uma coisa só, quando não é, pois, fatoração, mmc e mdc são conteúdos distintos. Os *critérios de divisibilidade*, são os conteúdos de divisibilidade que estão ausentes, o que é uma redução significativa, pois essas regras são utilizadas para facilitar muitos cálculos não somente dos conteúdos de divisibilidade, mas de outras operações, além disso, os critérios de divisibilidade auxiliam no desenvolvimento do cálculo mental que é muito recomendado pelos programas curriculares atuais.

4.4.3 Análise do Plano de Ensino de Matemática – PEM-03

Apresentaremos a seguir, no Quadro 28, o recorte do Plano de Ensino de Matemática do 6º ano (PEM-03), de uma escola estadual de Boa Vista (RR).

Quadro 28: Recorte do Plano de Ensino de Matemática do 6º ano (PEM-03)

GOVERNO DO ESTADO DE RORAIMA SECRETARIA DE EDUCAÇÃO E DESPORTOS DE RORAIMA		Disciplina: MATEMÁTICA		Bimestre: 02
		Professor(a):		
		Série/Ano: 6º	Turmas: 1, 2, 3, 4 e 5	
PLANEJAMENTO ANUAL – 2017/ 2º BIMESTRE				
Habilidades	Conteúdos	Metodologia	Recursos	Avaliação
• Utilizar corretamente as noções é “múltiplo de”. • Aplicar os critérios de divisibilidade como facilitadores para verificar se um número é divisível por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 e 10. • Determinar a sequência de múltiplos comuns a dois ou mais números naturais e sua importância em situações do contexto social. • Identificar o menor número que é múltiplo de dois outros e suas implicações. • Conceituar números primos. • Escrever números naturais como produto de fatores primos. • Encontrar divisores de um natural aplicando esse conhecimento na resolução de problemas.	9. Múltiplos e divisores	• Apresentação do conteúdo através do livro didático, com explicações e discussão acerca do assunto. • Resolução de situações problemas no caderno, individualmente com atribuição de nota. • Resolução de problemas em grupo com a ajuda do professor orientador. • Avaliação escrita com atribuição de nota. • Brincando para descobrir o segredo da brincadeira. O segredo é encontrar a resposta que para vencer tem que saber os múltiplos de 3.	• Ábaco • Diferentes gêneros textuais • Esquemas ilustrativos ou diagramas. • Fotografias • História em quadrinhos. • Ilustrações. • Quadro branco. • Pincel para quadro branco. • Vídeo com a história da matemática.	• Observação, diária em sala de aula através das atividades propostas. • Exercícios avaliativos (10 pontos) • Duas avaliações escritas, sendo uma objetiva com valor de 20 pontos e outra com o valor de 30 pontos. • Participação ativa do aluno individual e nos trabalhos em equipe. Conselho de classe (20 pontos). • Contribuição na construção do conhecimento. • Pontualidade na entrega das atividades propostas. • Projeto de feira de ciências (10 pontos). • Oficina, onde será observado o domínio do conteúdo e criatividade na criação. • Participação ativa do aluno (10 pontos).

Fonte: Escola Estadual de Boa Vista (RR) (2017). [Grifo nosso].

O Plano de Ensino de Matemática PEM-03 contempla a maioria dos conteúdos de divisibilidade, com a ausência apenas de um assunto, máximo divisor comum, conforme 1ª coluna “Habilidades” do Quadro 30, acima. Portanto, podemos inferir que a ausência de apenas um conteúdo não é algo preocupante.

Como conclusão da análise dos três planos de ensino de matemática, percebemos que pelo menos um apresentou uma redução expressiva dos conteúdos de divisibilidade.

CAPÍTULO 5

OS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA

Na Educação Básica o livro didático se constitui em um dos mais relevantes materiais didáticos para o professor e para o aluno. Como já se instituiu um referencial curricular os professores o utilizam para definir os conteúdos que serão trabalhados a cada ano letivo escolar.

Segundo Pais (2013, p. 48) a presença extensiva que o livro didático ocupa na educação escolar indica a existência de um recurso pedagógico consolidado, porque resistiu às diversas mudanças ocorridas na educação e no uso das tecnologias de comunicação.

Os livros didáticos são considerados pelos professores como um recurso pedagógico que poderá ser utilizado por eles e pelos alunos em sala de aula, um referencial didático para preparar suas aulas e também para aprofundamento de seus conhecimentos, visto que o livro do professor contém um manual de orientação com bastante dicas de como usar o livro, elaborar exercícios e realizar as avaliações. Além disso, os autores sugerem diversas abordagens metodológicas em consonância com a Educação Matemática.

Segundo Choppin (2004), estudos históricos mostram que os livros didáticos assumem, conjuntamente ou não, quatro funções essenciais, podendo variar de acordo com o ambiente sociocultural, à época, as disciplinas, os níveis de ensino, os métodos e suas formas de utilização. Essas funções são:

(1) função *referencial* (também chamada de curricular ou programática, desde que existam programas de ensino): o livro didático reflete a fiel tradução do programa, ou em regiões de livre concorrência, uma de suas possíveis interpretações;

(2) função *instrumental*: o livro didático apresenta as metodologias de aprendizagem propostas em exercícios ou atividades que visam favorecer a aquisição de competências disciplinares, de memorizar conhecimentos, apropriação de habilidades, de métodos de resolução de problemas, etc.;

(3) função *ideológica e cultural*: o livro didático é um meio de aculturar – em certos casos, a doutrinar – a jovem geração seja de maneira explícita ou implícita e;

(4) função *documental*: surgida recentemente na literatura escolar; o livro didático pode fornecer um conjunto de documentos textuais ou icônicos, cuja observação pode vir a desenvolver o espírito crítico do aluno.

Em nosso estudo iremos analisar a sua função instrumental, pois visa expressar a fiel tradução de programas de ensino ou referenciais curriculares, em que iremos verificar a presença dos conteúdos de divisibilidade.

O livro didático é um recurso pedagógico de grande importância para uma disciplina escolar e, para a disciplina de matemática não é diferente. Segundo Valente (2008)

A dependência de um curso de matemática aos livros didáticos, portanto, ocorreu desde que as primeiras aulas deram origem à matemática hoje ensinada na escola básica. Desde os seus primórdios ficou assim caracterizada, para a matemática escolar, a ligação direta entre compêndios didáticos e desenvolvimento de seu ensino no país. Talvez seja possível dizer que a matemática se constitua na disciplina que mais tem a sua trajetória histórica atrelada aos livros didáticos (VALENTE, 2008).

Para Bitar (2017) o livro didático utilizado por um professor pode fornecer uma boa aproximação com a sua prática em sala de aula, especialmente no que diz respeito ao conteúdo apresentado e às metodologias utilizadas.

5.1 OS LIVROS DIDÁTICOS DO PROGRAMA NACIONAL DO LIVRO DIDÁTICO

Neste capítulo pretendemos fazer um breve relato histórico do Programa do Livro Didático (PNLD) em nosso país e de como este programa é desenvolvido junto às escolas brasileiras.

A distribuição de livros didáticos não é recente no Brasil. Em 1938, por meio do Decreto-Lei nº 1.006, de 30/12/1938 foi constituída a Comissão Nacional do Livro Didático (CNLD), que estabeleceu a primeira política de legislação e controle de produção e circulação do livro didático no país. O Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) é o mais antigo dos programas voltados à distribuição de obras *didáticas aos estudantes da rede pública de ensino brasileira e iniciou-se, com outra denominação, em 1937. Ao longo desses 80 anos, o programa foi aperfeiçoado e teve diferentes*

nomes e formas de execução. Atualmente, o PNLD é voltado à educação básica brasileira, tendo como única exceção os alunos da educação infantil.

Há mais de três décadas o programa passou a se parecer com o que conhecemos hoje. A partir de 1985 passou a se chamar Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), e não mudou só de nome, passou a ser mais democrático e abrangente. Os livros didáticos passaram a ser indicados pelos professores, estabelecendo-se a reutilização do livro. A partir daí houve o aperfeiçoamento das especificações técnicas para sua produção, visando maior durabilidade e possibilitando a implantação de bancos de livros didáticos. No mesmo ano também chegava ao fim a participação financeira dos estados, passando toda a responsabilidade para o Governo Federal.

O PNLD tem como principal objetivo subsidiar o trabalho pedagógico dos professores por meio da distribuição de coleções de livros didáticos aos alunos da educação básica.

5.1.1 Distribuição e avaliação dos livros didáticos de Matemática

O Programa Nacional do Livro Didático é executado em ciclos trienais alternados, por exemplo, livros publicados em 2015 passam a fazer parte do PNLD-2017, ou seja, do triênio 2017-2018-2019. Assim, a cada ano o MEC adquire e distribui livros para todos os alunos de um segmento, que pode ser: anos iniciais do ensino fundamental, anos finais do ensino fundamental ou ensino médio. À exceção dos livros consumíveis, os livros distribuídos deverão ser conservados e devolvidos para utilização por outros alunos por um período de três anos.

Com relação à compra e à distribuição dos materiais didáticos e literários selecionados pelo Ministério da Educação no âmbito da Secretaria de Educação Básica (SEB), é importante ressaltar que são de responsabilidade do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE)⁷⁹, cabendo a este órgão também a logística do provimento e do remanejamento dos materiais didáticos para todas as escolas públicas do país cadastradas no censo escolar.

Muitas mudanças significativas ocorreram no PNLD, dentre elas, ressaltamos que a partir de 2001 a escolha dos livros passou a ser feita por coleção, não mais

⁷⁹ <<https://www.fnde.gov.br/distribuicaosimadnet/confirmarCancelar>>

individualmente como era feito até então, a justificativa para esta mudança é que a escolha por coleção contribuirá para preservar a unicidade e a articulação didático-pedagógica da escola, possibilitando assim, o desenvolvimento curricular de forma integrada (FNDE, 2001).

Além disso, houve uma considerável mudança na apresentação e nos conteúdos dos Guias do Livro Didático que orientam a escolha do LD e, a cada novo lançamento do PNLD, só foi melhorando. No item 6.1.2 fazemos uma breve referência aos guias, principalmente ao Guia do PNLD/2017.

Quanto à mudança e a permanência do Programa de distribuição do livro didático, o MEC dá a seguinte justificativa para o gasto de milhares de reais com a distribuição gratuita dos livros para a educação básica brasileira:

Seja em razão de uma inadequada formação de professores, seja em razão das condições de trabalho docente, seja ainda, em razão das dificuldades enfrentadas para a produção e circulação do livro no Brasil – particularmente para fazê-lo circular na escola – o livro didático brasileiro se converteu numa das formas de documentação e consulta empregadas por professores e alunos. Tornou-se, sobretudo, um dos principais fatores que influenciam o trabalho pedagógico, determinando sua finalidade, definindo o currículo, cristalizando abordagens metodológicas e quadros conceituais, organizando, enfim, o cotidiano da sala de aula (FNDE, 2001).

Os Manuais⁸⁰ dos livros didáticos de Matemática disponíveis no Portal do FNDE contêm as relações dos livros distribuídos a cada triênio, entretanto só conseguimos informações a partir do ano de 1985, ocorrendo uma lacuna sobre a distribuição no período de 1992 a 1997.

Segundo o Manual do Livro Didático (1991) do PNLD-1992.

Para garantir a continuidade do atendimento ao educando, o atual Governo adquiriu, pelo PNLD 1991, um total de 67,2 milhões de exemplares de livros didáticos para distribuição a alunos e professores das escolas públicas do País, constituindo-se, assim, no maior Programa de Livros jamais realizado – um marco na história da Educação Nacional.

⁸⁰ Encontramos os manuais dos PNLD de 1985, 1987, 1988 e 1992 e, no Manual (1991) do PNLD 1992 percebemos que houve mudança no Governo, mudou o Presidente do nosso país sendo eleito Fernando Collor de Melo conforme consta no Manual/FAE/1991. Observou-se uma lacuna na distribuição dos livros de 1992 até 1997, não havendo nenhum guia do livro didático desse período e, nenhuma informação sobre o que ocorreu com a distribuição dos livros didáticos nesse período. Houve mudança de nome de manual para “Catálogo para indicação do livro didático para o PNLD-1997, cuja distribuição ainda era realizada pela Fundação de Assistência ao Estudante (FAE), consta que a distribuição dos livros para o Ensino Fundamental II da 5ª a 8ª série seria apenas de História e de Geografia.

Depois desse período só estão disponíveis no Portal do FNDE as informações sobre o PNLD 2002 e os subsequentes, contidas no então denominado “Guia de Livros Didáticos” (GLD) e, além disso, a partir desta data a distribuição do livro didático não é mais de responsabilidade da FAE⁸¹.

A seguir no Quadro 29, faremos uma exposição resumida das ações do governo federal a respeito da distribuição dos livros didáticos no Brasil.

Quadro 29: Descrição das ações referente à distribuição dos livros didáticos no Brasil pelo PNLD

Data	Relação das principais ações referentes à distribuição dos livros didáticos no Brasil
1938	Estabelece-se a primeira política de legislação e controle de produção e circulação do livro didático no Brasil através da Comissão Nacional do Livro Didático (CNLD).
1945	Através do Decreto-Lei nº 8.460, de 26/12/45 consolida-se a legislação sobre as condições de produção, importação e utilização do livro didático, restringindo ao professor a escolha do livro a ser utilizado pelos alunos, conforme o art.5º.
1966	Firmou-se um acordo entre o Ministério da Educação (MEC) e a Agência Norte-Americana para o Desenvolvimento Internacional (Usaid), o que assegurou ao MEC recursos suficientes para a distribuição gratuita de 51 milhões de livros no período de três anos. Garantindo assim a continuidade do programa. A partir daí criou-se a Comissão do Livro Técnico e Livro Didático (Colted), com o objetivo de coordenar as ações referentes à produção, edição e distribuição do livro didático.
1971	O Instituto Nacional do Livro (INL) passou a desenvolver o Programa do Livro Didático para o Ensino Fundamental (Plidef), assumindo as atribuições administrativas e de gerenciamento dos recursos financeiros.
1976	a Fundação Nacional do Material Escolar (FENAME) torna-se responsável pela execução do programa do livro didático. Os recursos provêm do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE) e das contrapartidas mínimas estabelecidas para participação das Unidades da Federação. Devido à insuficiência de recursos para atender todos os alunos do ensino fundamental da rede pública, a grande maioria das escolas municipais é excluída do programa.
1983	Em substituição à FENAME, é criada a Fundação de Assistência ao Estudante (FAE). A partir desta data os professores passam a participar da escolha dos livros didáticos e, se amplia o programa, para incluir as demais séries do ensino fundamental.

Fonte: Portal do FNDE, elaborado pela autora.

⁸¹ A Fundação de Assistência ao Estudante (FAE), criada em 1983 foi responsável pela execução da política educacional do país de 1983 até 1997 (ano em que foi extinta) e incorporou entre outros programas do MEC, o do LD. A Coordenação Geral de Materiais Didáticos (COGEAM) passa a ser responsável pela avaliação e seleção das obras inscritas no Programa Nacional do Didático (PNLD) e do Programa Nacional Biblioteca da Escola (PNBE), bem como pela elaboração do Guia dos Livros Didáticos voltado a auxiliar o professor na escolha dos livros didáticos (MEC, 2001).

Quadro 29: Continuação

Data	Relação das principais ações referentes à distribuição dos livros didáticos no Brasil
1985	A partir do Decreto nº 91.542, de 19/08/1985 surgiu o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), que traz diversas mudanças, tais como: (i) Indicação do livro didático pelos professores; (ii) Reutilização do livro, implicando a abolição do livro descartável e o aperfeiçoamento das especificações técnicas para sua produção, visando maior durabilidade e possibilitando a implantação de bancos de livros didáticos; (iii) Extensão da oferta aos alunos de 1ª e 2ª série das escolas públicas e comunitárias; (iv) Passa-se o controle do processo decisório para a FAE, garantindo assim o critério de escolha do livro pelos professores.
1993	A Resolução CD FNDE nº 6 vincula, em julho de 1993, recursos para a aquisição dos livros didáticos destinados aos alunos das redes públicas de ensino, garantindo-se as verbas para a aquisição e distribuição do livro didático.
1996	Inicia-se processo de avaliação pedagógica dos livros inscritos para o PNLD, sendo publicado o primeiro “Guia de Livros Didáticos” de 1ª a 4ª série. Os livros foram avaliados pelo MEC conforme critérios previamente discutidos. Esse procedimento foi aperfeiçoado, sendo aplicado até hoje.
1997	Extingue-se a Fundação de Assistência ao Estudante (FAE) e a responsabilidade pela política de execução do PNLD é transferida integralmente para o Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE). O programa é ampliado e o Ministério da Educação passa a adquirir, de forma continuada, livros didáticos de alfabetização, língua portuguesa, matemática, ciências, estudos sociais, história e geografia para todos os alunos de 1ª a 8ª série do ensino fundamental público.
2000	Inicia-se a distribuição de dicionários da língua portuguesa para uso dos alunos de 1ª a 4ª série em 2001. Os livros serão entregues antes de iniciar o ano letivo.
2001	Publicou-se o Guia do Livro Didático PNLD-2002 para a escolha dos livros didáticos pelos professores para o Triênio de 2002-2003-2004. Neste mesmo ano foi realizada a distribuição dos livros didáticos (PNLD-2002) para o Ensino Fundamental das séries finais.
2003	É instituído o Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLEM) através da Resolução CD FNDE nº 38, de 15/10/2003.
2004	Publicou-se o Guia do Livro Didático PNLD-2005 para a escolha dos livros didáticos pelos professores para o triênio de 2005-2006-2007. É feita a distribuição para o Ensino Fundamental das séries finais dos livros didáticos (PNLD-2005).
2007	Publicou-se o Guia do Livro Didático PNLD-2008 para a escolha dos livros didáticos pelos professores para o triênio de 2008-2009-2010. É feita a distribuição para o Ensino Fundamental das séries finais dos livros didáticos (PNLD-2008).
2010	Publicou-se o Guia do Livro Didático PNLD-2011 para a escolha dos livros didáticos pelos professores para o triênio de 2011-2012-2013. É feita a distribuição para o Ensino Fundamental dos anos finais dos livros didáticos (PNLD-2011).
2011	O PNLD 2011 ampliou a oferta de livros didáticos, incluindo, pela primeira vez, o componente curricular “Língua Estrangeira Moderna” (LEM): Espanhol e Inglês. Essa inclusão reflete o reconhecimento de que lugar de aprender línguas estrangeiras, de forma efetiva e significativa, é na escola e que seu aprendizado é um fator importante de inclusão social e de maior integração à realidade contemporânea.
2012	Importante e significativo avanço nos programas do livro ocorreu na área de tecnologia. Em 2012 foi publicado edital para formação de parcerias para estruturação e operação de serviço público e gratuito de disponibilização de materiais digitais a usuários da educação nacional.
2013	Publicou-se o Guia do Livro Didático PNLD-2014 para a escolha dos livros didáticos pelos professores para o triênio de 2014-2015-2016. É feita a distribuição para o Ensino Fundamental dos anos finais dos livros didáticos (PNLD-2014).
2016	Publicou-se o Guia do Livro Didático PNLD-2017 para a escolha dos livros didáticos pelos professores para o triênio de 2017-2018-2019. É feita a distribuição para o Ensino Fundamental dos anos finais dos livros didáticos (PNLD-2017).

Fonte: Portal do FNDE. Elaborado pela autora.

Há uma dimensão muito importante sobre a distribuição dos livros didáticos que normalmente os pesquisadores da área educacional quase não mencionam em seus estudos, trata-se da dimensão econômica. Numa época de crise econômica há um grande gasto público com a distribuição dos livros didáticos e, pouquíssimo cuidado em sua conservação e uso na escola, tanto pelos alunos como também nas bibliotecas das escolas.

Contudo, Cassiano em sua tese (2007) trata da questão econômica e, segundo a autora

Nos primeiros anos do PNLD as compras governamentais se concentraram em poucas e grandes editoras, porém, nessa época, ainda sobrava uma pequena fatia desse mercado para as pequenas editorais. Nas duas décadas subsequentes, a concentração aumentou, reduzindo-se radicalmente o número de editoras participantes no PNLD, sendo que em 2006 podemos constatar a quase total ausência de pequenas editoras nesse processo (CASSIANO, 2007, p. 36).

Atualmente, considerando apenas os livros didáticos de matemática do Ensino Fundamental, percebemos que estas grandes editoras dominam o mercado financeiro do livro didático no PNLD, por isso mesmo, as pessoas que consomem estes livros de forma “gratuita” devem ter responsabilidade em seu uso e pensar que por traz dessa grande distribuição no país, há muito interesse econômico das grandes editoras.

Na procura por livros nas escolas nos deparamos com situações lastimáveis de descaso com os livros, em uma escola da rede estadual encontrei uma sala cheia de livros jogados pelo chão, entulhados, empoeirados, abandonados, livros antigos, raros e livros novos ainda envoltos em plástico.

A quantidade de livros distribuídos para determinado nível de ensino é bastante considerável e, se imaginarmos que um livro desse não sai por menos de dez reais, que é um valor fácil de fazer uma conta simples de multiplicação, só para termos uma ideia de quanto custa aos brasileiros promover este tipo de distribuição “gratuita”, mas que não sai de graça para os cofres públicos. Se considerarmos apenas as coleções de Matemática⁸² do PNLD-2017 o gasto seria no valor de

⁸² De acordo com a pesquisa do FNDE sobre os livros mais escolhidos pelos professores e selecionados pelo PNLD-2017. Disponível em <www.fnde.gov.br/distribuicao/livro-didatico>

R\$104.502.970,00 (cento e quatro milhões, quinhentos e dois mil e novecentos e setenta reais), é claro que esse é um valor fictício (uma suposição).

Apresentamos na Tabela 22 a quantidade dos livros selecionados pelo último PNLD/2017 para o triênio 2017-2018-2019, para que possamos refletir sobre o custo dessa distribuição e procurarmos dar valor a esse bem que transcende a utilidade material.

Tabela 22: Quantidade dos LDM Distribuídos no País pelo PNLD-2017 para o Ensino Fundamental dos anos finais para o Triênio 2017-2018-2019.

Distribuição dos Livros Didáticos de Matemática PNLD/2017		
Lugar	Título das coleções do 6º ao 9º ano	Quantidade
1º	Praticando matemática	2.758.073
	6º Ano	749.842
	7º Ano	711.792
	8º Ano	679.647
	9º Ano	616.792
2º	Vontade de saber matemática	2.032.244
	6º Ano	568.231
	7º Ano	527.356
	8º Ano	486.971
	9º Ano	449.686
3º	Matemática – compreensão e prática	1.303.096
	6º Ano	366.979
	7º Ano	340.632
	8º Ano	311.341
	9º Ano	284.144
4º	Projeto Teláris – Matemática	1.292.722
	6º Ano	363.288
	7º Ano	334.615
	8º Ano	309.029
	9º Ano	285.790
5º	Matemática - Bianchini	1.059.026
	6º Ano	297.113
	7º Ano	276.977
	8º Ano	253.919
	9º Ano	231.017
6º	Projeto Araribá – Matemática	656.498
	6º Ano	183.339
	7º Ano	169.919
	8º Ano	157.624
	9º Ano	145.616
7º	Convergências matemática	582.098
	6º Ano	166.015
	7º Ano	152.484
	8º Ano	138.828
	9º Ano	124.771

Tabela 22: continuação

Distribuição dos Livros Didáticos de Matemática PNLD/2017		
Lugar	Título das coleções do 6º ao 9º ano	Quantidade
8º	Matemática nos dias de hoje na medida certa	382.440
	6º Ano	107.843
	7º Ano	99.318
	8º Ano	91.123
	9º Ano	84.156
9º	Descobrimos e aplicando a matemática	242.272
	6º Ano	67.620
	7º Ano	60.348
	8º Ano	54.677
	9º Ano	59.627
10º	Matemática ideias e desafios	141.828
	6º Ano	41.582
	7º Ano	36.757
	8º Ano	32.789
	9º Ano	30.700
TOTAL		10.450.297

Fonte: Portal FNDE (2017).

Como podemos observar a quantidade dos livros didáticos distribuídos para os alunos é muito significativa e, apenas relacionamos as dez coleções de matemática selecionadas pelos professores das escolas públicas do Ensino Fundamental Anos finais. Os livros do 6º ano de matemática distribuídos equivalem a 31,44% do total referentes às dez coleções selecionadas.

Então, podemos inferir, apenas considerando essa quantidade de livros distribuídos, que esse objeto de estudo deve ser considerado um bem valioso, que deve ser bem cuidado e muito bem utilizado pelos alunos, sua principal destinação, para que lhes seja facilitada a aprendizagem.

Avaliação do Livro Didático de Matemática

A fim de adquirir a qualidade requerida para a distribuição aos alunos de todas as escolas do Ensino fundamental no Brasil, pelo PNLD, é preciso que os livros didáticos inscritos pelas editoras passem por um rigoroso processo de avaliação.

É para buscar essa qualidade, a fim de que o professor e alunos possam trabalhar com mais segurança no que se refere aos conteúdos, e para que se evite veicular, em um meio de comunicação de tão grande alcance, informações preconceituosas e discriminatórias que se desenvolve um processo de avaliação das obras (BRASIL, 2001).

A avaliação das obras didáticas submetidas à inscrição no PNLD-2017⁸³ busca garantir a qualidade do material a ser encaminhado à escola, incentivando a produção de materiais cada vez mais adequados às necessidades da educação pública brasileira (BRASIL, 2016).

O MEC adotou uma nova sistemática para o processo de avaliação, buscando, por meio de parcerias com universidades públicas, impulsionar o interesse da pesquisa universitária sobre o tema, bem como incentivar a transferência do conhecimento e experiência acumulados. Com isso, as universidades contribuem para o aperfeiçoamento, a socialização e a melhoria do processo de análise de livros didáticos.

Desse modo, a avaliação das coleções passou a ser realizada pelas universidades públicas brasileiras selecionadas por meio de concorrência pública⁸⁴, sob a coordenação da Secretaria de Educação Básica (SEB/MEC). São várias as instituições de Ensino Superior, parceiras, responsáveis por planejar, organizar e executar o processo avaliativo pedagógico do PNLD 2017. Assim, coube à Universidade Federal de Pernambuco – UFPE fazer a avaliação de todas as coleções de Matemática selecionadas para o PNLD-2017.

A partir das avaliações as coleções foram classificadas da seguinte maneira, segundo o FNDE (2001).

- *Recomendadas com distinção (***)*: são as que se destacam pelo esforço em se aproximar o mais possível do ideal representado pelos princípios e critérios. Constituem propostas elogiáveis, criativas e instigantes.
- *Recomendadas (**)*: são aquelas que cumprem todos os requisitos mínimos de qualidade exigidos. Por isso mesmo, asseguram a possibilidade de um trabalho didático correto eficaz por parte do professor.
- *Recomendadas com ressalvas (*)*: nessa categoria estão reunidos os trabalhos isentos de erros conceituais ou preconceitos que obedecem aos critérios mínimos de qualidade, mas, por este ou aquele motivo, não estão a salvo de ressalvas. Desse modo, podem subsidiar um trabalho adequado se

⁸³ O processo de avaliação do PNLD 2017 teve início com a publicação do Edital de Convocação 02/2015 – CGPLI, no Diário Oficial da União de 02/02/15, seção 3, página 38, documento orientador das editoras para a inscrição das coleções didáticas a serem submetidas à avaliação pedagógica (BRASIL. MEC, 2016).

⁸⁴ Conforme Portaria SEB/MEC nº 28, de 10/08/2015, publicada no DOU de 11/08/2015, que divulga o resultado dessa seleção.

o professor estiver atento às observações, consultar bibliografias para revisão e complementar a proposta (FNDE, 2001, p. 13).

Os critérios estabelecidos para a avaliação estão organizados em comuns e específicos de acordo com as disciplinas e foram definidos inicialmente em 1995, em reuniões e seminários que contaram com a presença de autores e editores e de suas entidades representativas, Conselho Nacional dos Secretários de Educação – CONSED, União Nacional dos Dirigentes Municipais de Educação – UNDIME e professores especialistas.

5.1.2 O Guia do Livro Didático de Matemática (PNLD/2017)⁸⁵

Consideramos o Guia dos livros didáticos um material muito importante para obter informações para o nosso estudo, pois nos possibilitaram dados relevantes sobre o processo de escolha dos livros pelas escolas públicas, bem como informações precisas sobre cada livro selecionado e, nesse caso, nos referimos aos livros de Matemática.

Além disso, é mediante o Guia dos Livros Didáticos que os professores podem conhecer o processo de avaliação, os critérios utilizados, as regras básicas que organizam o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e, também como preencher o formulário de escolha do livro. O Guia proporciona aos professores obter informações relevantes sobre as coleções selecionadas, através das resenhas feitas pelos avaliadores. Assim os Guias dos Livros Didáticos de Matemática são importantes fontes de informações não somente para a escola e professores, mas também para pesquisadores que desejam analisar os livros didáticos.

Além das coleções selecionadas o Guia apresenta a relação das coleções excluídas por não atenderem aos princípios e critérios estabelecidos no edital (de seleção para o Programa), não tendo, portanto, qualidades mínimas que possibilitem um bom uso em sala de aula.

As coleções que compõem o Guia têm, entre suas características básicas, a preocupação com a formação integral dos alunos, buscando aliar, aos conteúdos

⁸⁵ Brasil. Ministério da Educação. PNLD 2017: apresentação – Ensino fundamental anos finais / Ministério da Educação – Secretária de Educação Básica – SEB – Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Brasília, DF: Ministério da Educação, Secretária de Educação Básica, 2016. 39 p.

didáticos, elementos para o debate e a reflexão, contribuindo para a formação cidadã dos estudantes.

Desse modo, o Guia de cada componente curricular apresenta as coleções didáticas aprovadas no processo avaliativo, por meio de resenhas que informam aos professores e às professoras da rede pública de ensino as características pedagógicas de cada coleção, seus pontos fortes e suas limitações, de modo a facilitar a escolha.

Segundo o Guia do livro didático (GLDM, 2017) a escolha⁸⁶ das obras pelo corpo docente é um momento especialmente importante, porque é durante a leitura das resenhas e discussão com os colegas que surge a oportunidade de conhecer não só as obras, mas principalmente os pontos de vista de seus pares.

Além disso, as resenhas que compõem o Guia apontam as possibilidades e limites de cada uma das obras, cabendo aos professores decidirem quais são os aspectos realmente significativos, tendo em vista o contexto escolar em que estão inseridos.

Segundo o MEC (2016) esse debate pode ser bastante rico e proveitoso. O professor tem a responsabilidade de selecionar, dentre as coleções apresentadas no Guia, os títulos que serão utilizados pelos alunos no triênio 2017/2018/2019. Sendo que as orientações quanto aos procedimentos para a escolha do PNLD-2017 foram disponibilizadas no portal do FNDE⁸⁷.

Na escolha dos livros didáticos pelas escolas o MEC observamos a seguinte recomendação:

Para cada componente curricular, deverão ser escolhidas **duas opções**, 1ª e 2ª, de editoras diferentes. Quando a 1ª opção for indicada, automaticamente, o sistema preencherá a 2ª opção com “Não desejo receber livros diferentes da 1ª opção”. É importante, então, indicar em 2ª opção a coleção que deseja receber (GLDM, 2016).

Mas, apesar das escolas atenderem à recomendação acima, ouvimos de muitos coordenadores pedagógicos da maioria das escolas visitadas que acabam recebendo coleções que não foram solicitadas, diferentes das que eles costumam

⁸⁶ Para a distribuição dos livros didáticos do PNLD/2017, o registro da escolha dos livros didáticos pelas escolas (professores) foi realizado no período de 28 de junho a 12 de agosto de 2016, no portal do MEC/FNDE.

⁸⁷ Em www.fnde.gov.br >> Programas >> PNLD – Livro Didático >> Escolha PNLD 2017.

trabalhar e, quando os professores reclamam sobre essa situação, eles recebem a justificativa que não havia livros suficientes daquela coleção específica para atender a todos. Isso na verdade acontece, porque a quantidade de alunos informada é do senso escolar anterior ao ano em que vão receber os livros, ou seja, a quantidade de livros informada ao MEC não corresponde à verdadeira necessidade para atender a todos os alunos matriculados.

No processo de seleção pelos docentes, o Guia enfatiza o cuidado para que os professores não sejam influenciados nem pelas editoras e nem pelos autores dos livros, no período que vai da divulgação do resultado preliminar da avaliação pedagógica até o final da temporada de escolha, segundo o MEC (2016, p 16).

Os representantes dos editores ficam impedidos de acessar as dependências das escolas para realizar divulgação dos títulos participantes e ficam proibidos de participar de eventos das escolas e secretarias destinados à realização das escolhas, cabendo aos dirigentes e professores denunciar as violações. Também não é permitido às escolas aceitar vantagens oferecidas pelos editores e seus representantes (BRASIL, 2016).

Além disso, se espera, sobretudo, que o livro didático viabilize o acesso de professores, alunos e famílias a fatos, conceitos, saberes, práticas, valores e possibilidades de compreender, transformar e ampliar o modo de ver e fazer a ciência, a sociedade e a educação (BRASIL, 2016)

Outro aspecto relevante que o Guia do livro didático enfatiza diz respeito ao tratamento e distribuição dos conteúdos matemáticos. Quanto à organização dos conteúdos no planejamento escolar, o Guia do PNDL/2017, a partir do Parecer CNE/CEB nº 11/20, ao tratar da seleção e da forma de organização dos conteúdos no planejamento curricular nas escolas, recomenda:

No primeiro caso, é preciso considerar a relevância dos conteúdos selecionados para a vida dos alunos e para a continuidade de sua trajetória escolar. É também de fundamental importância que os conteúdos abordados respondam às demandas de um coletivo discente cada vez mais heterogêneo, assegurando a igualdade de acesso ao conhecimento socialmente produzido. Em relação à organização dos conteúdos, é necessário superar o caráter fragmentário dos componentes curriculares, no interior das áreas do conhecimento, integrando-as em um currículo que inclua articulações e contextualizações social e culturalmente relevantes, de maneira a tornar os conhecimentos abordados mais significativos para os educandos e favorecer a participação ativa de alunos com habilidades, experiências de vida e interesses diversificados (BRASIL, 2016, p.9).

Observa-se que as coleções atuais procuram atender a essas recomendações sem, no entanto, obedecer a nenhum padrão, pois, conforme observado a partir da análise, os livros de matemática do 6º ano diferem bastante quanto à distribuição e a organização dos conteúdos de divisibilidade.

5.1.3 PNLD 2017 – Os livros Didáticos de Matemática mais Escolhidos pelos Professores Brasileiros

A seleção dos livros didáticos de matemática do 6º ano para este estudo, teve como referência a classificação feita pelo MEC, das coleções mais escolhidas pelos professores brasileiros em todo o país, nos dois últimos PNLD-2014/2017. Desse modo, apresentaremos aqui as dez coleções mais escolhidas por cada programa, dando ênfase aos livros didáticos de Matemática do 6º ano. Dessa forma, a quantidade de livros apresentada refere-se apenas aos dos livros de matemática do 6º ano.

Na tabela 23 e 24 apresentamos os dez LDM do 6º ano mais escolhidos pelos professores brasileiros e distribuídos para alunos e professores pelo PNLD-2014 e PNLD-2017 respectivamente, por ordem de classificação do 1º ao 10º lugar, conforme informação do FNDE.

Tabela 23: LDM do 6º ano mais escolhidos pelos Professores das Escolas Estaduais do Ensino Fundamental anos finais no Brasil do PNLD-2014

Livros de Matemática do 6º ano mais escolhidos do PNLD 2014 Triênio: 2014-2015-2016			
Lugar	Título dos livros do 6º ano	Autores	Quantidade
1º	Praticando Matemática Edição Renovada	Álvaro Andrini e Maria José Vasconcelos	752.606
2º	Vontade de saber matemática	Joamir Souza e Patrícia Moreno Pataro	704.240
3º	Projeto Teláris – Matemática	Luiz Roberto Dante	628.253
4º	Matemática - Bianchini	Edwaldo Bianchini	377.130
5º	Projeto Araribá – Matemática	Editora Moderna (organização)	294.990
6º	Matemática: Teoria e contexto	Marília Centurión & José Jakubovic	288.318
7º	Matemática: ideias e desafios	Iracema Mori e Dulce Satiko Onaga	132.763
8º	Descobrimos e aplicando Matemática	Alceu dos Santos Mazzeiro e Paulo Antônio Fonseca Machado	89.704
9º	Projeto Velear – Matemática	Antonio José Lopes (Bigode)	87.144
10º	Matemática	Imenes & Lelis	71.900

Fonte: FNDE (2014).

A seguir, na Tabela 24, apresentamos os dez livros de matemática do 6º ano mais escolhidos pelos professores brasileiros do PNLD-2017.

Tabela 24: LDM do 6º ano mais escolhidos pelos professores das escolas estaduais do ensino fundamental anos finais no Brasil do PNLD 2017

Os dez livros mais escolhidos de Matemática do 6º ano do PNLD 2017 (Pelos professores brasileiros)			
LUGAR	Título dos livros do 6º ano	Autores/Editoras	Quantidade
1º	Praticando matemática	Álvaro Andrini (Editora do Brasil)	764.612
2º	Vontade de saber matemática	Joamir Souza e Patrícia Moreno Pataro (FTD)	581.004
3º	Matemática – compreensão e prática	Ênio Silveira (Moderna)	375.079
4º	Projeto Teláris – Matemática	Luiz Roberto Dante (Ática)	371.951
5º	Matemática - Bianchini	Edwaldo Bianchini (Moderna)	303.654
6º	Projeto Araribá – Matemática	Editora Moderna (organização)	187.774
7º	Convergências matemática	Eduardo Chavante (SM)	169.798
8º	Matemática nos dias de hoje e na medida certa	Marília Centurión & José Jakubovic	110.334
9º	Descobrimos e aplicando a matemática	Alceu dos Santos Mazzeiro e Paulo Antônio Fonseca Machado (Dimensão)	69.425
10º	Matemática: ideias e desafios	Iracema Mori e Dulce Satiko Onaga	43.164
Total			2.976.795

Fonte: Portal FNDE. Elaborado pela autora.

Podemos observar nas duas Tabelas 23 e 24 que os primeiros cinco livros mais escolhidos nos dois últimos PNLD-2014 e 2017 são os mesmos, ou seja, a maioria dos livros mais escolhidos foram distribuídos para serem usados nos últimos seis anos letivos. Isso significa que além dos autores e editoras se beneficiarem dessa situação, os alunos e professores devem se beneficiar com livros de excelente qualidade tanto na apresentação visual, editorial, quanto na organização, distribuição e presença de conteúdos matemáticos relevantes no processo de ensino e aprendizagem da Matemática no Ensino Fundamental – Anos Finais.

Reconhecemos a grande relevância das pesquisas educacionais sobre os livros didáticos, visto que beneficiam milhares de estudantes e professores brasileiros, mas também não podemos esquecer que essa distribuição tem um alto custo para os cofres públicos. Então, refletimos que devemos prezar pela qualidade ampla desse material didático imprescindível para a Educação Básica brasileira.

Na próxima seção apresentamos os cinco livros mais escolhidos pelos professores das escolas públicas de Boa Vista (RR), conforme o portal do FNDE.

5.1.4 PNLD 2017 – Os Livros Didáticos de Matemática mais Escolhidos pelos Professores das Escolas do Ensino Fundamental de Boa Vista (RR)

Procuramos conhecer os livros mais escolhidos pelos professores de matemática de 40 escolas estaduais de Ensino Fundamental de Boa Vista do Estado de Roraima, lócus desta pesquisa, para verificar se estavam em consonância com a escolha a nível nacional. Dessa forma, estabelecemos o ano de 2010 para o início dessa pesquisa, a partir do Portal do FNDE – distribuição dos livros didáticos para todo o país. Assim, utilizamos a forma de distribuição do PNLD por triênio para identificar as tabelas em que relacionamos os livros que foram escolhidos pelas escolas, sem, contudo, identificar as escolas.

Apresentamos nas tabelas de 25 a 28, as cinco coleções dos livros didáticos de matemática mais escolhidos pelos professores durante quase uma década. O resultado observado nos fez escolher os autores das duas coleções mais apreciadas pelos professores para fazer uma análise em particular, para verificar se os livros de um mesmo autor apresentaram redução dos conteúdos ou alguma outra modificação relevante durante esta última década em que houve tantas mudanças culturais, tecnológicas e educacionais em nosso país.

Tabela 25: Coleções de matemática mais escolhidas pelas escolas estaduais do ensino fundamental de Boa Vista – RR (PNLD 2008)

Escolha dos LDM pelas escolas estaduais de Boa Vista (RR) PNLD/2008 – Triênio: 2008-2009-2010				
	Coleção	Autores	Quantidade de Escolas	%
01	Tudo é Matemática	Luiz Roberto Dante	25	62,5
02	Matemática para todos	Luiz Márcio Pereira Imenes Marcelo Cestari Terra Lellis	03	7,5
03	Matemática e realidade	Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antônio Machado	02	5,0
04	Construindo consciência Matemática	Elizabeth Soares, Jackson da Silva Ribeiro (	02	5,0
05	Matemática na medida certa	José Jakubovic, Marcelo Cestari Terra Lellis, Marília Ramos Centurión	01	2,5

Fonte: FNDE (2008). Elaborada pela autora.

Como podemos observar na Tabela 25, os três livros mais escolhidos pelos professores foram: em primeiro lugar “Tudo é Matemática” de Dante com 62,5%, em

2º lugar, “Matemática para todos” de Imenes e Lellis com 7,5% e em 3º lugar, com 5%, “Matemática e realidade” de Iezzi, Dolce e Machado.

Tabela 26: Coleções de matemática mais escolhidas pelas escolas estaduais do ensino fundamental de Boa Vista – RR (PNLD 2011)

Escolha LDM pelas escolas estaduais de Boa Vista (RR) PNLD/2011 – Triênio: 2011-2012-2013				
	Coleção	Autores	Quantidade de Escolas	%
01	Tudo é Matemática	Luiz Roberto Dante	11	27,5
02	A conquista da matemática	José Ruy Giovanni Jr., Benedicto Castrucci	08	20
03	Matemática e realidade	Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antônio Machado	05	12,5
04	Matemática na medida certa	José Jakubovic, Marcelo Cestari Terra Lellis, Marília Ramos Centurión	04	10
05	Matemática ideias e desafios	Dulce Satiko Onaga e Iracema Mori	04	10

Fonte: FNDE (2011). Elaborada pela autora.

No PNLD/2008 vinte e cinco escolas escolheram a coleção “Tudo é Matemática”, mas neste PNLD/2011, das onze escolas que escolheram esta coleção, somente 08 (oito) escolas permaneceram com ela. Além disso, esses livros continuam sendo os preferidos dos professores de Boa Vista. A segunda coleção mais escolhida, com 20%, foi “A conquista da Matemática”.

Tabela 27: Coleções de matemática mais escolhidas pelas escolas estaduais do ensino fundamental de Boa Vista – RR – PNLD/2014 – Triênio: 2014-2015-2016

Escolha dos LDM pelas Escolas Estaduais de Boa Vista (RR) – PNLD/2014 Triênio: 2014-2015-2016				
	Coleção	Autores	Quantidade de Escolas	%
01	Projeto Teláris Matemática	Luiz Roberto Dante	10	25
02	Matemática Bianchini	Edwaldo Bianchini	08	20
03	Praticando Matemática ER	Álvaro Andrini Maria José Vasconcelos	07	17,5
04	Vontade de Saber Matemática	Joamir Souza e Patrícia Moreno Pataro	04	10
04	Matemática teoria e contexto	Marília Centurión & José Jakubovic	04	10
05	Projeto Velear: Matemática	Antonio Lopes (Bigode)	01	2,5

Fonte: FNDE (2014). Elaborada pela autora.

Das 40 escolas estaduais do Ensino Fundamental Anos Finais de Boa Vista, somente 04 escolas continuaram com as coleções do triênio anterior, com a coleção

“Projeto Teláris de Matemática”. As três coleções mais escolhidas foram as seguintes: 1º lugar: “Projeto Teláris de Matemática”, 2º lugar: Matemática Bianchini e 3º lugar: Praticando Matemática.

Tabela 28: Coleções de matemática mais escolhidas pelas escolas estaduais do ensino fundamental de Boa Vista – RR (PNLD 2017)

Escolha dos LDM pelas Escolas Estaduais de Boa Vista (RR) – PNLD 2017 Triênio: 2017–2018–2019				
	Coleção	Autores	Quantidade de Escolas	%
01	Praticando Matemática ER	Álvaro Andrini Maria José Vasconcelos	07	17,5
02	Projeto Teláris Matemática	Luiz Roberto Dante	06	15
03	Vontade de Saber Matemática	Joamir Souza Patrícia Moreno Pataro	06	15
04	Projeto Araribá Matemática	Editora Moderna (Organização)	05	12,5
05	Matemática Bianchini	Edwaldo Bianchini	04	10

Fonte: FNDE (2017). Elaborada pela autora.

Somente duas escolas continuaram com a mesma coleção “Projeto Teláris de Matemática”, para este PNLD, as duas coleções mais escolhidas pelos professores de Boa Vista (RR) foram: em 1º lugar “Praticando Matemática” e em 2º lugar “Projeto Teláris”.

Nesta seção procuramos mostrar as escolhas dos livros didáticos de matemática pelos professores de Matemática das escolas estaduais públicas de Boa Vista (RR). Observamos que a escolha das três primeiras coleções de matemática pela maioria dos professores no âmbito regional, para o PNLD-2017, coincidiu com a escolha realizada pela maioria dos professores de matemática no âmbito nacional, conforme Tabela 24, seleção informada pelo FNDE.

CAPÍTULO 6

ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA

Neste capítulo e nas próximas seções buscaremos, mediante a análise dos livros didáticos de matemática, verificar a presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade: (múltiplos e divisores; critérios de divisibilidade; números primos; máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum) se ocorreu alguma redução expressiva desses conteúdos nos 27 livros didáticos de matemática do 6º ano do Ensino Fundamental dos Anos Finais (ou equivalentes), selecionados para a análise, mediante as categorias e indicadores para conceituar os LDM, bem como as fichas e tabelas para computação dos dados, elaboradas pela autora.

Faremos dois tipos de análises dos LDM: da estrutura externa do livro e da estrutura interna dos capítulos que tratam dos conteúdos de divisibilidade. Quanto à estrutura externa apresentaremos o título, autor, formato, dimensão do livro, tipo de capa, as informações sobre a edição, editora, informações sobre os capítulos ou unidades em que se encontram os conteúdos de divisibilidade e os títulos dos temas que vem antes e depois do capítulo de divisibilidade.

Quanto à análise da estrutura interna dos livros iremos expor a apresentação pelos autores aos alunos, fazer um recorte do sumário a fim de verificar se constam os conteúdos de divisibilidade e como esses conteúdos estão distribuídos nos capítulos ou unidades. Observaremos a metodologia de introdução dos conteúdos e de alguns aspectos considerados relevantes para a pesquisa. Os conteúdos de divisibilidade estão classificados em conteúdos principais (CP) e conteúdos secundários (CS), de modo a facilitar a computação dos dados na análise dos conteúdos de divisibilidade nos livros.

A seguir apresentaremos as análises dos livros didáticos de matemática organizados em três fases: a Fase 1, trata da análise de cinco livros anteriores à década de 80; a Fase 2 trata da análise de oito livros da década de 80 ao ano de 2010

e, também contempla seis livros do PNLD- 2014 e, por fim a Fase 3, contempla oito livros do PNLD-2017 para o triênio 2017-2018-2019.

6.1 FASE 1 – ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA DA 5ª SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL (OU EQUIVALENTE) DO PERÍODO DE 1926 A 1979

Na primeira seção apresentamos a Fase 1, para a qual selecionamos cinco livros: LDM-1 de Euclides Roxo (1926); LDM-2 de Osvaldo Sangiorgi de 1963; LDM-3 de Osvaldo Sangiorgi de 1968; LDM-4 de Scipione Di Pierro Neto de 1970 e LDM-5 de Lydia Lamparelli et al., de 1974.

Na análise de cada livro selecionado vamos apresentar os dados gerais do livro, um recorte do índice dos conteúdos de divisibilidade e como estes conteúdos estão distribuídos no interior do capítulo e a análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade a partir da ficha de análise e, por fim, a partir dos indicadores qualificaremos os livros.

6.1.1 LDM-1 – Análise do livro de Euclides Roxo de 1926

Euclides Medeiros Guimarães Roxo nasceu em Aracaju, Capital do Estado de Sergipe, em 10 de dezembro de 1890 e faleceu no Rio de Janeiro, no dia 21 de setembro de 1950. Formou-se como Bacharel em Matemática em 1909, pelo Colégio Pedro II, depois se formou em Engenharia pela Escola Politécnica do Rio de Janeiro, em 1916, mas, ainda em 1915 foi aprovado em concurso para professor substituto de Matemática no Colégio Pedro II⁸⁸. Posteriormente, foi nomeado em 1919, catedrático, bem como examinador de Francês, Latim e Matemática nesta mesma instituição de ensino. Tornou-se catedrático do Instituto de Educação através de concurso público.

A seguir, apresentaremos os dados gerais do LDM-1 de Euclides Roxo de 1926, O Programa de Ensino de Matemática da época e contido em seu livro, um

⁸⁸ No Colégio Pedro II, Euclides Roxo foi diretor de 1925 a 1935 e, neste período, precisamente por volta de 1929 a 1931 também foi membro do Conselho diretor da Associação Brasileira de Educação, bem como fez parte da Comissão de Ensino Secundário da mesma associação, assim como foi presidente da Comissão Nacional do Livro didático (OLIVEIRA FILHO, 2013, p. 95).

recorte do índice e como os conteúdos de divisibilidade estão distribuídos no livro, bem como a ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade.

Quadro 30: LDM-1 – Dados gerais do livro “Lições de Arithmetica” de Euclides Medeiros Guimarães Roxo de 1926

LDM-1	De 1926		
Título	Lições de Arithmética - Compêndio oficialmente adoptado no Collegio Pedro		
Autor	EUCLIDES ROXO		
Editora	Livraria Francisco Alves	4ª edição Rio de Janeiro	Ano: 1926
Quantidade de páginas do livro	404	Dimensões da página 16,30 cm por 23,50 cm	
Distribuição do conteúdo:	21 capítulos (não estão numerados)		
Capítulos dedicados a divisibilidade	Divisibilidade (p. 61) Máximo Divisor Comum (p. 83) Mínimo Múltiplo Comum (p.99) Números Primos (p. 107)	(61 – 122) 62 páginas 15,4%	
Capitulo que antecede divisibilidade	Divisão	(47 – 60) 14 páginas	
Capitulo posterior ao de divisibilidade	Frações ordinárias	(123 – 159) 37 páginas	

Fonte: Roxo (1926). Elaborado pela autora.

Apresentamos no Quadro 31 os conteúdos de divisibilidade que estão contemplados no índice e no interior dos capítulos do livro de Euclides Roxo (1926). É importante frisar que ao fazer recortes do livro, conservamos a escrita original.

Quadro 31: LDM-1 – Conteúdos de Divisibilidade no índice e no interior dos Capítulos do Livro de Euclides Roxo (1926)

Conteúdos de divisibilidade no índice e no interior dos capítulos LDM-1 de Euclides Roxo (1926)	
Conforme o Índice	Conteúdos de divisibilidade no interior dos capítulos
Divisibilidade (p. 61)	Capítulo VI – Divisibilidade (p. 61-122) 42. Definição de múltiplo 42. Definição de divisor 43-48. Teoremas gerais sobre divisibilidade Caracteres de divisibilidade 49. Definição de caracteres (p. 68) 50. Teorema 1 – divisibilidade por 10, por 100, por 1000. Caracteres de divisibilidade por 2, 5; 4, 25; 2^m , 5^m . 9 (p. 68) Caracteres de divisibilidade por 9 E por 3 (p. 71) Caracter de divisibilidade por 11 (p. 73) Provas pelos restos (p. 76) Exercícios

Quadro 31: Continuação

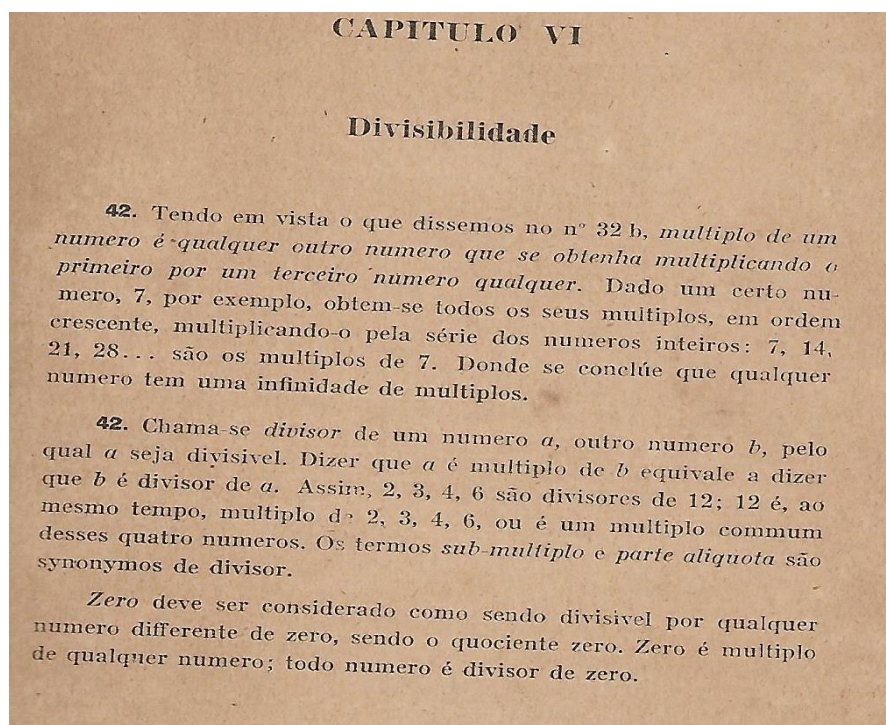
Conteúdos de divisibilidade no índice e no interior dos capítulos LDM-1 de Euclides Roxo (1926)	
Conforme o Índice	Conteúdos de divisibilidade no interior dos capítulos
Máximo divisor comum (p. 83)	Capítulo VII – Máximo divisor comum (p. 83) 59. Definição de MDC e de Números primos entre si. 60. propriedade do MDC 61. Teorema dos divisores comuns Exercícios
Mínimo múltiplo comum (p. 99)	Capítulo VIII – Mínimo múltiplo comum (p. 92) 75. Definição. Teoremas e Regras para cálculo do mmc. Exercícios
Números primos (p. 107)	Capítulo IX – Números primos (p. 107) 83. Definição. 87. Problema I – Reconhecimento dos números primos pelo crivo de Eratóstenes (p. 109) 88. Problema II – Reconhecimento de um número primo pela divisão por primos (p. 110). 89-90. Teoremas de números primos 91. Teorema VI – TFA. 92. Método de decomposição em fatores primos pela divisão sucessiva (p. 113) Aplicações da decomposição em fatores primos 94. Achar todos os divisores de um número pela fatoração sucessiva com números primos (p. 115) 95. Número de divisores (cálculo da quantidade de divisores de um número) (p. 115) 96. Algoritmo para formar todos os divisores de um número (algoritmo da decomposição em fatores primos) (p. 116) 97. Composição do MDC de vários números pela fatoração completa (p. 117) 100. Composição do MMC de vários números – Regra pela decomposição em fatores primos e fatoração completa (p. 118). Exercícios

Fonte: ROXO (1926). Elaborado pela autora.

O livro traz os conteúdos de divisibilidade distribuídos numa sequência numérica, como podemos observar na Imagem 1, e introduz os assuntos a partir de definições e teoremas seguidos das demonstrações. Pela Imagem 1, podemos observar como se escrevia e usava a linguagem matemática, na segunda década do século XX.

Desse modo, temos na imagem 1 as definições de múltiplo e de divisor, iniciando o conteúdo de divisibilidade.

Imagem 1: LDM-1 – Definição de múltiplo e de divisor (ROXO, 1926)



Fonte: Roxo (1926, p. 61)

A seguir apresentamos a análise do LDM-1 da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade (Quadro 32).

Quadro 32: LDM-1 – Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro de Euclides Roxo (1926)

Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade LDM-1 de Euclides Roxo (1926)				
	CONTEÚDOS DE DIVISIBILIDADE	(P)	(A)	T.CD
1	Múltiplos	---	---	---
1.1	Definição de múltiplos de um número	P	--	
1.2	Ideia de "múltiplo de"	P	--	
1.3	Cálculos dos múltiplos (pela multiplicação)	P	--	
1.4	Sequência dos múltiplos de um número	P	--	
	TOTAL CS-1	04	00	04
2	Divisores	---	---	---
2.1	Definição de divisor de um número	P	--	
2.2	Ideia de "divisível por"	P	--	
2.3	Determinação dos divisores pela sequência (divisão ou multiplicação)	P	--	
2.4	Determinação de todos divisores pela DFP (Fatoração completa)	P	--	
2.5	Determinação de todos divisores pela DFP (Algoritmo de Euclides)	P	--	
2.6	Cálculo do Número (quantidade) de divisores	P	--	

Quadro 32 - continuação

	TOTAL CS-2	06	00	06
3	Critério de divisibilidade	---	---	---
3.1	Definição	P	--	
3.2	Divisibilidade por 2	P	--	
3.3	Divisibilidade por 3	P	--	
3.4	Divisibilidade por 4	P	--	
3.5	Divisibilidade por 5	P	--	
3.6	Divisibilidade por 6	-	A	
3.7	Divisibilidade por 7	-	A	
3.8	Divisibilidade por 9	P	--	
3.9	Divisibilidade por 10	P	--	
3.10	Divisibilidade por 11	P	--	
	TOTAL CS-3	08	02	10
4	Números primos	---	--	---
4.1	Definição de Números primos	P	--	
4.2	Definição de Números compostos	-	A	
4.3	Identificação de números primos pelo Crivo de Eratóstenes.	P	--	
4.4	Reconhecimento de um número primo pela divisão por primos	P	--	
	TOTAL CS-4	03	01	04
5	Fatoração Completa – Decomposição em Fatores Primos (DFP)	---	---	---
5.1	Definição de fatoração	P	--	
5.2	Definição de fatoração completa (TFA)	P	--	
5.3	Cálculo dos fatores primos pela multiplicação	P	--	
5.4	Decomposição fatores primos por divisão sucessiva	P	--	
5.5	Aplicação de fatoração no cálculo de raiz quadrada	-	A	
	TOTAL CS-5	04	01	05
6	Máximo Divisor Comum (M.D.C.)	---	---	---
6.1	Definição de Máximo divisor comum	P	--	
6.2	Determinação do mdc pela sequência de divisores	P	--	
6.3	Determinação do mdc pela fatoração completa	P	--	
6.4	Determinação do mdc pela DFP divisão sucessiva e simultânea	P	--	
6.5	Determinação do mdc pelo processo prático de Euclides	P	--	
6.6	Identificação de primos entre si	P	--	
	TOTAL CS-6	06	00	06
7	Mínimo múltiplo comum (M.M.C.)	---	---	---
7.1	Definição de mmc	P	--	
7.2	Identificação do mmc pela sequência dos múltiplos	P	--	
7.3	Determinação do mmc pela DFP em separado ou fatoração completa.	P	--	
7.4	Determinação do mmc pela DFP divisão sucessiva e simultânea	-	A	
7.5	Determinação do mmc pela relação com o mdc	P	--	
	TOTAL CS-7	04	01	05
	TOTAL GERAL	35	05	40

Fonte: Roxo (1926). Elaborada pela autora.

Apresentamos a seguir, a Tabela 29, com o resultado final da análise e o conceito atribuído referente à quantidade dos conteúdos presentes e ausentes no livro analisado.

Tabela 29: LDM-1 – Resultado final quantitativo e qualitativo da presença/ausência dos Conteúdos de Divisibilidade do Livro de Euclides Roxo (1926)

Resultado final quantitativo e qualitativo da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade – LDM-1 de Euclides Roxo (1926)					
Conteúdos Principais			Conteúdos Secundários		Total
CP	CP _P	CP _A	CS _P	CS _A	CD _P
CP1	P	--	04	00	04
CP2	P	--	06	00	06
CP3	P	--	08	02	10
CP4	P	--	03	01	04
CP5	P	--	04	01	05
CP6	P	--	06	00	06
CP7	P	--	04	01	05
Total	07	00	35	05	40
Conceito: Ótimo (ausência inexpressiva dos conteúdos de divisibilidade)					
Legenda: CD _P (Conteúdos de divisibilidade presentes); CP _P (Conteúdos principais presentes); CP _A (Conteúdos principais ausentes); CS _P (Conteúdos secundários presentes); CS _A (Conteúdos secundários ausentes).					

O livro de Euclides Roxo contém todos os conteúdos principais de divisibilidade. O autor introduz os conteúdos com definições, seguido de teoremas e demonstrações. Apresenta a maioria dos principais métodos e processos para a realização dos cálculos que requerem os conteúdos de divisibilidade. Embora não tenha apresentado os critérios do número 6 e 7, apresenta com bastante detalhe e demonstrações os critérios dos demais números relacionados. O livro apresenta poucos cálculos como exemplos e os exercícios propostos são apresentados no final de cada conteúdo.

Observar como os conteúdos de divisibilidade são apresentados neste livro, com a linguagem formal e culta da época, poderia nos levar a refletir para que tipo de estudantes se destinavam, visto que atualmente, nossos estudantes, de anos similares e de idades (talvez similares), não conseguem ter uma aprendizagem satisfatória com livros escritos numa linguagem simples, acessível, clara e objetiva e, livros coloridos cheios de fotografias e ilustrações chamativas.

Dos conteúdos de divisibilidade relacionados para a análise, observamos a ausência dos seguintes conteúdos secundários de divisibilidade nos assuntos:

CP-2 Critérios de divisibilidade: Não apresenta os critérios de divisibilidade do número 6 e do número 7.

CP-3 Números primos: O autor não apresenta a definição de números compostos e nenhuma referência com essa denominação, embora saibamos que os múltiplos são considerados compostos, não há essa explicação.

Pela análise realizada, observamos que a quantidade de ausência dos conteúdos de divisibilidade, equivale a 12,5%, sendo bastante inexpressiva. Desse modo, o livro recebe o conceito “ótimo” pela quantidade dos conteúdos de divisibilidade presentes.

6.1.2 LDM-2 – Análise do Livro Didático de Matemática de Sangiorgi de 1963

Este livro é de muita importância para este trabalho, visto ser um exemplar da época do Movimento da Matemática Moderna, e seu autor, um renomado Professor de Matemática, reconhecido por implementar e divulgar a Matemática Moderna não só em nosso país, mas também no estrangeiro.

Sangiorgi foi o fundador do Grupo de Estudos do Ensino da Matemática – GEEM, em 31 de outubro de 1961. Osvaldo Sangiorgi⁸⁹ (1921-2017) foi professor da Escola de Comunicações e Artes da USP e colaborador especial do NJR, recebeu no dia 14 de dezembro de 2000 o título de Professor Emérito pela Universidade de São Paulo. Licenciado em Física e Doutor em Matemática. Sangiorgi já lecionou, entre outros institutos e universidades do exterior, como por exemplo, na *Kansas University* (EUA), no *Institut Eupen* (Bélgica) e no Instituto de Cibernética de San Marino.

No Quadro 33 apresentamos os dados gerais do LDM-2 de Osvaldo Sangiorgi de 1963 e a seguir faremos uma análise mais aprofundada deste livro.

Quadro 33: LDM-2 – Dados gerais do livro de Sangiorgi (1963)

LDM-2	1963	
Título do livro	MATEMÁTICA 1 – Curso moderno para cursos ginasiais – Volume 1 (Exemplar N° 32387)	
Autor	OSVALDO SANGIORGI	
Ano da publicação	1963	Editora: Companhia Editora Nacional
Dimensões do livro	15 cm por 21,80 cm	Quantidade de página do livro: 327
Distribuição do conteúdo:	04 capítulos (cada capítulo dividido em duas partes).	
Capítulo dedicado a divisibilidade	2 – Parte 2: Divisibilidade	(105 – 160): 56 páginas (17,1%)
Capítulo que antecede divisibilidade	2 – Parte 1: Ideia geral de operação	(47 – 104): 58 páginas
Capítulo posterior ao de divisibilidade	3 Números fracionários	(161 – 239): 79 página

Fonte: Sangiorgi (1963). Elaborado pela autora.

⁸⁹ Osvaldo Sangiorgi nasceu em 09 de maio de 1921, no Estado de São Paulo e faleceu em 07 de julho de 2017.

Este livro apresenta o “Programa para um Curso Moderno de Matemática”, o qual expomos no Quadro 34.

Quadro 34: LDM-2: Programa para um Curso Moderno de Matemática conforme Osvaldo Sangiorgi (1963)

Programa para um Curso Moderno de Matemática (Para os cursos ginasiais)⁹⁰
Os seguintes assuntos, para serem desenvolvidos na Primeira Série dos Ginásios, e distribuídos nos seguintes seis itens: 1. Número natural – sistemas de numeração – bases; 2. Operações (operações inversas) com os números inteiros – propriedades estruturais; 3. Divisibilidade – múltiplos e divisores; números primos; fatoração completa; 4. Números fracionários – operações (operações inversas); propriedades estruturais; 5. Estudo intuitivo das principais figuras geométricas planas e espaciais; 6. Sistemas de medidas; sistema decimal e sistemas não-decimais, estão explicados neste Volume 1, e fazem parte dos vinte e quatro itens que compõem os Assuntos Mínimos para um Moderno Programa de Matemática para os Ginásios, com as respectivas sugestões para seu desenvolvimento, apresentadas pelo Grupo de Estudos do Ensino da Matemática (GEEM), de São Paulo, em trabalho aprovado unanimemente pelo IV Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática (Belém, Pará, julho de 1962), e readaptados no Curso de Treinamento Básico para Professores Secundários (Diretoria do Ensino Secundário do Ministério da Educação e Cultura), realizado em Brasília, de 25 a 30 de novembro de 1963.

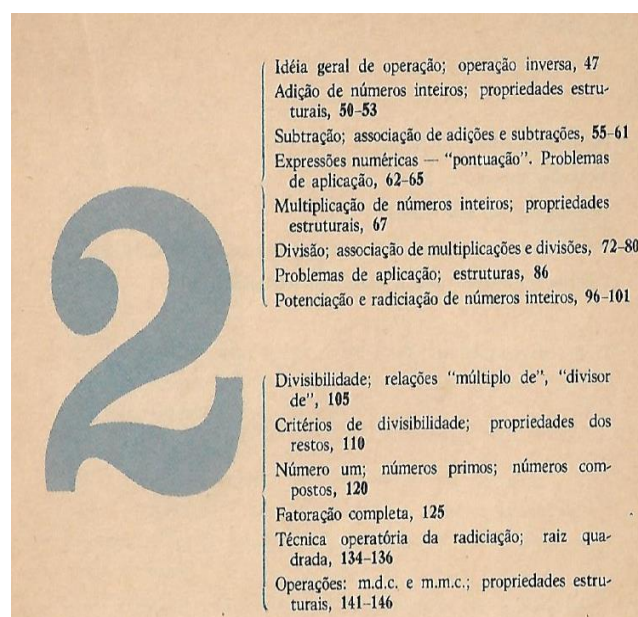
Fonte: Sangiorgi (1963).

Neste livro, Sangiorgi (1963) usa a simbologia e a linguagem da Teoria dos Conjuntos e, como já foi mencionado, este livro é uma referência para o estudo da abordagem metodológica proposta pelo Movimento da Matemática Moderna. Observamos a presença da simbologia e da linguagem da Teoria dos Conjuntos, tais como, o Diagrama de Venn na determinação do conjunto dos múltiplos comuns e dos divisores comuns, usados para determinar tanto o mmc quanto o mmc.

A seguir apresentamos a Imagem 2, do recorte do índice do livro de 1963, em que estão contidos os conteúdos de divisibilidade, bem como o Quadro 35, com os conteúdos de divisibilidade contidos no índice do LDM-2 e como está organizado e distribuído no interior do capítulo.

⁹⁰ Designação genérica do 1º ciclo dos cursos médios, compreendendo os Ginásios, os Ginásios Modernos, os Ginásios Experimentais, os Ginásios Vocacionais, os Ginásios Industriais e os Ginásios Comerciais (SANGIORGI, 1963).

Imagem 2: LDM-2 – Conteúdos de divisibilidade no índice do livro de Sangiorgi de 1963.



Fonte: Sangiorgi (1963).

Quadro 35: LDM-2 – Conteúdos de divisibilidade no índice e no interior do capítulo do livro de Sangiorgi (1963)

Conteúdos de divisibilidade no índice e no interior do capítulo LDM-2 de Osvaldo Sangiorgi (1963)	
Conteúdos de divisibilidade no índice – Parte 2	Conteúdos de divisibilidade no interior do capítulo
• Divisibilidade; relações “múltiplo de”, “divisor de” (p. 105) • Múltiplos e divisores; relações (p.105)	1. Múltiplo e divisores; relações (p. 105) Exercícios de aplicação – Grupo 25 (p. 108) Exercícios de fixação – Grupo 26 (p. 109). Definição de divisor.
• Critérios de divisibilidade; propriedades dos restos (p. 110)	2. Critérios de divisibilidade (p. 110) • Divisibilidade por 2, e por 3 (p. 110) • Divisibilidade por 4, e por 5 (p. 111); • Divisibilidade por 6 • Divisibilidade por 7 (p. 112) • Divisibilidade por 8, por 10; • Divisibilidade por 11 (p. 113) • Divisibilidade por 12 (p. 115) 3. Propriedades elementares do resto. Prova das operações por um divisor (p. 117) Exercícios de fixação – grupo 27
• Número um, números primos e números compostos (p. 120)	4. Número 1; números primos; números compostos (p. 120) 4. Tábua dos números primos – Crivo de Eratóstenes (p. 121) 5. Reconhecimento de um número primo (divisão por números primos) (p. 122). 6. Números primos entre si (p. 124). Exercícios de fixação – Grupo 28.

Quadro 46 – Continuação

Conteúdos de divisibilidade no índice – Parte 2	Conteúdos de divisibilidade no interior do capítulo
• Fatoração completa (p. 125)	Fatoração completa 7. Fatores de um número (p. 125) 8. Fatoração Completa de um número composto (p. 126). 9. Aplicações gerais • Cálculo de todos os divisores de um número pela fatoração completa e pelo algoritmo de Euclides (p.128) • Cálculo de Número de divisores de um número a partir da fatoração completa (p. 129). Pensando em divisores de um número (p. 130) Números amigos e números perfeitos (p. 131). Exercícios de fixação – Grupo 29 (p. 131). Tábua dos números primos menores que 1 000 (p. 132). Quadro – resumo (p. 133) Exercícios de fixação – Grupo 30 (p.139).
• Técnica operatória da radiciação; raiz quadrada (p. 134)	Técnica operatória da radiciação – raiz quadrada aproximada (aplicação da fatoração completa) (pp. 134-139).
• Operações: m.d.c. e m.m.c.; propriedades Estruturais (p. 141)	Operações: m.d.c. e m.m.c. (p. 141) 12. Divisores comuns – intersecção de conjuntos finitos (p. 141) 13. Operação: máximo divisor comum; resultado: maior divisor comum (p. 142) Operação mínimo múltiplo comum 14. Múltiplos comuns: intersecção de conjuntos infinitos (p. 143) 15. Operação: mínimo múltiplo comum; resultado: menor múltiplo comum (p. 144) Exercícios de fixação – Grupo 31 (p. 145) Propriedades Estruturais das Operações m.d.c. e m.m.c. (pp. 146-147) Técnicas de cálculos das operações: m.d.c. e m.m.c.; consequente aplicações I. Operação máximo divisor comum (m.d.c.) (p. 148) 16. Determinação do maior divisor comum por fatoração completa (p. 148) 17. Determinação do maior divisor por divisões sucessivas; disposição prática de Euclides (p. 149) 18. Consequências (p. 150) 19. Aplicações em exercícios diversos (pp. 150-151) Exercícios de fixação – Grupo 33 (p. 151) II. Operação mínimo múltiplo comum (m.m.c.) (p. 152) 20. Determinação do menor múltiplo comum por fatoração completa (p. 152) 21. Determinação do menor múltiplo comum usando relação existente entre as operações m.d.c. e m.m.c. 22. Consequências (p. 154) 23. Aplicações em exercícios diversos (p. 154) Exercícios de fixação – Grupo 34.

Fonte: Sangiorgi (1963). Elaborado pela autora.

Descrição dos conteúdos de divisibilidade do LDM-2 de Osvaldo Sangiorgi de 1963

Observamos que o livro de Sangiorgi de 1963 contempla praticamente a maioria dos conteúdos de divisibilidade relacionados como referenciais para a análise dos livros didáticos de matemática. Desse modo, este livro servirá de referencial para a análise dos demais livros selecionados, por isso o escolhemos para relacionar e expor partes que consideramos importantes de cada um dos conteúdos principais de divisibilidade.

O autor introduz o assunto com a definição de divisibilidade e a ideia de “divisível por” e “múltiplo de”.

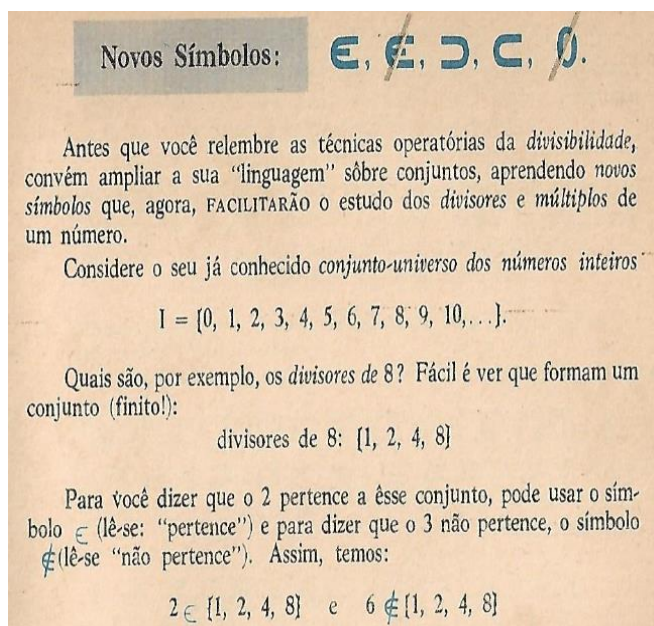
Um número é divisível por outro quando a sua divisão por esse outro é exata. Exemplo: 20 é divisível por 5, pois, $20 : 5 = 4$. (SANGIORGI, 1963, p. 105). Se um número é divisível por outro, se diz também que ele é múltiplo desse outro (que aliás, é uma expressão já estudada por você); o outro passa a ser seu divisor ou submúltiplo. Assim, por exemplo, de: $20 : 5 = 4$ (SANGIORGI, 1963, p. 105).

O livro não apresenta a definição de múltiplo, mas apresenta aspectos relevantes dos múltiplos e divisores.

Múltiplo e divisor sempre andam juntos! Pois, se o primeiro número é múltiplo (ou divisível) do segundo, este é divisor (ou submúltiplo) do primeiro. Este fato permite dizer que no conjunto dos números inteiros a relação “ser divisível por” ou sua inversa “ser divisor de” são relações de ordem, valendo, pois a propriedade transitiva. Exemplo: se 20 é divisível por 10 e 10 é divisível por 5, então 20 é divisível por 5. Outro fato importante que você deve guardar é que: um número tem um conjunto infinito de divisores (SANGIORGI, 1963, p. 106).

Para o estudo de múltiplos e divisores neste livro, o autor, utiliza a linguagem da Teoria dos Conjuntos, e nos mostra como a Matemática Moderna estava presente nos livros didáticos, mesmo porque, Sangiorgi foi um dos professores de matemática que mais incentivou e trabalhou para a implantação do MMM no Brasil. Então este livro é um dos exemplos da aplicação da Matemática Moderna nos livros didáticos de matemática.

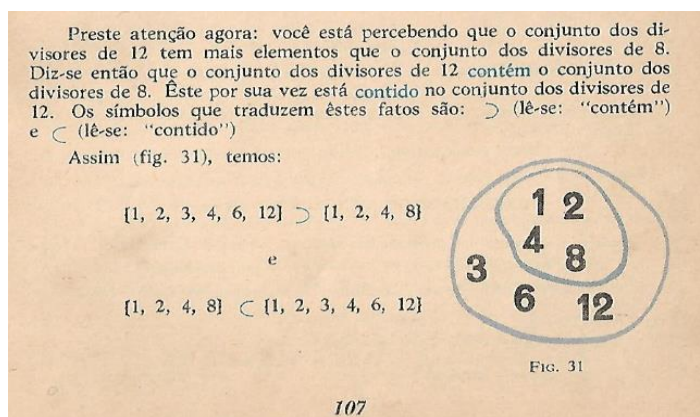
Imagem 3: LDM-2 – Representação de divisores usando a simbologia da Teoria dos Conjuntos, conforme Sangiorgi (1963)



Fonte: Sangiorgi (1963, p. 106)

Quanto aos divisores, o livro não expõe inicialmente os cálculos para encontrar os divisores, mas apresenta a sequência dos divisores de 8. Assim, para representar os divisores, usa o seguinte modo: "divisores de 8: $\{1, 2, 4, 8\}$ ". E, além disso, para representar os divisores comuns de 8 e 12, utiliza-se da simbologia da Teoria dos Conjuntos, usando "contém" e "está contido", bem como o Diagrama de Venn, como podemos ver na Imagem 4.

Imagem 4: Representação dos divisores comuns de dois números usando a simbologia da Teoria dos Conjuntos conforme LDM-2 de Sangiorgi (1963)



Fonte: Sangiorgi (1963, p. 107)

CP-3 Critérios de divisibilidade

O autor apresenta Critérios de divisibilidade como “Técnicas”:

A verificação de que um número é divisível por outro é feita, geralmente, por intermédio da divisão; se o resto for zero, o número será divisível pelo outro. Existem, porém, regras especiais que permitem verificar se um número é divisível ou não por outro, sem efetuar a divisão, bem como determinar o valor do resto, caso contrário. Tais regras constituem os critérios ou caracteres de divisibilidade (SANGIORGI, 1963, p. 110).

Além dos critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 e 12, Sangiorgi apresenta o critério de divisibilidade por 7 (1963, p. 112), conforme veremos a seguir:

6º) DIVISIBILIDADE POR 7: (Critério prático e rápido):

Um número é divisível por 7 quando; separando o primeiro algarismo da direita, multiplicando-o por 2 e subtraindo o produto obtido do que restou à esquerda, e assim sucessivamente, resultar 0 ou 7.

OBSERVAÇÃO: Se o produto do primeiro algarismo da direita por 2 não puder ser subtraído do que restou à esquerda, então trocam-se os termos da diferença.

Exemplos:

1º) 588 é divisível pois 7, pois:

58'8	8 x 2 = 16
<u> - 16 </u>	
4'2	2 x 2 = 4
<u> - 4 </u>	
0	

Sangiorgi também apresenta o critério de divisibilidade por 11 (1963, p. 114):

Um número é divisível por 11 quando a diferença entre as somas dos valores absolutos dos algarismos de ordem ímpar e a dos de ordem par, for divisível por 11. Os algarismos de ordem ímpar são os que ocupam o 1º, 3º, 5º, ... lugares e os de ordem par, o 2º, 4º, 6º, ... lugares, a partir da direita.

Exemplos:

9 5 5 6 8

5º 4º 3º 2º 1º

O número 95568 é divisível por 11, pois, a diferença entre a soma dos algarismos de ordem ímpar ($S_i = 8 + 5 + 9 = 22$) e os de ordem par ($S_p = 6 + 5 = 11$) é $22 - 11 = 11$ (que é divisível por 11).

736 não é divisível por 11, porque:

$S_i = 6 + 7 = 13$	-
$S_p = 3$	= 3

Temos que $13 - 3 = 10$ (não é divisível por 11).

Além dos conteúdos de divisibilidade principais, assim como no livro de Roxo (1926), Sangiorgi (1963, p. 117) trata das propriedades elementares do resto, que podem ser resumidas nas duas que apresentaremos a seguir:

1ª) O resto da divisão de uma soma por um número é igual ao resto da divisão, pelo mesmo número, da soma dos restos das parcelas.

De fato, seja por exemplo a soma: $312 + 415 + 68 = 795$ e procuremos determinar os restos das divisões, por 9, das parcelas e da soma. Obteremos de acordo com o estudado:

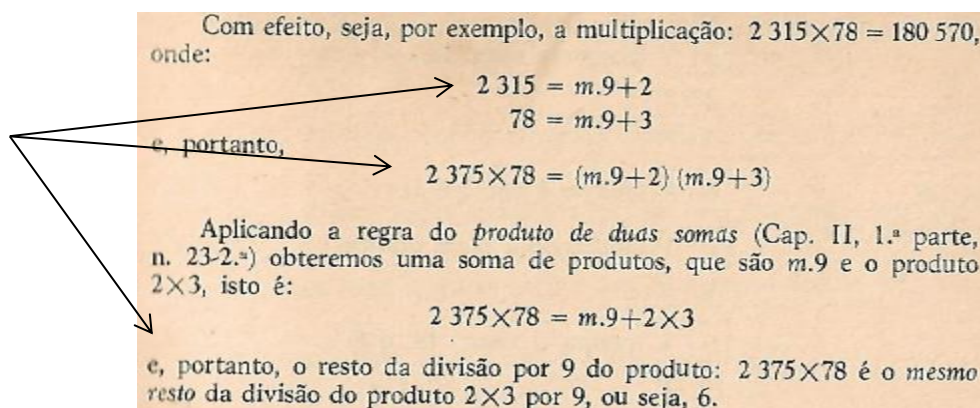
$$\begin{array}{l} 312 = m.9 + (3 + 1 + 2) = m.9 + 6 \\ 415 = m.9 + (4 + 1 + 5) = m.9 + 1 \\ + 68 = m.9 + (6 + 8) = m.9 + 5 \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{somando:} \\ m.9 + (6 + 1 + 5) = m.9 + 3 \end{array} \right\}$$

$$795 \rightarrow m.9 + (7 + 9 + 5) = m.9 + 3$$

2ª) O resto da divisão de um produto por um número é igual ao resto da divisão, pelo mesmo número, do produto dos restos dos fatores.

A seguir, apresentamos a Imagem 5, do exemplo da 2ª propriedades do resto, visto que, provavelmente devido a erro de digitação dos números, o resultado também ficou incorreto.

IMAGEM 5 - LDM-2: 2ª Propriedade do resto da divisão segundo Sangiorgi (1963)



Fonte: Sangiorgi (1963, p. 118).

Como podemos observar, os dois números estão digitados diferentes, quando deveriam ser iguais, isto resultou no erro de cálculo e resultado incorreto.

Desse modo, apresentamos abaixo como seria o cálculo correto da 2ª propriedade, conforme a seguir:

Com efeito, seja, por exemplo, a multiplicação: $2\ 315 \times 78 = 180\ 570$, onde:

$$2\ 315 = m.9 + 2$$

$$78 = m.9 + 6$$

e, portanto,

$$2\ 315 \times 78 = (m.9 + 2)(m.9 + 6)$$

Aplicando a regra do produto de duas somas (Capacidades. II, 1ª parte, n. 23-2.ª) obteremos uma soma de produtos, que são $m.9$ e o produto 2×6 , isto é:

$$2\,315 \times 78 = m \cdot 9 + 2 \times 6 \quad (2 \times 6 = 12 \Rightarrow 1 + 2 = 3)$$

Logo, $m \cdot 9 + 3$

e, portanto, o resto da divisão por 9 do produto: $2\,315 \times 78$ é o mesmo resto da divisão do produto 2×6 por 9, ou seja, 3.

CP-4 Números primos

Sangiorgi (1963) inicia o assunto conforme abaixo:

4. Número 1; números primos; números composto

Você já percebeu que o número 1 tem uma posição privilegiada na divisibilidade, pois como é divisor de qualquer número ou, em outras palavras, qualquer número é divisível por 1.

Sangiorgi (1963) apresenta os divisores do número 2 ao 9 enfatizando os números que tem só dois divisores. Faz a diferenciação dos números que têm mais de dois divisores que são chamados compostos. Na continuidade apresenta as definições de primos e compostos.

Número primo é o número (diferente de 1) que possui somente dois divisores: 1 e ele mesmo. Número composto é o número que possui mais de dois divisores (SANGIORGI, 1963, p. 121).

Para reconhecimento dos números primos Sangiorgi utiliza primeiro o crivo de Eratóstenes e inicia conforme a seguir:

4. Tábua dos números primos

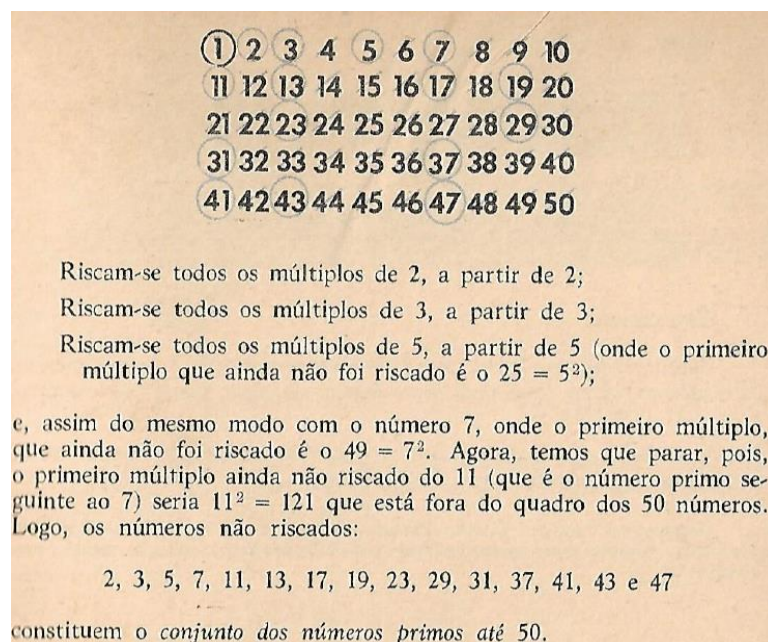
Quantos números primos existem? Você já conhece os primeiros: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ... que iniciam a sucessão dos números primos e que você percebe ser um conjunto infinito, pois é sempre possível encontrar novos números primos.

Nessas condições constroem-se tábuas, onde são registrados, ordenadamente, todos os números primos menores que um certo número prefixado.

Aliás, esse costume vem da antiguidade, pois a primeira tábua conhecida e que recebeu o nome de crivo de Eratóstenes (por se assemelhar a um peneiro quando eram furados os números compostos dispostos em ordem), deve-se a Eratóstenes, insigne matemática grego, que viveu antes de Cristo.

Apliquemos o processo do Crivo de Eratóstenes na construção de uma tábua dos números primos até 50. Veja como é fácil (SANGIORGI, 1963, p. 121).

Imagem 6: LDM-2 – Processo do crivo de Eratóstenes conforme Sangiorgi (1963)



Fonte: Sangiorgi (1963, p. 122).

Sangiorgi (1963) apresenta como reconhecer se um número é primo.

5. Reconhecimento de um número primo

Outro processo para reconhecer se um número é primo ou não, é usar a própria sucessão dos números primos e os critérios de divisibilidade, mediante a seguinte Regra:

Divide-se o número dado, sucessivamente pelos números primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ..., até encontrar um quociente menor ou igual ao divisor. Se nenhuma dessas divisões for exata o número dado é primo (SANGIORGI, 1963, p. 122).

Ainda em “números primos”, Sangiorgi apresenta “números primos entre si”. A maioria dos livros didáticos de matemática atuais mencionam os números primos entre si no final do assunto de mdc.

6. Números primos entre si

Quando dois ou mais números admitem somente o 1 como divisor comum eles são chamados de PRIMOS ENTRE SI.

Exemplos: 12 e 7, cujo divisor comum é o 1, são primos entre si;
 5, 10 e 14, também são primos entre si, pois o único divisor comum, que é de todos ao mesmo tempo, é o 1 (SANGIORGI, 1963, p. 122).

Dando continuidade aos conteúdos de divisibilidade, vem o capítulo de fatoração completa, iniciando pelo item:

7. Fatores de um número – A palavra *fator*, por demais usada em Matemática, está associada à ideia de multiplicação (SANGIORGI, 1963, p. 125).

Observe, agora, com atenção que:

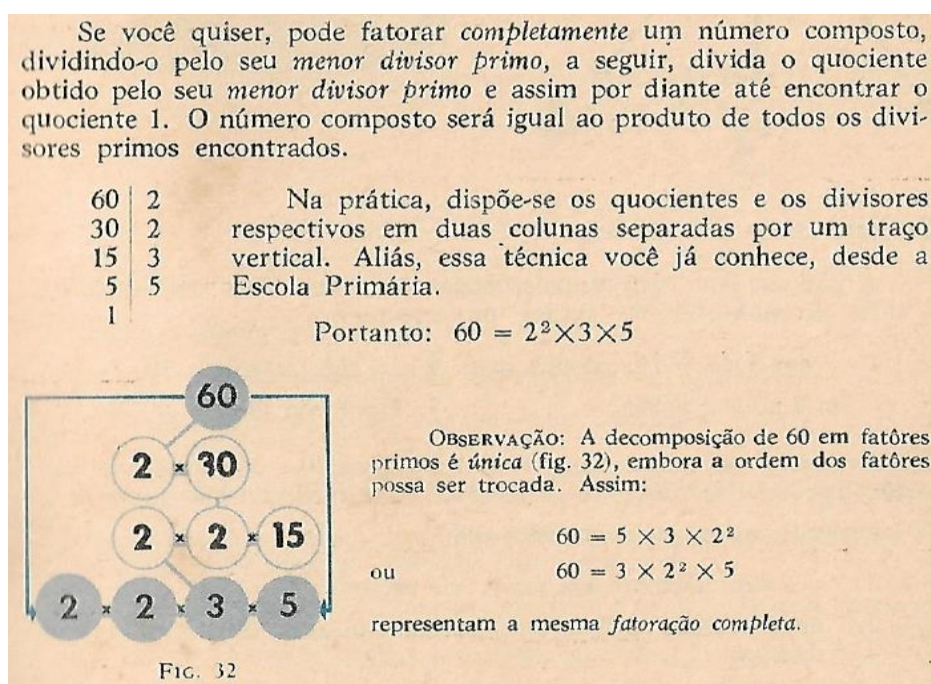
1º) o 1 tem somente um fator: ele mesmo;

2º) cada número primo tem exatamente dois fatores: o 1 e ele mesmo.

8. Fatoração Completa⁹¹ de um número composto – Todo número composto pode ser fatorado de uma maneira única num produto de fatores primos. Assim, por exemplo, o número 60, que é composto, é igual ao produto: $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ (SANGIORGI, 1963, p. 125).

Sangiorgi também apresenta a decomposição em fatores primos pela divisão sucessiva com traço vertical e faz uma observação importante, enfatizando o TFA. Na Imagem 7, apresentamos os processo desse tipo de decomposição em fatores primos.

Imagem 7: LDM-2 – Decomposição em fatores primos pela divisão sucessiva conforme Sangiorgi (1963)



Fonte: Sangiorgi (1963, p. 126).

Sangiorgi apresenta no item (9) Aplicações gerais, como verificar a divisibilidade por meio de algumas regras, conforme expomos a seguir:

⁹¹ Sangiorgi (1963, p. 125) apresenta a definição do Teorema Fundamental da Aritmética (TFA) sem mencioná-lo.

9. Aplicações gerais.

1ª) Divisibilidade de um número por outro, mediante seus fatores primos. – Você pode, agora, reconhecer se um número é divisível por outro, com o seguinte critério.

“decompostos dois números em seus fatores primos o primeiro é divisível pelo segundo se contiver, pelo menos, os fatores primos do segundo com expoentes iguais ou maiores”.

Exemplo: Verificar se 504 é divisível por 36.

Temos: $504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$

$36 = 2^2 \times 3^2$

Como 504 contém todos os fatores primos de 36 (com expoentes iguais ou maiores) segue-se que 504 é divisível por 36 (SANGIORGI, 1963, 127).

Traz como observação, uma aplicação da fatoração completa e números primos entre si para verificar a divisibilidade de dois números:

Levado em conta que os fatores primos da fatoração completa são primos entre si, pode-se agora justificar alguns critérios de divisibilidade enunciados (por 6 e por 12) dizendo: *um número divisível por dois números primos entre si é também divisível pelo produto deles*. Assim:

Um número divisível por 2 e por 3 o é por 6 (critério por 6)

Um número divisível por 3 e por 4 o é por 12 (critério por 12)

Um número divisível por 2 e por 7 o é por 14 (critério por 14)

Um número divisível por 3 e por 5 o é por 15 (critério por 15) etc.
(SANGIORGI, 1963, 127).

Ainda em aplicação gerais, Sangiorgi apresenta o método para se obter todos os divisores de um número, conforme podemos observar a seguir:

2ª) determinação de todos os divisores de um número. – A decomposição de um número em seus fatores primos (fatoração completa) permite que se conhecesse alguns de seus divisores. Assim, o número 60 que, decomposto em seus fatores primos, apresentou como divisores somente os números primos: 2, 3 e 5 e o número 1, admite outros divisores, tais como: 4, 6, 10, 12, 15, 20, 30 e 60.

Vamos procurar determiná-los, lembrando o seguinte fato importante: *os divisores de um número constituem um conjunto finito, pois devem ser menores que o número dado, sendo o maior deles o próprio número* (SANGIORGI, 1963, p. 127).

Sangiorgi (1963, p. 128) apresenta primeiro o método de determinação dos divisores de um número a partir da fatoração completa, conforme descreveremos a seguir:

Nessas condições, como: $60 = 2^2 \times 3^1 \times 5^1$

é natural que os divisores de 60 serão todos os números que contiverem apenas os fatores 2, 3, e 5 com *expoentes menores ou iguais* aos que figuram na fatoração completa de 60. Logo, os divisores de 60 aparecerão a partir dos fatores:

$2^0, 2^1, 2^2$ (com expoentes menores ou iguais ao de 2^2)

$3^0, 3^1$ (com expoentes menores ou iguais ao de 3^1)

$5^0, 5^1$ (com expoentes menores ou iguais ao de 5^1)

ou

1ª linha: 1, 2, 4 (lembre-se que $2^0 = 1$)

2ª linha: 1, 3

3ª linha: 1, 5

Quando multiplicamos cada número que figura na 1ª linha por todos os números das demais linhas, depois cada número da 2ª linha por todos os números da 3ª linha e, finalmente, cada número da 1ª linha por todos os

(1 da 2ª X 1ª linha): 1 2 4

(3 da 2ª X 1ª linha): 3 6 12

(5 da 3ª X 1ª linha): 5 10 20

(5 da 3ª X 2ª linha): 5 15

(5 (3ª) X 3 (2ª) X 2 (1ª)): 30

(5 (3ª) X 3 (2ª) X 4 (1ª)): 60

O segundo método, pela divisão sucessiva com traço vertical, também chamado de algoritmo de Euclides⁹², será exposto na Imagem 8.

Imagem 8: LDM-2 – Método de determinação de todos os divisores de um número segundo Sangiorgi (1963)

Êsses produtos podem ser efetuados e distribuídos, mais facilmente, com a seguinte disposição prática:

60	2	2	1
30	2	4	
15	3	3 - 6 - 12	
5	5	5 - 10 - 20 - 15 - 30 - 60	
1			

Faz-se um traço vertical à direita dos fatores da decomposição completa de 60 e escreve-se 1 um pouco acima do 1.º fator primo (2). Os divisores serão obtidos, a partir de 1, multiplicando cada um dos fatores primos (que estão à esquerda do traço) pelos números que vem à direita do traço, e situados acima dele. Os divisores obtidos mais de uma vez não são repetidos.

e, portanto, o conjunto de divisores de 60 é:

[1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 e 60]

Fonte: Sangiorgi (1963, p. 258).

⁹² Embora Sangiorgi tenha exposto este método, não o denominou e nem o referenciou como método conhecido por algoritmo de Euclides, apenas se referiu como “disposição prática” (SANGIORGI, 1963, p. 128).

Sangiorgi (1963, p. 129) também apresenta o método para calcular a quantidade de números de divisores de um número sem que se calcule todos os seus divisores.

3º Número de divisores de um número. – Mesmo não se conhecendo todos os divisores de um número, você pode determinar o número (total) deles, com a seguinte regra, facilmente justificável:

“o número (total) de divisores de um número é obtido somando 1 a cada expoente de seus fatores primos (na fatoração completa) multiplicando os resultados encontrados”.

Exemplo: Determinar o número de divisores de 60:

Como: $60 = 2^2 \times 3^1 \times 5^1$

Temos os expoentes são: 2 1 1

aumentado 1: 3 2 2

e o produto: $3 \times 2 \times 2 = 12$

dá o número (total) de divisores de 60 (já conhecido em exemplos).

Sangiorgi justifica⁹³ a regra aplicada, da seguinte maneira:

“decorre do fato de que o aumento do expoente de cada fator primo, de uma unidade, corresponde aos fatores de expoente zero (2^0 , por exemplo) que participam do cálculo dos divisores de um número. A multiplicação dos resultados encontrados representará o total de divisores procurados”.

Quanto aos cálculos sobre divisores, além das regras para se conhecer todos os divisores e a quantidade que cada número natural tem de divisores, Sangiorgi também apresenta, como observação, uma forma de se saber como encontrar números com determinada quantidade de divisores⁹⁴.

OBSERVAÇÃO: Podemos, reciprocamente, determinar números *que tenham um dado número de divisores*. Seja, por exemplo, determinar um número que tenha 45 divisores.

Você vai notar que muitos números respondem à questão.

Decompondo o 45 em seus fatores primos (fatoração completa), temos:

45 =	$3^2 \times 5$	
ou	$45 = 3 \times 3 \times 5$	
ou	$45 = (2 + 1) \times (2 + 1) \times (4 + 1)$	
	$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$	
então os números	2 2 4	

⁹³ Nem sempre encontramos essa justificativa nos livros didáticos que apresenta esta regra.

⁹⁴ Essa informação, como professora de matemática e pesquisadora ainda não havia visto em nenhum outro livro sobre teoria dos números ou que trate de divisibilidade de forma tão simples, pois, nenhum livro que eu tenha analisado da Educação Básica traz a questão de como encontrar, por exemplos números de 10 divisores num determinado intervalo de números. Na minha monografia de Trabalho de Conclusão de Curso da graduação em Licenciatura em Matemática (UERR, 2009), intitulada “Método alternativo de identificar números primos em qualquer intervalo dado” faço este tipo de abordagem.

representam os expoentes de três *fatores primos quaisquer diferentes*, cujos produtos dão os mesmos números que possuem 45 divisores.

Logo, você pode escolher uma *porção de números* que tenham 45 divisores.

Escolhendo, por exemplo, os três fatores: 2, 3 e 5, vem:

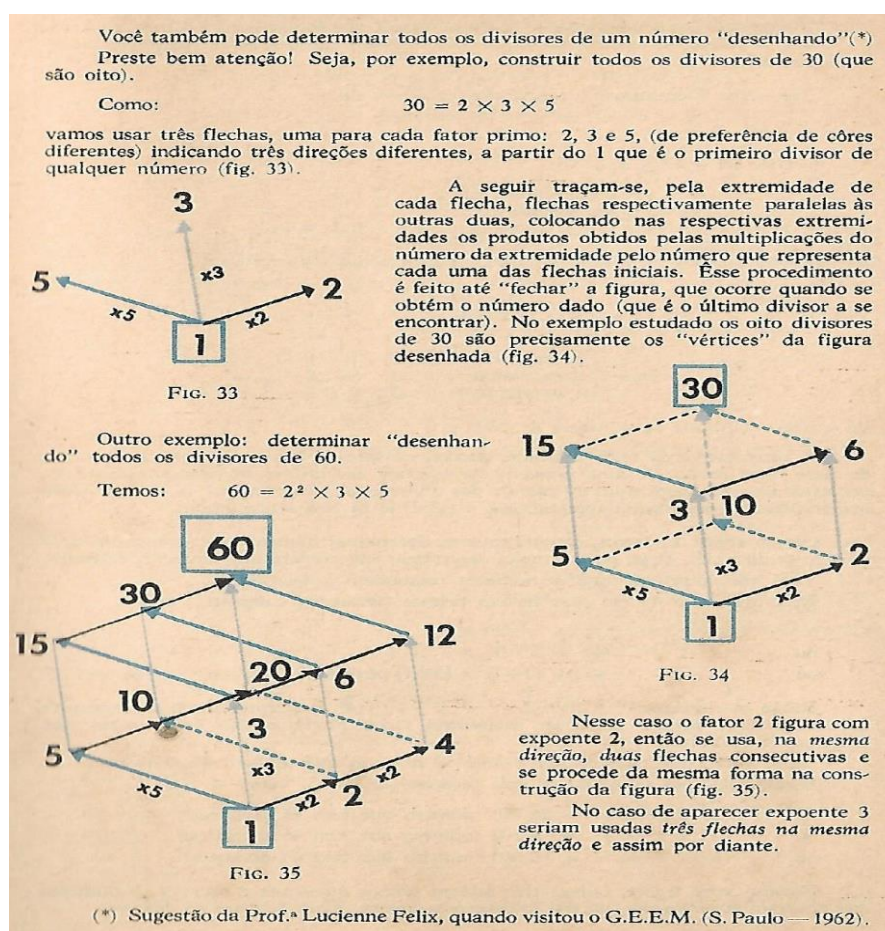
$$2^2 \times 3^2 \times 5^4 = 22\,500 \text{ (número que tem 45 divisores)}$$

$$\text{ou } 2^2 \times 3^4 \times 5^2 = 8\,100 \text{ (número que tem 45 divisores)}$$

$$\text{ou } 2^4 \times 3^2 \times 5^2 = 3\,600 \text{ (número que tem 45 divisores)}.$$

Para finalizar, vamos apresentar a Imagem 9, de outro método que Sangiorgi (1963, p. 130) se utilizou para achar os divisores de um número “desenhando”⁹⁵.

Imagem 9: LDM-2 – Determinação dos divisores “desenhando”



Fonte: Sangiorgi (1963, p. 130).

Resolvemos apresentar esse método, porque encontramos método similar em alguns livros atuais, que deixaram de expor o método de calcular todos os divisores

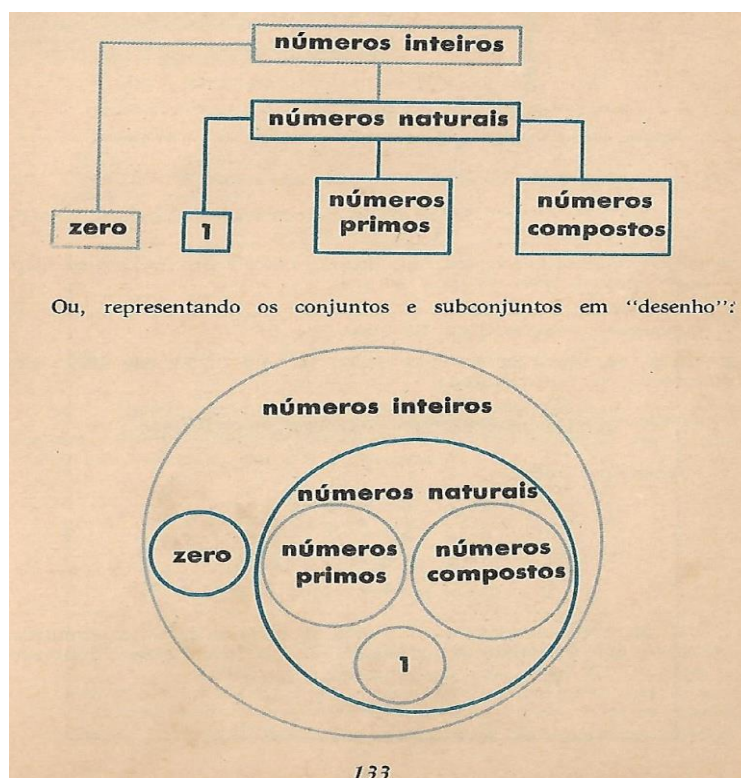
⁹⁵ Segundo Sangiorgi (1963, p. 130) foi sugestão da Professora Lucienne Felix, quando visitou o G.E.E.M (S. Paulo – 1962).

de um número pelo algoritmo de Euclides e apresentam apenas este modelo, conforme Imagem 9, acima:

Sangiorgi ao finalizar o capítulo de números primos apresenta um esquema como Quadro-resumo. Achamos conveniente⁹⁶ expor este esquema (Imagem 10) mesmo porque, ao longo da pesquisa, de acordo com os livros analisados, observamos que uma das informações dos conteúdos de divisibilidade que se perdeu foi a definição ou referência aos números compostos.

Neste capítulo todo o estudo que você fez foi no conjunto dos números inteiros e alguns subconjuntos (que são conjuntos “contidos” no conjunto dos números inteiros), todos importantes e que figuram no “esquema” abaixo: (Sangiorgi, 1963, 133).

Imagem 10: LDM-2 – Representação dos conjuntos numéricos por Sangiorgi (1963)



Fonte: Sangiorgi (1963, p. 133).

⁹⁶ Observamos que no livro de Sangiorgi de 1968 também analisado, ele já não usa a linguagem e nem a simbologia da Teoria dos Conjuntos, embora continue com o mesmo título no livro e apresente um esquema parecido, com a diferença que não menciona números inteiro, trata somente de números naturais (1968, p. 175).

Sangiorgi apresenta a “técnica operatória da radiciação – raiz quadrada aproximada” como aplicação da fatoração completa⁹⁷.

A raiz exata correspondente a uma potência, pode ser determinada, usando-se a decomposição de um número em *seus fatores primos* (fatoração completa). De fato, seja por exemplo a igualdade:

$$\sqrt{144} = 12$$

Fatorando, completamente, os números 144 e 12, temos (sendo $144 = 2^4 \times 3^2$ e $12 = 2^2 \times 3^1$) ainda a igualdade:

$$\sqrt{2^4 \times 3^2} = 2^2 \times 3^1$$

O que você está observando agora? É fácil ver que os fatores primos de 144 e 12 são os MESMOS. Note mais: os expoentes (2 e 1) que figuram nos fatores da raiz, podem ser obtidos dividindo por 2 (que é o índice do radical, por se tratar de raiz quadrada), os expoentes (4 e 2) dos fatores do radicando. Logo, para se extrair a raiz quadrada de um número quadrado pode-se:

- 1º) fatorar completamente o número dado;
- 2º) dividir por 2 todos os expoentes dos fatores primos;
- 3º) multiplicar os resultados obtidos (SANGIORGI, 1963, p. 135).

Imagem 11: LDM-2 – Processo de calcular a raiz quadrada de um número pela fatoração completa segundo Sangiorgi (1963)

Assim, por exemplo, para extrair a raiz quadrada de 144 (que é um quadrado), procedemos:

$$\begin{array}{l}
 1^\circ) \quad 144 = 2^4 \times 3^2 \\
 2^\circ) \quad \sqrt{144} = \sqrt{2^4 \times 3^2} = 2^2 \times 3^1 \\
 3^\circ) \quad \sqrt{144} = \boxed{12}
 \end{array}$$

Logo:

$$\sqrt{144} = \sqrt{2^4 \times 3^2} = 2^2 \times 3^1 = 4 \times 3 = \boxed{12}$$

Fonte: Sangiorgi (1963, p. 135).

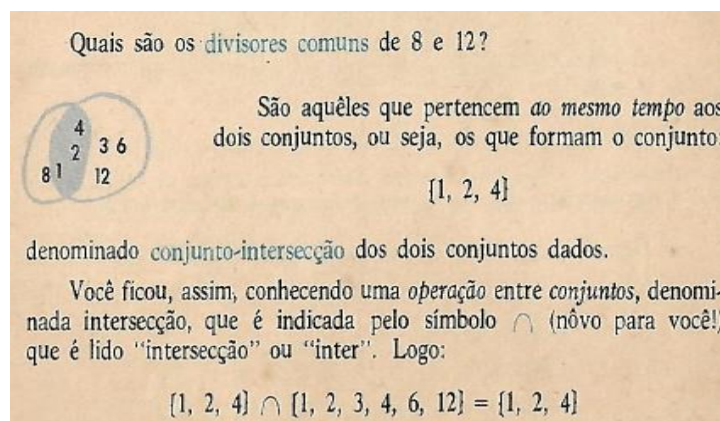
Na continuidade dos conteúdos de divisibilidade, Sangiorgi apresenta o Capítulo “Operações: m.d.c. e m.m.c. Os conteúdos principais de divisibilidade estão identificados conforme a ordem que estipulamos, mas os conteúdos estão sendo apresentados na ordem contida no livro.

CP-7 M.D.C. – Operação máximo divisor comum (p. 141)

⁹⁷ Resolvemos apresentar esta aplicação da fatoração completa, devido ter observado nos livros atuais, analisados neste estudo, a ausência deste assunto nos conteúdos de divisibilidade.

O autor inicia com o item “**12. divisores comuns**” apresentando os divisores de 8 e 12 e através da representação da simbologia dos conjuntos, os divisores comuns de 8 e 12, na Imagem 22:

Imagem 12: LDM-2 – Divisores comuns usando a simbologia da Teoria dos Conjuntos conforme Sangiorgi (1963)



Fonte: Sangiorgi (1963, p. 141).

Sangiorgi denomina M.D.C., e faz uma observação importante

A operação que permite determinar o maior divisor comum de dois (ou mais) números é denominada máximo divisor comum. Indicação: **m.d.c.**
 $(8, 12) = 4$ ou $8 \text{ D } 12 = 4$.

Erro comum: Confundir máximo divisor comum, que é uma OPERAÇÃO, com maior divisor comum, que é o RESULTADO da operação (SANGIORGI, 1963, 141).

Antes de apresentar os cálculos para determinação do M.D.C., Sangiorgi apresenta a definição do m.m.c.

CP-6 M.M.C – Operação: Mínimo múltiplo comum – resultado menor múltiplo comum.

O nome já está “dizendo”: **o menor dos múltiplos comuns de dois ou mais números é denominado MENOR MÚLTIPLO COMUM dos números 4 e 6 é o 12** (o menor elemento do conjunto-intersecção).

“A operação que permite determinar o menor múltiplo comum de dois (ou mais) números é denominada mínimo múltiplo comum”. Indicação: **m.m.c.** $(4, 6) = 12$ ou $4 \text{ M } 6 = 12$.

Sangiorgi (1963, 144) lembra ao aluno: “Como você está observando, o conjunto dos múltiplos comuns de dois números é infinito, isto é, vai crescendo cada vez mais. Daí, o fato de não existir “o maior múltiplo comum”; existe, porém o menor múltiplo comum”.

Este comentário é importante, pois observamos que os alunos das séries posteriores e até mesmo no ensino superior não sabem fazer essa dedução, então supomos que não foram levados a observar esse fato quando estudaram os múltiplos no sexto ano.

No item “Propriedades Estruturais das Operações m.d.c. e m.m.c.” Sangiorgi apresenta as técnicas de determinação do m.d.c. e do m.m.c., assim, como o próprio autor enuncia: “No caso das operações m.d.c. e m.m.c., essas técnicas (baseadas na decomposição em fatores primos), conhecidas desde a Escola Primária, serão reestudadas a seguir”.

Além disso, apresenta as propriedades estruturais para o m.d.c. e o m.m.c.: fechamento, comutativa, elemento neutro, associativa e distributiva, válidas e já estudadas na adição, multiplicação, etc. e, somente após, apresenta as técnicas de cálculo das operações. No caso da determinação do maior divisor comum, Sangiorgi (1963, p. 148) apresenta dois métodos: pela fatoração completa

16. Determinação do maior divisor comum por fatoração completa

1º) decompõem-se os números em seus fatores primos (fatoração completa);
2º) Multiplicam-se os fatores primos comuns tomados com seus menores expoentes; o produto deles é o maior divisor comum.

Exemplo:

1. efetuar o m.d.c. (18, 24, 30)

Como:

$$\left. \begin{array}{l} 18 = 2^1 \times 3^2 \\ 24 = 2^3 \times 3^1 \\ 30 = 2^1 \times 3^1 \times 5 \end{array} \right\} \rightarrow \text{fatores primos comuns (2 e 3) com os menores expoentes } 2_1 \text{ e } 3^1$$

Logo: m.d.c. (18, 24, 30) = $2^1 \times 3^1 = 6$

e, pela disposição prática de Euclides, conforme processo explicado a seguir na Imagem 13, segundo Sangiorgi (1963):

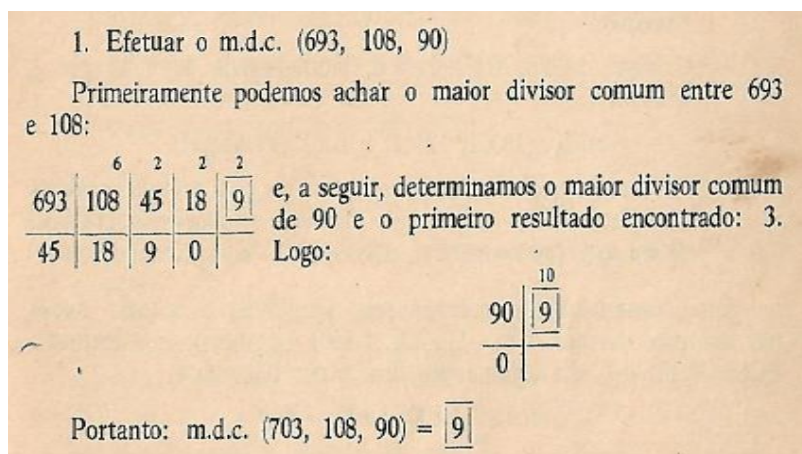
17. Determinação do maior divisor comum por divisão sucessivas; disposição prática de Euclides

Pode-se, também, determinar o m.d.c. de dois números, dividindo-se o maior pelo menor; se a divisão for exata o maior divisor comum será o menor deles. Se a divisão não for exata, divide-se o menor pelo resto e assim sucessivamente. O último divisor será o maior divisor comum.

Esse é o processo que você conhece desde o Curso Primário, não é?

Essas divisões você as fazia, usando um dispositivo prático atribuído a Euclides, que foi um dos mais notáveis matemáticos gregos da antiguidade (SANGIORGI, 1963, p. 149).

Imagem 13: LDM-2 – Processo prático de Euclides para determinação do M.D.C. segundo Sangiorgi (1963)



Fonte: Sangiorgi (1963, 149).

Quanto à determinação do menor múltiplo comum, Sangiorgi apresenta dois métodos: pela fatoração completa e pela divisão sucessiva simultânea

20. Determinação do menor múltiplo comum por fatoração completa

1º) decompõem-se os números em seus fatores primos (fatoração completa);
 2º) Multiplicam-se os fatores primos (comuns e não-comuns) considerados cada um com seu maior expoente; o produto deles é o menor múltiplo comum. Essa regra é rapidamente justificada, desde que você lembre o seguinte fato: um número para ser múltiplo comum de outros deve possuir, pelo menos, os fatores desses outros. Exemplo:

1. efetuar o m.m.c. (4, 6, 8)

Como:

$$4 = 2^2$$

$$6 = 2^1 \times 3^1$$

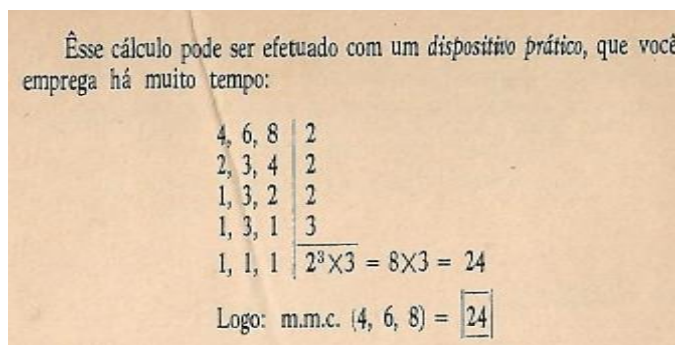
$$8 = 2^3$$

→ fatores primos comuns (maiores expoentes): 2^3
 → fatores primos não-comuns (maiores expoentes): 3^1

Logo: m.d.c. (4, 6, 8) = $2^3 \times 3^1 = 8 \times 3 = 24$. (SANGIORGI, 1963, p. 152).

Ademais, Sangiorgi apresenta a decomposição sucessiva simultânea com o traço vertical para completar o processo descrito acima, conforme Imagem 14.

Imagem 14: LDM-2 – Determinação do M.M.C., pela decomposição em fatores primos, divisão sucessiva e simultânea, segundo Sangiorgi (1963)



Fonte: Sangiorgi (1963, p. 153).

Além desse método, Sangiorgi (1963, pp. 153-154) apresenta outros métodos de determinar o menor múltiplo comum, conforme veremos a seguir:

21. Determinação do menor múltiplo comum usando relação existente entre as operações m.d.c. e m.m.c.

Outra técnica de cálculo que serve para a determinação do menor múltiplo comum de dois números é a que decorre da seguinte relação: “O produto de dois números é igual ao produto do seu maior divisor comum pelo seu menor múltiplo comum”.

De fato, sejam por exemplo, os números: 12 e 15, onde

$$12 = 2^2 \times 3^1 \quad 15 = 3^1 \times 5^1$$

$$\text{Como: m.d.c. (12, 15)} = 3^1$$

$$\text{m.m.c. (12, 15)} = 2^2 \times 3^1 \times 5^1$$

$$\text{e o produto: } 12 \times 15 = (2^2 \times 3^1) \times (3^1 \times 5^1) = 3^1 \times (2^2 \times 3^1 \times 5^1)$$

maior divisor comum

menor múltiplo comum

$$\text{temos que: m.d.c. (12, 15) X m.m.c. (12, 15) = 12 X 15}$$

$$\text{relação que permite concluir m.m.c. (12, 15) = (12 x 15) : m.d.c. (12, 15)}$$

exemplo: Determinar o menor múltiplo comum de 12 e 15, por intermédio da operação m.d.c. (12, 15).

Temos: Sendo o m.d.c. (12, 15) = 3 e o produto: $12 \times 15 = 180$, vem:

$$\text{m.m.c. (12, 15) = } 180 : 3 = 60.$$

Além dessas técnicas para determinar o m.m.c. de dois ou mais números, Sangiorgi (1963, p. 154) apresenta mais dois processos que chama de “consequência” conforme podemos ver a seguir:

22. Consequências

1ª) O menor múltiplo comum de dois números, em que o maior é divisível pelo menor, é o MAIOR. Exemplo:

$$\text{m.m.c. (8, 4) = 8 (o que é evidente, pois o maior é o primeiro múltiplo comum)}$$

2ª) O menor múltiplo comum de dois números primos entre si é o produto deles. Exemplo: m.m.c. (4, 5) = 20 (bem natural, pois, o produto de dois números primos entre si é o primeiro múltiplo comum deles).

Procuramos apresentar os pontos mais relevantes de cada conteúdo principal de divisibilidade com os processos de cálculos que foram apresentados por Sangiorgi neste livro. São praticamente os mesmos conteúdos apresentados no livro de Euclides Roxo (1926). Este livro servirá de referência para verificarmos a presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade nos demais livros das épocas posteriores.

O autor introduz os assuntos com explicações e exemplos. Inicia com a ideia de divisibilidade, ou seja, de “divisível por” e “múltiplo de”. Não expõe as definições de múltiplos e divisores, mas apresenta propriedades de divisibilidade, propriedades elementares do resto; diferencia operação de maximização e de minimização da determinação de mdc e do mmc, bem como apresenta as propriedades dessas operações e os algoritmos para a sua determinação. Apresenta a definição de números primos entre si e as relações dos números primos entre si para a determinação do mdc e mmc.

O livro apresenta todos os critérios de divisibilidade relacionados. As definições de números primos e compostos, bem como os algoritmos para identificar os números primos e os vários métodos de decomposição em fatores primos, não apresenta a definição de fatorar um número, mas expõe a definição de fatoração completa (TFA).

Quanto à ordem de apresentação dos conteúdos de divisibilidade o livro está organizado da seguinte forma: 1º Múltiplos; 2º Divisores; 3º Critérios de divisibilidade; 4º Números primos e números compostos; 5º Fatoração (decomposição em fatores primos); 6º Máximo divisor comum e; 7º Mínimo múltiplo comum.

A seguir apresentamos a ficha de análise do LDM-2 da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade (Quadro 36).

Quadro 36: LDM-2 – Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro de Osvaldo Sangiorgi (1963)

Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade LDM-2 de Osvaldo Sangiorgi (1963)				
	CONTEÚDOS DE DIVISIBILIDADE	(P)	(A)	T.CD
1	Múltiplos	---	---	---
1.1	Definição de múltiplos de um número	--	A	
1.2	Ideia de “múltiplo de”	P	-	
1.3	Cálculos dos múltiplos (pela multiplicação)	A	A	
1.4	Sequência dos múltiplos de um número	P	-	
	TOTAL CS-1	03	01	04

Quadro 36: Continuação.

Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade LDM-2 de Osvaldo Sangiorgi (1963)				
	CONTEÚDOS DE DIVISIBILIDADE	(P)	(A)	T.CD
2	Divisores	---	---	---
2.1	Definição de divisor de um número	P	-	
2.2	Ideia de “divisível por”	P	-	
2.3	Determinação dos divisores pela sequência (divisão ou multiplicação)	P	-	
2.4	Determinação de todos divisores pela DFP (Fatoração completa)	P	-	
2.5	Determinação de todos divisores pela DFP (Algoritmo de Euclides)	P	-	
2.6	Cálculo do Número (quantidade) de divisores	P	-	
	TOTAL CS-2	06	00	06
3	Critério de divisibilidade	---	---	---
3.1	Definição	P	-	
3.2	Divisibilidade por 2	P	-	
3.3	Divisibilidade por 3	P	-	
3.4	Divisibilidade por 4	P	-	
3.5	Divisibilidade por 5	P	-	
3.6	Divisibilidade por 6	P	-	
3.7	Divisibilidade por 7	P	-	
3.8	Divisibilidade por 9	P	-	
3.9	Divisibilidade por 10	P	-	
3.10	Divisibilidade por 11	P	-	
	TOTAL CS-3	10	00	10
4	Números primos	---	---	---
4.1	Definição de Números primos	P	-	
4.2	Definição de Número composto	P	-	
4.3	Identificação de números primos pelo Crivo de Eratóstenes.	P	-	
4.4	Reconhecimento de um número primo pela divisão por primos	P	-	
	TOTAL CS-4	04	00	04
5	Fatoração Completa – Decomposição em Fatores Primos (DFP)	---	---	---
5.1	Definição de fatoração	--	A	
5.2	Definição de fatoração completa (TFA)	P	-	
5.3	Cálculo dos fatores primos pela multiplicação	P	-	
5.4	Decomposição em fatores primos por divisão sucessiva	P	-	
5.5	Aplicação de fatoração no cálculo de raiz quadrada	P	-	
	TOTAL CS-5	04	01	05
6	Máximo Divisor Comum (MDC)	---	---	---
6.1	Definição de Máximo divisor comum	P	-	
6.2	Determinação do mdc pela sequência de divisores	P	-	
6.3	Determinação do mdc pela fatoração completa	P	-	
6.4	Determinação do mdc pela DFP, divisão sucessiva e simultânea	-	A	
6.5	Determinação do mdc pelo processo prático de Euclides	P	-	
6.6	Identificação de primos entre si	P	-	
	TOTAL CS-6	05	01	06
7	Mínimo múltiplo comum (MMC)	P	-	---
7.1	Definição de mmc	P	-	
7.2	Determinação do mmc pela sequência dos múltiplos	P	-	
7.3	Determinação do mmc pela DFP em separado ou fatoração completa.	P	-	
7.4	Determinação do mmc pela DFP divisão sucessiva e simultânea	P	-	
7.5	Determinação do mmc pela relação com o mdc	P	-	
	TOTAL CS-7	05	00	05
	TOTAL GERAL	37	03	40

Fonte: Sangiorgi (1963). Elaborada pela autora.

Tabela 30: LDM-2 – Resultado final quantitativo e qualitativo da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade do livros de Osvaldo Sangiorgi (1963)

Resultado final quantitativo e qualitativo da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade – LDM-2 de Osvaldo Sangiorgi (1963)					
Conteúdos Principais			Conteúdos Secundários		Total
CP	CP _P	CP _A	CS _P	CS _A	CD _P
CP1	01	--	03	01	04
CP2	01	--	06	00	06
CP3	01	--	10	00	10
CP4	01	--	04	00	04
CP5	01	--	04	01	05
CP6	01	--	05	01	06
CP7	01	--	05	00	05
Total	07	00	37	03	40
Conceito: Ótimo (ausência inexpressiva dos conteúdos de divisibilidade)					
Legenda: CD _P (Conteúdos de divisibilidade presentes); CP _P (Conteúdos principais presentes); CP _A (Conteúdos principais ausentes); CS _P (Conteúdos secundários presentes); CS _A (Conteúdos secundários ausentes).					

Dos conteúdos de divisibilidade relacionados para a análise, observamos a ausência dos seguintes conteúdos secundários de divisibilidade:

CP-1 Múltiplos: não apresenta definição;

CP-5 Fatoração completa – Decomposição em fatores primos: não apresenta definição de fatoração;

CP-6 Máximo divisor comum : não apresenta a determinação pela decomposição em fatores primos com divisão sucessiva e simultânea.

Pela análise realizada, observamos que a quantidade de ausência dos conteúdos de divisibilidade, equivale a 7,5%, sendo bastante inexpressiva. Desse modo, o livro recebe o conceito “ótimo” pela quantidade dos conteúdos de divisibilidade presentes.

Como este livro apresenta mais de 90% dos conteúdos de divisibilidade, ele se torna uma referência para analisar a presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade nos demais livros selecionados

6.1.3 LDM-3 – Análise do Livro Didático de Matemática de Sangiorgi de 1968

Escolhemos também analisar outro livro de Sangiorgi, por ser do final da década de 60, a fim de comparar com o livro de 1963, ou seja, vamos verificar se o autor apresenta os mesmos conteúdos de divisibilidade, se retira ou acrescenta algum assunto, se mantém a mesma abordagem teórica e metodológica. Entretanto, não vamos apresentar os conteúdos como apresentamos do livro anteriormente analisado.

Quadro 37: LDM-3 – Dados Gerais do livro de Osvaldo Sangiorgi (1968)

LDM-3	1968	
Título do livro	MATEMÁTICA – Curso moderno para os ginásios 1º volume	
Autor	OSVALDO SANGIORGI	
Ano da publicação	1968 (11ª edição)	Editora: Companhia Editora Nacional
Dimensões do livro	21 cm por 27,50 cm	Quantidade de página do livro: 371
Distribuição do conteúdo:	04 capítulos (cada capítulo dividido em duas partes).	
Capítulo dedicado a divisibilidade	2 - Divisibilidade no conjunto N	148 – 198 51 páginas (13,8%)
Capítulo que antecede divisibilidade	2 Operações com números naturais (N)	85 - 147 63 páginas
Capítulo posterior ao de divisibilidade	Capítulo 3 – Conjunto dos números racionais (Q)	199 – 226 28 páginas

Fonte: Sangiorgi (1968). Elaborado pela autora.

Este livro difere do anterior analisado, tanto no índice quanto no Programa de Ensino de Matemática, mas somente no uso de palavras, pois apresenta os mesmos conteúdos de divisibilidade. Este livro traz o Programa para um Curso Moderno de Matemática (Para os cursos ginásiais), no Quadro 38.

Quadro 38: LDM-2 – Programa para um Curso Moderno de Matemática conforme Sangiorgi (1968)

Programa para um Curso Moderno de Matemática do LDM-3 Sangiorgi (1968) (Para os cursos ginásiais)⁹⁸
Os seguintes assuntos, para serem desenvolvidos na Primeira Série dos Ginásios, e distribuídos nos seguintes itens:
1. Noções de conjunto; operações com conjuntos; relações;
2. Número natural; numerais de um número – sistemas de numeração – bases;
3. Operações (operações inversas) com os números naturais – propriedades estruturais;

⁹⁸ Designação genérica do 1º ciclo dos cursos médios, compreendendo os Ginásios, os Ginásios Modernos, os Ginásios Experimentais, os Ginásios Vocacionais, os Ginásios Industriais, os Ginásios Comerciais e os Ginásios Pluricurriculares (SANGIORGI, 1968).

Quadro 38: Continuação

Programa para um Curso Moderno de Matemática do LDM-3 Sangiorgi (1968) (Para os cursos ginásiais) ⁹⁹	
4. Divisibilidade – múltiplos e divisores; números primos; fatoração completa; 5. Conjunto dos números racionais; números fracionários – operações (operações inversas); propriedades estruturais; 6. Estudo intuitivo das principais figuras geométricas planas e espaciais – sistemas de medidas: decimal e não-decimais. Tais itens, explicados neste Volume 1, fazem parte da programação dos <i>Assuntos Mínimos para um Moderno Programa de Matemática para os Ginásios</i>, ratificados no 5º Congresso Brasileiro do Ensino de Matemática, promovido pelo GEEM de São Paulo (Janeiro de 1966, São José dos Campo – SP), bem como seguem as sugestões para o Desenvolvimento da Matemática para a Primeira Série Ginásial, publicadas pelo Departamento de Educação do Estado de São Paulo (D.O. de 19-1-65) e, de um modo geral, atendem às Recomendações sobre Currículos para o Ensino Médio da Segunda Conferência Interamericana de Educação Matemática (dezembro de 1966, Lima, Peru).	

Fonte: Sangiorgi (1968). Elaborado pela autora.

Para termos uma melhor ideia da organização e distribuição dos conteúdos de divisibilidade no livro analisado, apresentamos os conteúdos que estão expostos no índice e como estão distribuídos no interior do capítulo, conforme Quadro 39.

Quadro 39: LDM-3 – Conteúdos de divisibilidade no índice e no interior do capítulo do Livro de Sangiorgi (1968).

Conteúdos de divisibilidade no índice do LDM-3 de Sangiorgi de 1968	Conteúdos de divisibilidade presentes no interior dos capítulos
Parte 2 • Divisibilidade no conjunto N; relações “múltiplos de”, “divisor de” (p. 149)	Divisibilidade 1. Múltiplo e divisores; relações (p. 149) 2. Propriedade (p. 150) Exercícios de aplicação – Grupo 49 (p. 151) Exercícios de fixação – Grupo 50 (p. 151).
• Critérios de divisibilidade; propriedade dos restos (p. 152)	Critérios de divisibilidade (p. 152) 3. Técnicas • Divisibilidade por 2, e por 3 (p. 152) • Divisibilidade por 4 (p. 153); • Divisibilidade por 5, por 6 e por 7 (p. 154); • Divisibilidade por 8 (p. 155); • Divisibilidade por 9, por 10 e por 11 (p. 156); • Divisibilidade por 12 (p. 157) 4. Propriedades elementares do resto. Prova das operações por um divisor (p. 159) Exercícios de fixação – grupo 51 (p. 161).
• Número um, Números primos; Números compostos (p. 162)	5. Número 1; números primos; números compostos (p. 162)

⁹⁹ Designação genérica do 1º ciclo dos cursos médios, compreendendo os Ginásios, os Ginásios Modernos, os Ginásios Experimentais, os Ginásios Vocacionais, os Ginásios Industriais, os Ginásios Comerciais e os Ginásios Pluricurriculares (SANGIORGI, 1968).

Quadro 39: continuação

Conteúdos de divisibilidade no índice do LDM-3 de Sangiorgi de 1968	Conteúdos de divisibilidade presentes no interior dos capítulos
• Fatoração completa, (p. 167)	6. Tábua dos números primos: Crivo de Eratóstenes (p. 163) 7. Reconhecimento de um número primo (divisão por números primos) (p. 164). 8. Números primos entre si (p. 166). Exercícios de fixação – Grupo 52.(p. 166). 9. Fatores de um número (p. 167) 10. Fatoração Completa de um número composto (p. 167). 11. Aplicações gerais 1^a) Divisibilidade de um número por outro pelos fatores primos (p. 169) 2^a) Determinação de todos os divisores de um número pela fatoração completa (p. 169) e pelo algoritmo de Euclides (p.170) 3^a) Número de divisores de um número a partir da fatoração completa (p. 171). Pensando em divisores de um número – determinando os divisores “desenhando” (p. 172) Números amigos e números perfeitos (p. 173). Exercícios de fixação – Grupo 53 (p. 173). Tábua dos números primos menores que 1000 (p. 175).
• Técnica operatória da radiciação; raiz quadrada aproximada (p. 176)	12. Potências e raízes exatas (p. 176). 13. Prática de extração de raiz quadrada por aproximação; resto (p. 178) Exercícios de fixação – Grupo 54 (p.181)
• Operações: maximização e minimização (p. 182)	Operação maximização (m.d.c.) (p. 183) 14. Divisores comuns – intersecção de conjuntos finitos (p. 183) 15. Operação: maximização (ou máximo divisor comum); resultado: maior divisor comum (p. 184) Operação minimização (m.m.c.) (p. 185) 16. Múltiplos comuns: intersecção de conjuntos infinitos 17. Operação: mínimo múltiplo comum; resultado: menor múltiplo comum (p. 186) Exercícios de fixação – Grupo 55,
• Propriedades estruturais das operações maximização e minimização (p. 188)	Propriedades Estruturais das Operações m.d.c. e m.m.c. Técnicas de cálculos das operações: m.d.c. e m.m.c. (p. 188) consequente aplicações (p. 190) I. Operação máximo divisor comum (m.d.c.) (p. 190) 18. Determinação do maior divisor comum por fatoração completa (p. 190) 19. Determinação do maior divisor por divisões sucessivas; disposição prática de Euclides (p. 191) 20. Consequências (p. 192)

Quadro 39: Continuação

Conteúdos de divisibilidade no índice do LDM-3 de Sangiorgi de 1968	Conteúdos de divisibilidade presentes no interior dos capítulos
• Propriedades estruturais das operações maximização e minimização (p. 188)	21. Aplicações em exercícios diversos (p. 192) Exercícios de fixação – Grupo 57 (p. 193) II. Operação mínimo múltiplo comum (m.m.c.) (p. 194) 22. Determinação do menor múltiplo comum por fatoração completa (p. 194) 23. Determinação do menor múltiplo comum usando relação existente entre as operações m.d.c. e m.m.c. (p. 195) 24. Consequências (p. 196) 25. Aplicações em exercícios diversos (p. 196) Exercícios de fixação – Grupo 58 (p. 197).

Fonte: Sangiorgi (1968). Elaborado pela autora.

Este livro apresenta o mesmo título “Curso Moderno” que o anterior e Programa de Ensino de Matemática similar, diferindo nas declarações abaixo dos assuntos abordados, entretanto, outra diferença observada é nas cores das ilustrações que nesta edição estão na cor verde e na de 1963, cor azul.

A abordagem também difere um pouco, pois houve diminuição na representação simbólica da Teoria dos Conjuntos, embora ainda sejam usados alguns símbolos, tais como: de união, interseção, pertence e não-pertence, bem como as chaves para representar os conjuntos de tipos de números, entretanto, não apresenta mais os Diagramas de Venn para representar os conjuntos de divisores, múltiplos, etc..

Ao analisar o interior dos capítulos referente aos conteúdos de divisibilidade, observamos que são os mesmos da edição de 1963, analisado na seção anterior, repetindo os mesmos exemplos e exercícios. Desse modo, não apresentaremos os conteúdos de divisibilidade desta edição.

A seguir apresentamos a Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade (Quadro 40) e, a Tabela 31, com o resultado final e o conceito atribuído referentes à quantidade de conteúdos presentes.

Quadro 40: LDM-3 – Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro de Osvaldo Sangiorgi (1968)

Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade LDM-3 de Osvaldo Sangiorgi (1968)				
	CONTEÚDOS DE DIVISIBILIDADE	(P)	(A)	T.CD
1	Múltiplos	---	---	---
1.1	Definição de múltiplos de um número	--	A	
1.2	Ideia de “múltiplo de”	P	--	
1.3	Cálculos dos múltiplos (pela multiplicação)	A	--	
1.4	Sequência dos múltiplos de um número	P	--	
	TOTAL CS-1	03	01	04
2	Divisores	---	---	---
2.1	Definição de divisor de um número	P	--	
2.2	Ideia de “divisível por”	P	--	
2.3	Determinação dos divisores pela sequência (divisão ou multiplicação)	P	--	
2.4	Determinação de todos divisores pela DFP (Fatoração completa)	P	--	
2.5	Determinação de todos divisores pela DFP (Algoritmo de Euclides)	P	--	
2.6	Cálculo do Número (quantidade) de divisores	P	--	
	TOTAL CS-2	06	00	06
3	Critério de divisibilidade	---	---	---
3.1	Definição	P	--	
3.2	Divisibilidade por 2	P	--	
3.3	Divisibilidade por 3	P	--	
3.4	Divisibilidade por 4	P	--	
3.5	Divisibilidade por 5	P	--	
3.6	Divisibilidade por 6	P	--	
3.7	Divisibilidade por 7	P	--	
3.8	Divisibilidade por 9	P	--	
3.9	Divisibilidade por 10	P	--	
3.10	Divisibilidade por 11	P	--	
	TOTAL CS-3	10	00	10
4	Números primos	---	---	---
4.1	Definição de Números primos	P	-	
4.2	Definição de Número composto	P	-	
4.3	Identificação de números primos pelo Crivo de Eratóstenes.	P	-	
4.4	Reconhecimento de um número primo pela divisão por primos	P	-	
	TOTAL CS-4	04	00	04
5	Fatoração Completa – Decomposição em Fatores Primos (DFP)	---	---	---
5.1	Definição de fatoração	--	A	
5.2	Definição de Fatoração Completa (TFA)	P	--	
5.3	Cálculo dos fatores primos pela multiplicação	P	--	
5.4	Decomposição em fatores primos por divisão sucessiva	P	--	
5.5	Aplicação de fatoração no cálculo de raiz quadrada	P	--	
	TOTAL CS-5	04	01	05
6	Máximo Divisor Comum (MDC)	---	---	---
6.1	Definição de Máximo divisor comum	P	-	
6.2	Determinação do mdc pela sequência de divisores	P	-	
6.3	Determinação do mdc pela fatoração completa	P	-	
6.4	Determinação do mdc pela DFP, divisão sucessiva e simultânea	-	A	
6.5	Determinação do mdc pelo processo prático de Euclides	P	-	
6.6	Identificação de primos entre si	P	-	

Quadro 40 - continuação

	TOTAL CS-6	05	01	06
7	Mínimo múltiplo comum (MMC)	P	-	---
7.1	Definição de mmc	P	-	
7.2	Determinação do mmc pela sequência dos múltiplos	P	-	
7.3	Determinação do mmc pela DFP em separado ou fatoração completa.	P	-	
7.4	Determinação do mmc pela DFP divisão sucessiva e simultânea	P	-	
7.5	Determinação do mmc pela relação com o mdc	P	-	
	TOTAL CS-7	05	00	05
	TOTAL GERAL	37	03	40

Fonte: Sangiorgi 1968. Elaborada pela autora.

Tabela 31: LDM-3: Resultado final quantitativo e qualitativo da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade do livro de Osvaldo Sangiorgi (1968)

Resultado final quantitativo e qualitativo da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade – LDM-3 de Osvaldo Sangiorgi (1968)					
Conteúdos Principais			Conteúdos Secundários		Total
CP	CP _P	CP _A	CS _P	CS _A	CD _P
CP1	01	-	03	01	04
CP2	01	-	06	00	06
CP3	01	-	10	00	10
CP4	01	-	04	00	04
CP5	01	-	04	01	05
CP6	01	-	05	01	06
CP7	01	-	05	00	05
Total	07	00	37	03	40
Conceito: Ótimo (ausência inexpressiva dos conteúdos de divisibilidade)					
Legenda: CD _P (Conteúdos de divisibilidade presentes); CP _P (Conteúdos principais presentes); CP _A (Conteúdos principais ausentes); CS _P (Conteúdos secundários presentes); CS _A (Conteúdos secundários ausentes).					

Observamos a ausência dos seguintes conteúdos secundários de divisibilidade nos assuntos:

CP-1 Múltiplos: não apresenta definição;

CP-5 Fatoração – Decomposição em fatores primos: não apresenta definição de fatoração;

CP-6 Máximo divisor comum: não apresenta a determinação pela decomposição em fatores primos com divisão sucessiva e simultânea.

Pela análise realizada, observamos que a quantidade de ausência dos conteúdos de divisibilidade, equivale a 7,5%, sendo considerada inexpressiva. Desse

modo, o livro recebe o conceito “ótimo” pela quantidade dos conteúdos de divisibilidade presentes.

6.1.4 LDM-4 – Análise do Livro Didático de Matemática de Scipione Di Pierro Neto¹⁰⁰ (1970)

Escolhemos este livro por fazer parte do início da década de 70 e ser de um autor renomado. Temos oportunidade de observar como se dava o ensino de matemática nesta época, e como o próprio título diz traz uma proposta de ensino “Matemática na Escola Renovada”. Desse modo trazemos a apresentação do autor que nos dá indícios do seja sua proposta para o ensino de Matemática.

AOS COLEGAS PROFESSORES

Temos a satisfação de apresentar o nosso primeiro volume da série MATEMÁTICA NA ESCOLA RENOVADA.

Procuramos desenvolver este trabalho usando a linguagem comum da Teoria dos Conjuntos, adequada ao nível da primeira série ginasial.

A apresentação dos assuntos, através de exemplos e situações já conhecidas, pretende formar os conceitos segundo a linha psicogenética de Jean Piaget. Trata-se, entretanto, de um livro de textos e as limitações que esse fato impõe, impedem que isso ocorra todas às vezes, como seria altamente desejável. Os exercícios sempre muito numerosos foram graduados e seriados segundo as dificuldades naturais dos alunos nessa idade. Apresentamos também várias sequências de testes de escolha múltipla, hoje muito solicitados em provas e concursos, que poderão servir como base para melhores desenvolvimentos.

As ilustrações, como se vê, merecem cuidado especial e a mensagem que levam pretende dar à obra um todo orgânico a facilitar o processo de aprendizagem.

Scipione Di Pierro Neto (1970)

Como podemos observar no texto de apresentação o autor se dirige aos professores e não aos alunos e também, embora não mencione a Matemática Moderna, seu livro está fundamentado na Teoria dos Conjuntos.

A seguir apresentamos o Quadro 41, com os dados gerais do livro que será analisado, o Quadro 42, com os conteúdos de divisibilidade no índice do livro e no interior do capítulo, a Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de

¹⁰⁰ Scipione Di Pierro Neto – Professor de Prática de Ensino de Matemática da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo e da F.F.C.I de São Bento da PUC/SP e da F.F.C.I Sedes Sapientiae da PUC/SP. Professor titular de Matemática do ex-colega de Aplicação da F.F.C.I da Universidade de São Paulo. Professor Orientador de Matemática do Ginásio de Aplicação da F.F.C.I Sedes Sapientiae da PUC/SP (DI PIERRO NETO, 1970).

divisibilidade no livro (Quadro 43) e, por fim, a Tabela 31 com o resultado final da análise com a qualificação do livro de acordo com os conteúdos presentes.

Quadro 41: LDM-4 – Dados gerais do livro de Scipione Di Pierro Neto (1970):
Matemática na Escola Renovada

LDM-4	1970	
Título do livro	Matemática na Escola Renovada	
Autor	SCIPIONE DI PIERRO NETO	
Ano da publicação	1970	Editora: Saraiva
Dimensões da página	15 cm por 21,8 cm	Quantidade de páginas do livro: 220
Distribuição do conteúdo	10 capítulos	
Capítulo que antecede divisibilidade	Capítulo 4 – Problemas com números naturais	(55 – 75) 21 páginas
Capítulo dedicado à divisibilidade	Capítulo 5 – Múltiplos e divisores	(77 – 107) 31 páginas
Capítulo posterior ao de divisibilidade	Capítulo 6 – Números Racionais	(108 - 138) 31 páginas

Fonte: Di Pierro Neto(1970). Elaborado pela autora.

O livro apresenta os temas enumerados em sequência, independente dos capítulos, desse modo, os conteúdos de divisibilidade estão referenciados a partir do número 49 até 78. Vamos colocá-los nesta sequência no Quadro 42.

Quadro 42: LDM-4 – Conteúdos de divisibilidade apresentados no índice e no interior do capítulo 5 do Livro de Scipione (1970)

Conteúdos de divisibilidade no Índice do livro se Scipione (1970)	Conteúdos de divisibilidade no interior do capítulo 5: múltiplos e divisores
Capítulo 5 – Múltiplos e Divisores (p.78)	49. Múltiplos de um número – Divisor de um número Apresenta as definições de múltiplo e de divisor. (p. 78) 50. Observações 51. Princípios gerais de divisibilidade (p. 80) 52. Caracteres de divisibilidade (definição) 53. Divisibilidade por 10, 2, e 5 (p. 80) 54. Divisibilidade por 4 e 25 (p. 81) 55. Divisibilidade por 8 e 125 (p. 81) 56. Divisibilidade por 3 e 9 (p. 82) 57. Divisibilidade por 7 e por 11 (p. 83) 58. Resumo dos critérios de divisibilidade (p. 85) 59. Exercícios: divisibilidade – múltiplos e divisores (p. 85).
Números primos, números compostos ou múltiplos (p. 88)	60. Preliminares (p. 88) Definição de números primos e números compostos 61. Reconhecimento dos números primos pela divisão por primos (p. 89).

Quadro 39: continuação

Conteúdos de divisibilidade no Índice do livro de Scipione (1970)	Conteúdos de divisibilidade no interior do capítulo 5: múltiplos e divisores
Fatoração em N .(p. 90)	62. Decomposição de um número em fatores primos Definição da Fatoração completa (TFA) 63. Quais e quantos são os divisores de um número (pela fatoração completa e pelo algoritmo de Euclides) e regra para 64. aplicações 65. exercícios: números primos e decomposição
Máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum (p. 95) 1) Máximo divisor comum (p. 95)	Máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum – Definição (p. 95) 66. A operação maximização (p. 95) 67. Propriedades do m.d.c. (p. 95) 68. Cálculo do m.d.c. de vários números (pela DFP e fatoração completa) (p. 97) 69. Números primos entre si (p. 97) 70. Máximo divisor comum de mais de dois números (pelo algoritmo de Euclides) (p. 98) 71. Outras propriedades do m.d.c. (p. 99) 72. Exercícios: máximo divisor comum (p. 100)
2) Mínimo múltiplo comum (p.101).	Mínimo múltiplo comum (p. 101) 73. A operação minimização (p. 101) Definição de mmc. (p. 102) 74. Propriedades do m.m.c. 75. Cálculo do m.m.c. de vários números –pela DFP e fatoração completa e pela divisão sucessiva e simultânea (pp. 103-104) 76. Outras propriedades do mínimo múltiplo comum (determinação do mmc pela relação com o mdc e pelos números primos entre si) (p. 105) 77. Aplicações (p. 106) 78. Exercícios: mínimo múltiplo comum (p. 106).

Fonte: Scipione Di Pierro Neto (1970). Elaborado pela autora

Como podemos observar o autor apresenta todos os conteúdos de divisibilidade. Inicia os itens principais com exemplos e depois apresenta as definições e detalha pontos importantes do assunto. O autor se utiliza da simbologia da Teoria dos Conjuntos para fazer a representação simbólica matemática. Ainda se utiliza da nomenclatura de “Operação de Maximização e Minimização” para o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum e apresenta propriedades do mdc e mmc, bem como a determinação do mmc pela relação com o mdc e números primos entre si.

Os principais assuntos dos conteúdos secundários estão presentes, mas vamos evidenciar as ausências que foram observadas no Quadro 43 e, por fim, na Tabela 32, o resultado final da análise com a qualificação do livro de acordo com os indicadores.

Quadro 43: LDM-4 – Ficha de Análise da presença/ausência dos Conteúdos de Divisibilidade no Livro de Scipione Di Piero Neto (1970).

Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade LDM-4 de Scipione Di Piero Neto (1970)				
	CONTEÚDOS DE DIVISIBILIDADE	(P)	(A)	T.CD
1	Múltiplos	---	---	---
1.1	Definição de múltiplos de um número	P	--	
1.2	Ideia de “múltiplo de”	P	--	
1.3	Cálculos dos múltiplos (pela multiplicação)	P	--	
1.4	Sequência dos múltiplos de um número	P	--	
	TOTAL CS-1	04	00	04
2	Divisores	---	---	---
2.1	Definição de divisor de um número	P	--	
2.2	Ideia de “divisível por”	P	--	
2.3	Determinação dos divisores pela sequência (divisão ou multiplicação)	P	--	
2.4	Determinação de todos divisores pela DFP (Fatoração completa)	P	--	
2.5	Determinação de todos divisores pela DFP (Algoritmo de Euclides)	P	--	
2.6	Cálculo do Número (quantidade) de divisores	--	A	
	TOTAL CS-2	05	01	06
3	Critério de divisibilidade	---	---	---
3.1	Definição	P	--	
3.2	Divisibilidade por 2	P	--	
3.3	Divisibilidade por 3	P	--	
3.4	Divisibilidade por 4	P	--	
3.5	Divisibilidade por 5	P	--	
3.6	Divisibilidade por 6	P	--	
3.7	Divisibilidade por 7	P	--	
3.8	Divisibilidade por 9	P	--	
3.9	Divisibilidade por 10	P	--	
3.10	Divisibilidade por 11	P	--	
	TOTAL CS-3	10	00	10
4	Números primos	---	---	---
4.1	Definição de Números primos	P	--	
4.2	Definição de Número composto	P	--	
4.3	Identificação de números primos pelo Crivo de Eratóstenes.	--	A	
4.4	Reconhecimento de um número primo pela divisão por primos	P	--	
	TOTAL CS-4	03	01	04
5	Fatoração Completa – Decomposição em Fatores Primos (DFP)	---	---	---
5.1	Definição de fatoração	--	A	
5.2	Definição de Fatoração Completa (TFA)	P	--	
5.3	Cálculo dos fatores primos pela multiplicação	P	--	
5.4	Decomposição em fatores primos por divisão sucessiva	P	-	
5.5	Aplicação de fatoração no cálculo de raiz quadrada	--	A	
	TOTAL CS-5	03	02	05
6	Máximo Divisor Comum (MDC)	---	---	---
6.1	Definição de Máximo divisor comum	P	--	
6.2	Determinação do mdc pela sequência de divisores	P	--	
6.3	Determinação do mdc pela fatoração completa	P	--	
6.4	Determinação do mdc pela DFP, divisão sucessiva e simultânea	--	A	
6.5	Determinação do mdc pelo processo prático de Euclides	P	--	
6.6	Identificação de primos entre si	P	--	

Quadro 43 - continuação

	TOTAL CS-6	05	01	06
7	Mínimo múltiplo comum (MMC)	---	---	---
7.1	Definição de mmc	P	--	
7.2	Determinação do mmc pela sequência dos múltiplos	P	--	
7.3	Determinação do mmc pela DFP em separado ou fatoração completa.	P	--	
7.4	Determinação do mmc pela DFP divisão sucessiva e simultânea	P	--	
7.5	Determinação do mmc pela relação com o mdc	P	--	
	TOTAL CS-7	05	00	05
	TOTAL GERAL	35	04	40

Fonte: Di Pierro Neto (1970).

Tabela 32: LDM-4 – Resultado final quantitativo e qualitativo da presença/ausência dos Conteúdos de Divisibilidade do Livro de Scipione Di Pierro Neto (1970)

Resultado final quantitativo e qualitativo da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade – LDM-4: de Scipione Di Pierro Neto (1970)					
Conteúdos Principais			Conteúdos Secundários		Total dos Conteúdos de divisibilidade
CP	CP _P	CP _A	CS _P	CS _A	CD _P
CP1	1	0	04	0	04
CP2	1	0	05	01	06
CP3	1	0	10	0	10
CP4	1	0	03	01	04
CP5	1	0	03	02	05
CP6	1	0	05	01	06
CP7	1	0	05	0	05
Total	7	0	35	05	40
Conceito: Ótimo (ausência inexpressiva dos conteúdos de divisibilidade)					
Legenda: CD _P (Conteúdos de divisibilidade presentes); CP _P (Conteúdos principais presentes); CP _A (Conteúdos principais ausentes); CS _P (Conteúdos secundários presentes); CS _A (Conteúdos secundários ausentes).					

Observamos a ausência dos seguintes conteúdos secundários de divisibilidade: **CP-4 Números primos:** O livro não apresenta como identificar os números primos em um intervalo qualquer de números, como por exemplo, nos primeiros 50 ou 100 números naturais e, para isso se utiliza do “Crivo de Eratóstenes”. O autor apenas apresenta os primeiros primos da seguinte forma: $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$; **CP-5 Fatoração completa – decomposição em fatores primos:** o autor não apresenta a definição de fatorar. Como também não apresentou a aplicação de fatoração no cálculo de raiz quadrada; **CP-6 Máximo divisor comum** – não apresenta a decomposição em fatores primos pela divisão sucessiva e simultânea.

Pela análise realizada, observamos que a quantidade de ausência dos conteúdos de divisibilidade, equivale a 12,5%, sendo considerada inexpressiva. Desse modo, o livro recebe o conceito “Ótimo” pela quantidade dos conteúdos de divisibilidade presentes.

6.1.5 LDM-5 – Análise do livro de Lydia Lamparelli Condé; Adolfo Walter P. Canton; Pedro Alberto Morettin; Dalva Fontes Indiani (1974)

Escolhemos este livro por se tratar de um livro didático de matemática da década de 70 e por apresentar uma proposta diferente.

A seguir apresentamos o Quadro 44, com os dados gerais do livro que será analisado, a Imagem do livro, a apresentação dos autores aos alunos, bem como, o Quadro 45 com os conteúdos de divisibilidade no índice do livro e no interior do capítulo, a Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro (Quadro 46) e, por fim, a Tabela 33, com o resultado final da análise com a qualificação do livro de acordo com os indicadores.

Quadro 44: LDM-5 – Dados Gerais do Livro Didático de Matemática de Lamparelli et al. (1974)

LDM-5	1974	
Título	MATEMÁTICA PARA O 1º GRAU (5ª SÉRIE)	
Autor	LYDIA LAMPARELLI CONDÉ; ADOLFO WALTER P. CANTON; PEDRO ALBERTO MORETTIN; DALVA FONTES INDIANI	
Editora	EDART – São Paulo / MEC	Ano:1974
Quantidade de páginas do livro	315	Dimensões da página: 18 x 27,8 cm
Distribuição do conteúdo do livro	Em 8 (oito) capítulos	
Capítulo dedicado a divisibilidade	Capítulo 4B – O conjunto dos números inteiros – Múltiplos e Divisores	(157 – 186) 30 páginas - 9,6%
Capítulo que antecede divisibilidade	Capítulo 4A – Conjunto dos números inteiros - Operações	(115 – 156) 42 páginas 13,3%
Capítulo posterior ao de divisibilidade	Capítulo 5A – Conjunto dos Números Racionais – Conceito de Número Racional. Operações	(187 – 260) 74 páginas 23,5%

Fonte: Lamparelli et al. (1974). Elaborado pela autora.

Ainda percebemos a influência da Matemática Moderna neste livro, pois foi elaborado com a abordagem da Teoria dos Conjuntos e está distribuído em seis capítulos. A seguir trazemos a apresentação do livro pelos autores aos alunos.

AOS ALUNOS

No início de seu curso ginasial, estamos lhe oferecendo um livro de matemática diferente. Certamente você já deve ter constatado isso. Observe que a matéria está disposta de maneira a tornar a sua leitura agradável... Veja as ilustrações como são bonitas! Tudo isso foi feito pensando na pessoa que iria usá-lo: um jovem aluno da 5ª série do curso ginasial. Fizemos absoluta questão de lhe oferecer um livro bom e bonito.

Os assuntos que compõem este volume lhe darão uma visão completamente nova de toda a matemática que você aprendeu no curso primário. Ao terminar o seu primeiro ano, você verificará que seus antigos conhecimentos se tornaram organizados e relacionados. Quanto à geometria, ela é iniciada neste volume e continuará nos demais.

Vejamos como poderemos orientá-lo a fim de que você melhor aproveite o livro.

Primeiramente, leia com muito cuidado, observando as ilustrações e fazendo anotações no próprio livro. É também muito importante que você siga exatamente a ordem de apresentação dos assuntos, pois ao passar para um novo capítulo você necessitará dos conceitos expostos nos anteriores; mesmo quando o assunto é geometria, introduzimos conceitos que são usados também em álgebra. Quanto aos exercícios, há dois distintos: após cada seção você encontra uma série deles que devem ser resolvidos naquele momento; resolva todos com calma e atenção, pois além de estarem graduados quanto às dificuldades, alguns *complementam* a matéria exposta. Portanto, não pule exercício, sob pena de não ficar com o assunto estudado. No final de cada capítulo há uma série inteira de exercícios gerais.

Esperamos que você faça deste livro um bom companheiro de sua 5ª série. Felicidades.

OS AUTORES

Quadro 45: LDM-5 – Conteúdos de Divisibilidade no índice e no interior do Capítulo do Livro de Lamparelli et al. (1974)

Os conteúdos de divisibilidade no índice do livro de Matemática de Lamparelli et al. (1974)	Os conteúdos de divisibilidade no interior do capítulo
Capítulo 4B Parte B: Múltiplo e divisores	Definição resumida (na linguagem matemática) e a representação de múltiplo
4B.1 Múltiplo (p.157)	
4B.2 Múltiplos comuns de vários números (p. 159)	Definição e representação
4B.3 Mínimo múltiplo comum (p. 159)	Definição e representação
4B.4 Divisor (p. 161)	Definição e representação
4B.5 As Relações “é divisor de” e “múltiplo de” (p. 163).	ideia de “é divisor de” e “múltiplo de” e exemplos.
4B.6 Número primo (p. 164)	Definição de números primos
4B.7 Divisores comuns de vários números, (p. 165)	Pela sequência dos divisores
4B.8 Máximo Divisor Comum (p. 165)	Definição e representação
4B.9 Números primos entre si (p. 167)	Definição e representação “Se a e b são primos entre si, então m.d.c. (a, b) = 1”.

Quadro 45: Continuação

Os conteúdos de divisibilidade no índice do livro de Lamparelli et al. (1974)	Os conteúdos de divisibilidade no interior do capítulo
4B.10 Fatoração (p. 169)	Definição de fatoração e de fatoração completa (TFA), Cálculo de fatoração somente pela multiplicação.
4B.11 Regras de Divisibilidade (p. 170)	Definição. • É divisível por 2; por 3, por 5 e por 9 (p. 170); • divisível por 10 (p. 171) • Divisível por 11 (p. 172) Exercício (p. 172).
4B.12 Reconhecimento de Um Número Primo (p. 172)	Apresenta somente pela regra de divisão por primos.
4B.13 Fatoração Completa de um Número, 175	Pela decomposição em fatores primos por divisões sucessivas com o traço vertical.
4B.14 Determinação de Todos os Divisores de Um Número (p. 177)	Pela decomposição em fatores primos para chegar à fatoração completa.
4B.15 Máximo Divisor Comum – Regras Práticas (p. 178)	Pela decomposição em fatores primos em separado e depois, pela fatoração completa.
4B.16 Mínimo Múltiplo Comum – Regras Práticas (p. 179) Exercícios (p. 182)	Regra pela divisão sucessiva e simultânea de decomposição em fatores primos. Determinação do mmc pela relação com o mdc e números primos entre si.

Fonte: Lamparelli Et. al. (1974).

Os autores introduzem os conteúdos de divisibilidade começando pelas definições, seguidas de exemplos. Os conteúdos no interior do capítulos foram praticamente todos indicados no índice. Os assuntos são expostos numa linguagem clara e objetiva. Utilizam-se da linguagem e simbologia da Teoria dos Conjuntos para representarem os conjuntos de múltiplos, múltiplos comuns, divisores, divisores comuns e resultados do mdc e mmc.

A seguir, apresentamos a ficha para analisar a presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro (Quadro 46).

Quadro 46: LDM-5 – Ficha de Análise da presença/ausência dos Conteúdos de Divisibilidade no Livro de Lydia Lamparelli et al. (1974)

Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade LDM- 5 de Lydia Lamparelli et al. (1974)				
	CONTEÚDOS DE DIVISIBILIDADE	(P)	(A)	T.CD
1	Múltiplos	---	---	---
1.1	Definição de múltiplos de um número	P	-	
1.2	Ideia de “múltiplo de”	P	-	
1.3	Cálculos dos múltiplos (pela multiplicação)	P	-	
1.4	Sequência dos múltiplos de um número	P	-	
	TOTAL CS-1	04	00	04

Quadro 46: Continuação

2	Divisores	---	---	---
2.1	Definição de divisor de um número	P	-	
2.2	Ideia de “divisível por”	P	-	
2.3	Determinação dos divisores pela sequência (divisão ou multiplicação)	P	-	
2.4	Determinação de todos divisores pela DFP (Fatoração completa)	P	-	
2.5	Determinação de todos divisores pela DFP (Algoritmo de Euclides)	-	A	
2.6	Cálculo do Número (quantidade) de divisores	-	A	
	TOTAL CS-2	03	02	06
3	Critério de divisibilidade	---	---	---
3.1	Definição	P	-	
3.2	Divisibilidade por 2	P	-	
3.3	Divisibilidade por 3	P	-	
3.4	Divisibilidade por 4	-	A	
3.5	Divisibilidade por 5	P	-	
3.6	Divisibilidade por 6	-	A	
3.7	Divisibilidade por 7	-	A	
3.8	Divisibilidade por 9	P	-	
3.9	Divisibilidade por 10	P	-	
3.10	Divisibilidade por 11	P	-	
	TOTAL CS-3	07	03	10
4	Números primos	---	---	---
4.1	Definição de Números primos	P	-	
4.2	Definição de Número composto	-	A	
4.3	Identificação de números primos pelo Crivo de Eratóstenes.	-	A	
4.4	Reconhecimento de um número primo pela divisão por primos	A	-	
	TOTAL CS-4	02	02	04
5	Fatoração Completa – Decomposição em Fatores Primos (DFP)	---	---	---
5.1	Definição de fatoração	P	-	
5.2	Definição de fatoração completa (TFA)	P	-	
5.3	Cálculo dos fatores primos pela multiplicação	P	-	
5.4	Decomposição em fatores primos por divisão sucessiva	P	-	
5.5	Aplicação de fatoração no cálculo de raiz quadrada	-	A	
	TOTAL CS-5	04	01	05
6	Máximo Divisor Comum (MDC)	---	---	---
6.1	Definição de Máximo divisor comum	P	-	
6.2	Determinação do mdc pela sequência de divisores	P	-	
6.3	Determinação do mdc pela fatoração completa	P	-	
6.4	Determinação do mdc pela DFP, divisão sucessiva e simultânea	-	A	
6.5	Determinação do mdc pelo processo prático de Euclides	P	-	
6.6	Identificação de primos entre si	P	-	
	TOTAL CS-6	05	01	06
7	Mínimo múltiplo comum (MMC)	---	---	---
7.1	Definição de mmc	P	-	
7.2	Determinação do mmc pela sequência dos múltiplos	P	-	
7.3	Determinação do mmc pela DFP em separado ou fatoração completa	P	-	
7.4	Determinação do mmc pela DFP divisão sucessiva e simultânea	P	-	
7.5	Determinação do mmc pela relação com o mdc	P	-	
	TOTAL CS-7	05	00	05
	TOTAL GERAL	31	09	40

Fonte: Lamparelli Et. al. (1974).

Tabela 33: LDM-5 – Resultado Final quantitativo e qualitativo da presença/ausência dos Conteúdos de Divisibilidade do Livro de Lydia Lamparelli Et. al. (1974)

Resultado final quantitativo e qualitativo da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade – LDM-5: de Lydia Lamparelli Et. al. (1974)					
Conteúdos Principais			Conteúdos Secundários		Total
CP	CP _P	CP _A	CS _P	CS _A	CD _P
CP1	01	0	04	00	04
CP2	01	0	04	02	06
CP3	01	0	07	03	10
CP4	01	0	02	02	04
CP5	01	0	04	01	05
CP6	01	0	05	01	06
CP7	01	0	05	00	05
Total	07	0	31	09	40
Conceito: Bom (ausência pouco expressiva dos conteúdos de divisibilidade)					
Legenda: CD _P (Conteúdos de divisibilidade presentes); CP _P (Conteúdos principais presentes); CP _A (Conteúdos principais ausentes); CS _P (Conteúdos secundários presentes); CS _A (Conteúdos secundários ausentes).					

Dos conteúdos secundários de divisibilidade relacionados, na análise do LDM-11 constatou-se a ausência dos seguintes conteúdos: **CP-2 Divisores**: não apresenta a determinação de todos os divisores pelo algoritmo de Euclides e nem o cálculo de números (quantidade de divisores); **CP-3 Critérios de divisibilidade**: não apresenta os critérios de divisibilidade por 4, 6 e 7; **CP-4 Números primos**: não apresenta a definição de números compostos e nem o reconhecimento dos números primos num intervalo de números (Crivo de Eratóstenes); **CP-5 Fatoração – decomposição em fatores primos**: não apresenta a aplicação da fatoração no cálculo da raiz quadrada; **CP-6 Máximo divisor comum**: Não apresenta a determinação do mdc pela divisão sucessiva e simultânea de dois ou mais números;

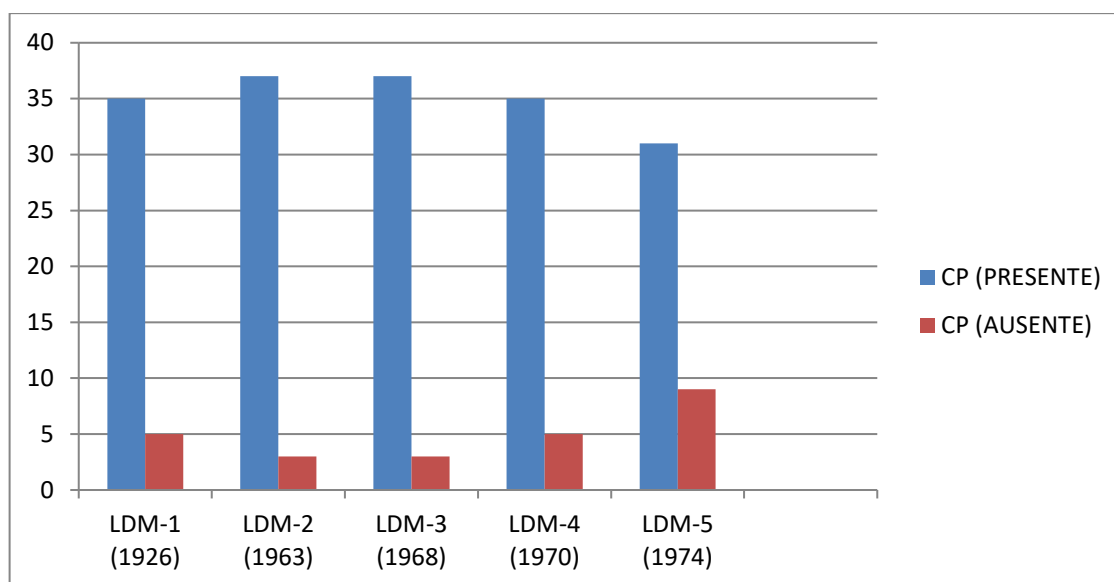
Conforme podemos observar na Ficha de análise (Quadro 46) e na Tabela 33, o livro apresenta 22,5% de conteúdos ausentes e, desse modo, pelos indicadores é classificado com o conceito “bom” por apresentar ausência pouco expressiva dos conteúdos de divisibilidade.

6.1.6 Considerações Finais da Análise dos LDM da Fase 1

Analisamos os seguintes cinco livros: LDM-1: Roxo (1926); LDM-2: Sangiorgi (1963); LDM-3: Sangiorgi (1968); LDM-4: Scipione (1970) e LDM-5 Lamparelli et al.

(1974). No Gráfico 3, apresentamos o resultado final da análise da presença-ausência dos conteúdos de divisibilidade nos cinco livros analisados.

Gráfico 3: Resultado final da análise dos cinco livros analisados – Fase 1



Legenda: CD(P) Conteúdos de divisibilidade presentes; CD(A) Conteúdos de divisibilidade ausentes.

Conforme podemos observar os três livros mais antigos contemplam a maioria dos conteúdos de divisibilidade, ou seja, a ausência observada é de no máximo 12,5% e assim, receberam o conceito ótimo, pois a ausência dos conteúdos é considerada inexpressiva. Nos dois livros, de 1970 e 1974, constatamos pelo menos 22,5% de ausência e, desse modo receberam o conceito bom, sendo a ausência considerada pouco expressiva.

6.2 FASE 2 – ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA DO PERÍODO DE 1980 A 2014

Para esta fase selecionamos 14 livros didáticos de matemática, mas separamos em duas partes: Parte 1, oito livros de 1980 a 2010 e, em seguida, na Parte 2, agrupamos seis livros dos mais distribuídos pelo PNLD-2014.

Dessa forma, para esta primeira parte, os livros selecionados para análise foram os seguintes: LDM-6 de Andrini (1984); LDM-7 de Andrini e Vasconcelos (1989);

LDM-8 de Malveira (1991); LDM-9 de Bongiovanni et al. (1995); LDM-10 de Mori e Onaga (2002); LDM-11 de Andrini e Vasconcelos (2002); LDM-12 de Dante (2005) e; LDM-13 de Dante (2010).

Nas próximas seções apresentaremos as análises desses oito livros selecionados, com os dados gerais, os conteúdos de divisibilidade contidos nos sumários dos livros e no interior dos capítulos, a ficha de análise e o resultado final da análise através de uma tabela e gráfico, seguida das considerações finais da análise.

6.2.1 LDM-6: Análise do livro de Álvaro Andrini “Matemática” 5ª série (1984)

A seguir apresentamos o Quadro 47 com os dados gerais do livro que será analisado, a apresentação do autor, o Quadro 48 com os conteúdos de divisibilidade no índice do livro e no interior dos capítulos, A ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro o (Quadro 49) e, por fim, a Tabela 34, o resultado final da análise com a qualificação do livro de acordo com os indicadores.

Quadro 47: LDM-6 – Dados gerais do livro de Álvaro Andrini (1984)

LDM-6	DE 1984		
Titulo	MATEMÁTICA:5ª série. Ensino de primeiro grau Livro do aluno		
Autor	ÁLVARO ANDRINI		
Editora	Editora do Brasil S/A	São Paulo, SP	Ano: 1984
Quantidade de páginas do livro	252	Dimensões da página 16,50 cm por 23 cm	
Distribuição do conteúdo:	18 capítulos		
Capítulos dedicados a divisibilidade	9 – Divisibilidade (p. 115) 10 – Números Primos e Números Compostos (p. 127) 11 – Máximo Divisor Comum (p. 135) 12 – Mínimo Múltiplo Comum (p. 142)		115 – 147 33 páginas 13,1%
Capítulo que antecede divisibilidade	Capítulo 8 - Potenciação e Radiciação no Conjunto IN		100 – 114 15 páginas
Capítulo posterior ao de divisibilidade	Capítulo 13 Conjunto dos Números Racionais Absolutos		148 – 168 21 páginas

Fonte: Andrini (1984). Elaborado pela autora.

Este livro contém apresentação e índice. A seguir trazemos a apresentação do livro pelo autor aos alunos.

APRESENTAÇÃO

Esta coleção de Matemática, em quatro volumes, é destinada às quatro últimas séries do primeiro grau, e suas características básicas são as seguintes:

- *Cada capítulo está assim esquematizado:*
 - *Desenvolvimento da teoria,*
 - *Exercícios resolvidos,*
 - *Exercícios propostos,*
 - *Exercícios complementares,*
 - *Testes.*
 - *Os assuntos são desenvolvidos numa linguagem clara, de fácil entendimento, sem, no entanto, deixar de haver rigor no tratamento dos mesmos, respeitando-se o nível a que se destinam.*
 - *Os exercícios, tanto os resolvidos quanto os propostos, são apresentados em sequência crescente de dificuldade.*
- Agradecemos, antecipadamente, todas as críticas e sugestões que nos forem enviadas.*

O autor.

No índice não há denominação de capítulo, os assuntos estão relacionados numa sequência numérica, mas na apresentação do livro, o autor se refere a capítulos, conforme podemos observar a seguir, no Quadro 48, em que relacionamos os conteúdos de divisibilidade conforme o índice do livro e como está distribuído no interior dos capítulos.

Quadro 48: LDM-6 – Conteúdos de divisibilidade apresentados no índice e no interior dos capítulos do Livro de Álvaro Andrini (1984)

Conteúdos de divisibilidade no índice do livro de Álvaro Andrini (1984)	Conteúdos de divisibilidade no interior dos capítulos
9 – DIVISIBILIDADE (p. 115)	Capítulo 9 – Divisibilidade (p. 115) - Múltiplo de um número, definição (p. 115). - Conjunto dos múltiplos de um número natural Divisores de um número, definição. (p. 117). - Conjunto dos divisores de um número (p. 117) - Critérios de divisibilidade, por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, e 10 (p.118)
10 – NÚMEROS PRIMOS E NÚMEROS COMPOSTOS (p. 127)	10 – Números primos e números compostos - Definição de Números primos (p.127) - Definição de Números compostos (p. 127) - Reconhecimento de um número primo pela divisão por primos (p. 129) - Decomposição de um número em fatores primos, definição de fatoração (p.130).
11 – MÁXIMO DIVISOR COMUM (p. 135)	11 – MÁXIMO DIVISOR COMUM (p. 135) - Definição e representação do Máximo divisor comum (p. 135). - Processos práticos para determinação do m.d.c.:

Quadro 48: continuação

Conteúdos de divisibilidade no índice do livro de Álvaro Andrini (1984)	Conteúdos de divisibilidade no interior dos capítulos
11 – MÁXIMO DIVISOR COMUM (p. 135)	Pela sequência dos divisores comuns, pela fatoração completa e pelo processo prático de Euclides; - Definição dos números primos entre si.
12 – MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM (p. 142)	12 – MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM (p.142-147) - Definição e representação do Mínimo múltiplo comum (p.142) - Processos práticos para determinação do m.m.c.: pela sequência dos múltiplos comuns; pela decomposição em fatores primos, fatoração completa e pela divisão sucessiva e simultânea (p. 143)

Fonte: Andrini (1984). Elaborado pela autora.

Os livros desta época eram produzidos em formato pequeno, com capa dura, com poucas ilustrações tais como, esquemas e figuras. Este livro apresenta letras coloridas na cor vermelha, na ênfase aos títulos, subtítulos, exemplos e itens, bem como nas figuras. Além, disso, este livro tem uma boa apresentação, as letras são de bom tamanho e o espaço entre linhas torna a leitura agradável.

Os conteúdos principais de divisibilidade são introduzidos a partir das definições e exemplos. Os exercícios propostos são apresentados no final de cada assunto de divisibilidade.

A seguir apresentamos a ficha de análise do LDM-6 (Quadro 49) da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade e a Tabela 34 com o resultado final e o conceito atribuído referente aos pontos dos conteúdos presentes.

Quadro 49: LDM-6 – Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro de Álvaro Andrini (1984)

Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade LDM- 6 de Álvaro Andrini (1984)				
	CONTEÚDOS DE DIVISIBILIDADE	(P)	(A)	T.CD
1	Múltiplos	---	---	---
1.1	Definição de múltiplos de um número	P	-	
1.2	Ideia de “múltiplo de”	P	-	
1.3	Cálculos dos múltiplos (pela multiplicação)	P	-	
1.4	Sequência dos múltiplos de um número	P	-	
	TOTAL CS-1	04	00	04

Quadro 49: Continuação

2	Divisores	---	---	---
2.1	Definição de divisor de um número	P	-	
2.2	Ideia de “divisível por”	P	-	
2.3	Determinação dos divisores pela sequência (divisão ou multiplicação)	P	-	
2.4	Determinação de todos divisores pela DFP (Fatoração completa)	-	A	
2.5	Determinação de todos divisores pela DFP (Algoritmo de Euclides)	-	A	
2.6	Cálculo do Número (quantidade) de divisores	-	A	
	TOTAL CS-2	03	03	06
3	Critério de divisibilidade	---	---	---
3.1	Definição	P	-	
3.2	Divisibilidade por 2	P	-	
3.3	Divisibilidade por 3	P	-	
3.4	Divisibilidade por 4	P	-	
3.5	Divisibilidade por 5	P	-	
3.6	Divisibilidade por 6	P	-	
3.7	Divisibilidade por 7	-	A	
3.8	Divisibilidade por 9	P	-	
3.9	Divisibilidade por 10	P	-	
3.10	Divisibilidade por 11	-	A	
	TOTAL CS-3	08	02	10
4	Números primos	---	---	---
4.1	Definição de Números primos	P	-	
4.2	Definição de Número composto	P	-	
4.3	Identificação de números primos pelo Crivo de Eratóstenes.	-	A	
4.4	Reconhecimento de um número primo pela divisão por primos	P	-	
	TOTAL CS-4	03	01	04
5	Fatoração completa – Decomposição em fatores primos (DFP)	---	---	---
5.1	Definição de fatoração	P	-	
5.2	Definição de fatoração completa (TFA)	-	A	
5.3	Cálculo dos fatores primos pela multiplicação	P	-	
5.4	Decomposição em fatores primos por divisão sucessiva	P	-	
5.5	Aplicação de fatoração no cálculo de raiz quadrada	-	A	
	TOTAL CS-5	03	02	05
6	Máximo divisor comum (MDC)	---	---	---
6.1	Definição de Máximo divisor comum	P	-	
6.2	Determinação do mdc pela sequência de divisores	P	-	
6.3	Determinação do mdc pela fatoração completa	P	-	
6.4	Determinação do mdc pela DFP, divisão sucessiva e simultânea	-	A	
6.5	Determinação do mdc pelo processo prático de Euclides	P	-	
6.6	Identificação de primos entre si	P	-	
	TOTAL CS-6	05	01	06
7	Mínimo múltiplo comum (MMC)	---	---	---
7.1	Definição de mmc	P	-	
7.2	Determinação do mmc pela sequência dos múltiplos	P	-	
7.3	Determinação do mmc pela DFP em separado ou fatoração completa	P	-	
7.4	Determinação do mmc pela DFP divisão sucessiva e simultânea	P	-	
7.5	Determinação do mmc pela relação com o mdc	--	A	
	TOTAL CS-7	04	01	05
	TOTAL GERAL	30	10	40

Fonte: Andrini (1984). Elaborado pela autora.

Tabela 34: LDM-6 – Resultado final quantitativo e qualitativo da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade do livro de Álvaro Andrini (1984)

Resultado final quantitativo e qualitativo da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade – LDM-6 de Álvaro Andrini (1984)					
Conteúdos Principais			Conteúdos Secundários		Total
CP	CP _P	CP _A	CS _P	CS _A	CD _P
CP1	01	-	04	00	04
CP2	01	-	03	03	06
CP3	01	-	08	02	10
CP4	01	-	03	01	04
CP5	01	-	03	02	05
CP6	01	-	05	01	06
CP7	01	-	04	01	05
Total	07	00	30	10	40
Conceito: “Regular” (ausência moderadamente expressiva dos conteúdos de divisibilidade)					
Legenda: CD _P (Conteúdos de divisibilidade presentes); CP _P (Conteúdos principais presentes); CP _A (Conteúdos principais ausentes); CS _P (Conteúdos secundários presentes); CS _A (Conteúdos secundários ausentes).					

O livro apresenta todos os conteúdos principais, mas constatamos algumas ausências nos conteúdos secundários de divisibilidade. A seguir mencionamos os conteúdos principais e seus conteúdos secundários ausentes: **CP-2 Divisores**: não apresenta nenhum método de determinação dos divisores, nem pela fatoração completa, nem pelo processo prático de Euclides, como também não apresenta o cálculo de números de divisores; **CP-3 Critérios de divisibilidade**: não apresenta os critérios de divisibilidade por 7 e nem por 11; **CP-4 Números primos**: não apresenta o reconhecimento dos números primos num intervalo de números pelo Crivo de Eratóstenes; **CP-5 Fatoração – decomposição em fatores primos**: não apresenta a definição de fatoração completa (TFA) e nem a aplicação da fatoração no cálculo da raiz quadrada; **CP-6 Máximo divisor comum**: Não apresenta a determinação do mdc pela divisão sucessiva e simultânea de dois ou mais números; **CP-7 Mínimo múltiplo comum**: Não apresenta a determinação do mmc pela relação com o mdc dos números dados.

Conforme podemos observar na Ficha de análise (Quadro 49) e na Tabela 34, o livro apresenta 25% de conteúdos ausentes e, desse modo, pelos indicadores é classificado com o conceito “Regular” por apresentar ausência moderadamente expressiva dos conteúdos de divisibilidade.

6.2.2 LDM-7: Análise do Livro de Álvaro Andrini “Praticando Matemática” – 5ª série (1989)

Na seção anterior analisando uma edição do mesmo autor, do ano de 1984. Nesta edição (de 1989) que apresentamos nesta seção, o livro apresenta o mesmo formato e tamanho, mas houve mudança no desenho da capa do livro. Observamos mudanças no índice e na apresentação do livro pelo autor aos alunos, que expomos a seguir.

APRESENTAÇÃO

Os quatro volumes desta coleção, destinada às quatro últimas séries do 1º grau, foram enriquecidos a partir da experiência em sala de aula e de algumas sugestões de colegas.

As características básicas da obra são as seguintes:

- *Cada capítulo está assim esquematizado:*
 - *Desenvolvimento da teoria,*
 - *Exercícios resolvidos,*
 - *Exercícios propostos,*
 - *Exercícios complementares,*
 - *Testes.*
- *A teoria é exposta numa linguagem clara e sucinta, de acordo com o nível a que se destina, sem, no entanto, abandonar o rigor necessário ao tratamento da matéria.*
- *Os resolvidos servem de apoio aos conceitos teóricos.*
- *Os exercícios resolvidos e os exercícios propostos apresentam uma sequência crescente de dificuldade.*
- *Os exercícios complementares podem ser utilizados como reforço e/ou revisão da matéria.*
- *Constituem inovações da obra:*
 - *Capítulos curtos: os capítulos longos da edição anterior foram eliminados pela divisão do assunto, para proporcionar inter-relação e revisão mais constantes;*
 - *Séries de exercícios totalmente refeitas, apresentando os mais diferentes tipos de questões;*
 - *Exercícios resolvidos intercalados nos exercícios propostos, para que o aluno tenha neles um suporte ao refletir sobre dificuldades encontradas;*
 - *Inclusão de testes de vestibulares adequados ao tratamento dado à matéria nesta coleção.*

Agradecemos, antecipadamente, todas as críticas e sugestões que nos forem enviadas.

O autor.

A seguir apresentamos o Quadro 50 com os dados gerais do livro que será analisado, a apresentação pelo autor aos alunos, o Quadro 51 com os conteúdos de divisibilidade que contam no índice do livro e no interior do capítulo, a Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade (Quadro 52) no livro e, por fim,

a Tabela 35 com os dados do resultado final da análise com a qualificação do livro de acordo com os indicadores.

Quadro 50: LDM-7 – Dados gerais do livro de Álvaro Andrini (1989)

LDM-7	DE 1989		
Título	PRATICANDO MATEMÁTICA – 5ª série. (Livro do aluno)		
Autor	ÁLVARO ANDRINI		
Editora	Editora do Brasil S/A	São Paulo, SP	Ano: 1989
Quantidade de páginas do livro	254	Dimensões da página 16,50 cm por 23 cm	
Distribuição do conteúdo:	18 capítulos		
Capítulos dedicados a divisibilidade	9 – Divisibilidade 10 – Números Primos e Números Compostos (p. 115) 11 – Máximo Divisor Comum (p. 122) 12 – Mínimo Múltiplo Comum (p. 129)		103 – 135) 33 páginas. 13%
Capítulo que antecede divisibilidade	Capítulo 8 – Resolução de problemas no conhecimento N		93 – 102 10 páginas
Capítulo posterior ao de divisibilidade	Capítulo 13 – Conjunto dos Números Racionais Absolutos		136 – 158 23 páginas

Fonte: Álvaro Andrini (1989). Elaborado pela autora.

Quadro 51: LDM-7 – Conteúdos de divisibilidade apresentados no índice e no interior dos capítulos do livro de Álvaro Andrini (1989)

Conteúdos de divisibilidade no índice do livro de Álvaro Andrini (1989)	Conteúdos de divisibilidade no interior dos capítulos
9: DIVISIBILIDADE (p. 103)	• Múltiplo de um número (p. 103) – Apresenta definição de múltiplo um número • Conjunto dos múltiplos de um número natural – Apresenta o cálculo dos múltiplos pela operação de multiplicação (p. 103) – Exercícios: 1 a 4 questões. (p. 103). • Divisores de um número (p. 105) – Apresenta definição de divisor – Apresenta o cálculo dos divisores pela operação de divisão (p. 105) – Conjunto dos divisores de um número (p. 105) – Exercícios de 1 a 4 questões (p. 105) • CrITÉRIOS de divisibilidade (p. 106) – Definição a) Divisibilidade por 2 – Exercícios (p. 106); b) Divisibilidade por 3 – Exercícios (p. 107); c) Divisibilidade por 4 – Exercício (p. 107) d) Divisibilidade por 5 e e) por 6 – Exercício (p. 108) f) Divisibilidade por 9 – Exercício (p. 109) g) Divisibilidade por 10 – Exercício (p. 109) - Resumo dos critérios de (p. 110) – Exercícios Complementares de 1 a 8 questões (p. 111); – Testes de 1 a 114 (com questões das Olimpíadas de Matemática) (p. 112).

Quadro 51: Continuação

Conteúdos de divisibilidade no índice do livro de Álvaro Andrini (1984)	Conteúdos de divisibilidade no interior dos capítulos
10: NÚMEROS PRIMOS E NÚMEROS COMPOSTOS (p. 115)	• Números primos – Definição de Números primos (p. 115) – Definição de Números compostos (p. 115) – Exercícios de 1 a 6 questões (p. 116) • Reconhecimento de um número primo pelo processo de divisão por primos (p. 117) – Exercícios de 1 a 5 questões (p. 117) • Decomposição de um número em fatores primos (fatoração) (p. 118) – Fatoração pela multiplicação (método da árvore) e decomposição em fatores primos pela divisão sucessiva (p. 118) – Exercícios (p. 119) – Exercícios Complementares e testes (p. 120).
11: MÁXIMO DIVISOR COMUM (p. 122).	• Máximo divisor comum (p. 122). – Definição de Máximo divisor comum (p.122) – Determinação do mdc pelas sequências dos divisores fazendo a intersecção dos conjuntos e apresentando os divisores comuns pelo Diagrama de Venn. • Processos práticos para determinação do m.d.c. (p. 122) a) Por decomposição em fatores primos – fatoração completa (p. 123) b) Por divisão sucessivas (pelo processo prático de Euclides) (pp. 123-124) – Exercícios de 1 a 6 questões (p. 125) • Números Primos entre si (p. 126) - Exercícios (p. 128). - Exercícios Complementares (p. 126) – Testes (p. 127).
12 – MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM (p. 129).	• Mínimo múltiplo comum (p. 129). – Definição de mínimo múltiplo comum (p. 129) – Determinação do mmc pelos conjuntos dos múltiplos e identificação dos múltiplos comuns pela intersecção dos conjuntos. – Exercícios (p. 129) • Processos práticos para determinação do mmc a) Por decomposição em fatores primos (fatoração completa) divisão sucessiva e separada e fatoração completa (p. 130) b) Decomposição simultânea (p. 131) – Determinação do mmc pela decomposição em fatores primos – divisão sucessiva e simultânea (p. 131) – Exercícios (p. 131) – Exercícios Complementares (p. 133) – Testes (p. 134).

Fonte: Álvaro Andrini (1989). Elaborado pela autora.

Como podemos observar no Quadro 51 acima, o autor ainda apresenta em seu livro a influência da Matemática Moderna, com apresentação da simbologia e linguagem da Teoria dos Conjuntos.

Quadro 52: LDM-7 – Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro de Álvaro Andrini (1989)

Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade LDM-7 de Álvaro Andrini (1989)				
	CONTEÚDOS DE DIVISIBILIDADE	(P)	(A)	T.CD
1	Múltiplos	---	---	---
1.1	Definição de múltiplos de um número	P	--	
1.2	Ideia de “múltiplo de”	P	--	
1.3	Cálculos dos múltiplos (pela multiplicação)	P	--	
1.4	Sequência dos múltiplos de um número	P	--	
	TOTAL CS-1	04	00	04
2	Divisores	---	---	---
2.1	Definição de divisor de um número	P	--	
2.2	Ideia de “divisível por”	P	--	
2.3	Determinação dos divisores pela sequência (divisão ou multiplicação)	P	--	
2.4	Determinação de todos divisores pela DFP (Fatoração completa)	--	A	
2.5	Determinação de todos divisores pela DFP (Algoritmo de Euclides)	--	A	
2.6	Cálculo do Número (quantidade) de divisores	--	A	
	TOTAL CS-2	03	03	06
3	Critério de divisibilidade	---	---	---
3.1	Definição	P	--	
3.2	Divisibilidade por 2	P	--	
3.3	Divisibilidade por 3	P	--	
3.4	Divisibilidade por 4	P	--	
3.5	Divisibilidade por 5	P	--	
3.6	Divisibilidade por 6	P	--	
3.7	Divisibilidade por 7	--	A	
3.8	Divisibilidade por 9	P	--	
3.9	Divisibilidade por 10	P	--	
3.10	Divisibilidade por 11	--	A	
	TOTAL CS-3	08	02	10
4	Números primos	---	---	---
4.1	Definição de Números primos	P	--	
4.2	Definição de Número composto	P	--	
4.3	Identificação de números primos pelo Crivo de Eratóstenes.	--	A	
4.4	Reconhecimento de um número primo pela divisão por primos	P	--	
	TOTAL CS-4	03	01	04
5	Fatoração completa – Decomposição em fatores primos (DFP)	---	---	---
5.1	Definição de fatoração	P	--	
5.2	Definição de fatoração completa (TFA)	--	A	
5.3	Cálculo dos fatores primos pela multiplicação	P	--	
5.4	Decomposição em fatores primos por divisão sucessiva	P	--	
5.5	Aplicação de fatoração no cálculo de raiz quadrada	--	A	
	TOTAL CS-5	03	02	05

Quadro 52: Continuação

6	Máximo Divisor Comum (MDC)	---	---	---
6.1	Definição de Máximo divisor comum	P	--	
6.2	Determinação do mdc pela sequência de divisores	P	--	
6.3	Determinação do mdc pela fatoração completa	P	--	
6.4	Determinação do mdc pela DFP, divisão sucessiva e simultânea	--	A	
6.5	Determinação do mdc pelo processo prático de Euclides	P	--	
6.6	Identificação de primos entre si	P	--	
TOTAL CS-6		05	01	06
7	Mínimo múltiplo comum (MMC)	---	---	---
7.1	Definição de mmc	P	--	
7.2	Determinação do mmc pela sequência dos múltiplos	P	--	
7.3	Determinação do mmc pela DFP em separado ou fatoração completa	P	--	
7.4	Determinação do mmc pela DFP divisão sucessiva e simultânea	P	--	
7.5	Determinação do mmc pela relação com o mdc	--	A	
TOTAL CS-7		04	01	05
TOTAL GERAL		30	10	40

Fonte: Andrini (1989). Elaborado pela autora.

Tabela 35: LDM-7 – Resultado final quantitativo e qualitativo da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro de Álvaro Andrini (1989)

Resultado final quantitativo e qualitativo da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade – LDM-7 de Álvaro Andrini (1989)					
Conteúdos Principais			Conteúdos Secundários		Total
CP	CP _P	CP _A	CS _P	CS _A	CD _P
CP1	01	-	04	00	04
CP2	01	-	03	03	06
CP3	01	-	08	02	10
CP4	01	-	03	01	04
CP5	01	-	03	02	05
CP6	01	-	05	01	06
CP7	01	-	04	01	05
Total	07	00	30	10	40
Conceito: “Regular” (ausência moderadamente expressiva dos conteúdos de divisibilidade)					
Legenda: CD _P (Conteúdos de divisibilidade presentes); CP _P (Conteúdos principais presentes); CP _A (Conteúdos principais ausentes); CS _P (Conteúdos secundários presentes); CS _A (Conteúdos secundários ausentes).					

Conforme podemos observar na Ficha de análise (Quadro 52) e na Tabela 35, os conteúdos principais estão todos presentes. Dos conteúdos secundários de divisibilidade, o livro apresenta os seguintes conteúdos ausentes:

CP-2 Divisores: não apresenta nenhum método de determinação dos divisores, nem pela fatoração completa, nem pelo processo prático de Euclides, como também não apresenta o cálculo de números de divisores;

CP-3 Critérios de divisibilidade: não apresenta os critérios de divisibilidade por 7 e nem por 11; CP-4 Números primos: não apresenta o reconhecimento dos números primos num intervalo de números pelo Crivo de Eratóstenes;

CP-5 Fatoração – decomposição em fatores primos: não apresenta a definição de fatoração completa (TFA) e nem a aplicação da fatoração no cálculo da raiz quadrada;

CP-6 Máximo divisor comum: Não apresenta a determinação do mdc pela divisão sucessiva e simultânea de dois ou mais números;

CP-7 Mínimo múltiplo comum: Não apresenta a determinação do mmc pela relação com o mdc dos números dados.

Conforme podemos observar na Ficha de análise (Quadro 52) e na Tabela 35, o livro apresenta 25% de conteúdos ausentes e, desse modo, pelos indicadores é classificado com o conceito “Regular” por apresentar ausência moderadamente expressiva dos conteúdos de divisibilidade.

6.2.3 LDM-8: Análise do Livro de Linaldo Malveira(1991)

Os livros analisados anteriormente tinham formatos diferentes, o tamanho era menor. Este livro tem um tamanho maior, com o formato que atualmente os livros didáticos são produzidos. Ainda apresenta a influência da Matemática Moderna, e começa os conteúdos matemáticos com a Teoria dos Conjuntos na Unidade 1 (Introdução; Noções fundamentais; Igualdade de conjunto; Conjuntos especiais; Subconjuntos; Reunião de conjuntos; Intersecção de conjuntos; e Produto cartesiano).

Os conteúdos matemáticos deste livro estão distribuídos em 10 unidades que estão divididas em capítulos. Os conteúdos de divisibilidade estão contemplados na Unidade 5.

A seguir apresentamos o Quadro 53 com os dados gerais do livro que será analisado.

Quadro 53: LDM-8 – Dados gerais do livro de Linaldo Malveira (1991)

LDM-8	1991		
Titulo	MATEMÁTICA FÁCIL – 5ª série		
Autor	LINALDO JOSÉ MALVEIRA ALVES ¹⁰¹		
Editora	Editora Ática	São Paulo 7ª edição	Ano: 1991
Quantidade de páginas do livro	207	Dimensões do livro: 20 cm por 27,50 cm	
Distribuição do conteúdo	10 Unidades		
Unidade dedicada à divisibilidade	Unidade 5: Divisores e múltiplos		(84 – 102) 19 páginas (9,2%)
Unidade que antecede divisibilidade	Unidade 4: Operações fundamentais com números naturais		(52 – 78) 27 páginas
Unidade posterior à divisibilidade	Unidade 6: Números fracionários		(103 – 118) 16 páginas

Fonte: Linaldo Malveira (1991).

O autor inicia a Unidade 5 – Divisores e múltiplos apresentando o objetivo geral: “*estudar a divisibilidade, a decomposição em fatores primos, o cálculo do mdc e do mmc de números naturais*” e os objetivos específicos conforme a seguir:

Objetivos específicos:

“Ao final desta unidade, o aluno será capaz de:

- 1) Identificar afirmativas verdadeiras e falsas sobre divisores e múltiplos;
- 2) Identificar números pares, ímpares, primos e compostos;
- 3) Identificar números que satisfaçam os critérios de divisibilidade;
- 4) Escrever números naturais na forma fatorada;
- 5) Determinar o conjunto dos divisores de números naturais;
- 6) Calcular o mdc de dois ou mais números;
- 7) Determinar o mmc de dois ou mais números.

A seguir, apresentamos o Quadro 54, com os conteúdos de divisibilidade no sumário e no interior do capítulo, a Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro (Quadro 55) e, por fim, a Tabela 36 com os dados do resultado final da análise com a qualificação do livro de acordo com os indicadores.

¹⁰¹ Bacharel em Matemática pela Universidade Federal de Pernambuco. Licenciado em Matemática pela Universidade de Brasília. Especialização, em nível de Pós-Graduação, em Álgebra Moderna, em Montevideu, Uruguai. Licenciado em Pedagogia pela União das Faculdades Francanas, Franca, SP. Especialização, em nível de Pós-Graduação, em Metodologia do Ensino Superior pelas mesmas faculdades. Professor de Matemática da Fundação Educacional do Distrito Federal. Coordenador de Matemática, para o ensino do 2º grau, da fundação Educacional do Distrito Federal, de 1971 a 1976. Professor de Matemática da associação de Ensino Unificado do Distrito Federal (AEUDF) (MALVEIRA, 1991).

Quadro 54: LDM-8 – Conteúdos de divisibilidade apresentados no índice e no interior dos capítulos do livro de Linaldo Malveira (1991)

Conteúdos de divisibilidade no sumário do LDM-8 de Linaldo Malveira (1991) Unidade 5 – Divisores e múltiplos	Conteúdos de divisibilidade no interior da Unidade 5 e dos capítulos
Unidade 5 – Divisores e Múltiplos (p. 83)	Divisores e Múltiplos: (p. 83) – Apresenta o objetivo geral e específicos da Unidade.
1. Divisibilidade por: 2, 3, 5 e 10, 84	1. Divisibilidade (p. • Definição (p. 84) • Divisibilidade por 2, 3, (p. 84) • Divisibilidade por 5 e 10 (p. 85) Exercícios – Grupo 1 (p. 85).
2. Números primos (p. 86)	• Definição de Números primos (p. 86) • Definição de Números compostos (p. 86) • Reconhecimento de um número primo pela divisão por primos (p. 87) Exercícios – Grupo 2 (p. 87).
3. Decomposição em fatores primos (fatoração) (p. 88)	• Definição de fatoração (p. 88) • Decomposição de fatores primos pela divisão sucessiva (p. 89). Exercícios de fixação – Grupo 3 (p. 89).
4. Divisores de um número (p. 89)	• Determinação dos divisores de um número pelo algoritmo de Euclides (p. 89) Exercícios de fixação – Grupo 4 (p. 90).
5. Máximo Divisor Comum (p. 91)	• Determinação do MDC pela sequência dos divisores de 24 e 60 (p. 91) • Definição de MDC (p. 91) • Determinação do MDC pelo algoritmo de Euclides e fatoração completa (p. 92) • Identificação dos números primos entre si (p. 93) Exercícios de fixação – Grupo 5 (p. 93).
6. Múltiplos de um número (p. 93)	• Cálculo dos múltiplos de um número pela multiplicação (p. 93) e sequências dos múltiplos • Definição de múltiplo (p. 93) Exercícios de fixação – Grupo 6 (p. 94).
7. Mínimo Múltiplo Comum (p. 94)	• Determinação do MMC pelas sequências dos múltiplos comuns (p. 94) • Definição de MMC (p. 95) • Determinação do MMC pela divisão sucessiva em separado (p. 95) • • Determinação do MMC pela divisão sucessiva simultânea (p. 96) Exercícios de fixação – Grupo 7 (p. 97).
8. Relação entre o m.d.c. e o m.m.c. de Dois Números (p. 97)	• Regra: o produto de dois números diferentes de zero é igual ao produto do mdc pelo mmc desses mesmos números (p. 97). Exercícios de fixação – Grupo 8 (p. 98).
Leitura complementar: Outros critérios de divisibilidade (por 4, 6, 8, 9, 11 e 12), (p.102)	• Divisibilidade por 4 (p. 101) • Divisibilidade por 6, por 8, 9, 11 e por 12 (p. 102).

Fonte: Malveira (1991). Elaborado pela autora.

O autor introduz os conteúdos de divisibilidade a partir de exemplos, seguidos de definições, regras e de métodos de cálculos. Além disso, apresenta exercícios de

fixação ao final de cada conteúdo trabalhado. Tem uma linguagem clara e objetiva, apresentando os conteúdos de forma bastante sucinta. Ainda apresenta algumas representações da Teoria dos Conjuntos como nos casos de determinação do mdc e mmc em que usa a simbologia de intersecção dos conjuntos de divisores e múltiplos.

A seguir apresentamos a Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade (Quadro 55).

Quadro 55: LDM-8 – Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro de Linaldo Malveira (1991)

Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade LDM-8 de Linaldo Malveira (1991)				
	CONTEÚDOS DE DIVISIBILIDADE	(P)	(A)	T.CD
1	Múltiplos	---	---	---
1.1	Definição de múltiplos de um número	P	--	
1.2	Ideia de “múltiplo de”	P	--	
1.3	Cálculos dos múltiplos (pela multiplicação)	P	--	
1.4	Sequência dos múltiplos de um número	P	--	
	TOTAL CS-1	04	00	04
2	Divisores	---	---	---
2.1	Definição de divisor de um número	--	A	
2.2	Ideia de “divisível por”	P	--	
2.3	Determinação dos divisores pela sequência (divisão ou multiplicação)	--	A	
2.4	Determinação de todos divisores pela DFP (Fatoração completa)	--	A	
2.5	Determinação de todos divisores pela DFP (Algoritmo de Euclides)	P	--	
2.6	Cálculo do Número (quantidade) de divisores	--	A	
	TOTAL CS-2	02	04	06
3	Crítério de divisibilidade	---	---	---
3.1	Definição	P	--	
3.2	Divisibilidade por 2	P	--	
3.3	Divisibilidade por 3	P	--	
3.4	Divisibilidade por 4	P	--	
3.5	Divisibilidade por 5	P	--	
3.6	Divisibilidade por 6	P	--	
3.7	Divisibilidade por 7	--	A	
3.8	Divisibilidade por 9	P	--	
3.9	Divisibilidade por 10	P	--	
3.10	Divisibilidade por 11	P	--	
	TOTAL CS-3	09	01	10
4	Números primos	---	---	---
4.1	Definição de Números primos	P	--	
4.2	Definição de Número composto	--	A	
4.3	Identificação de números primos pelo Crivo de Eratóstenes.	P	--	
4.4	Reconhecimento de um número primo pela divisão por primos	P	--	
	TOTAL CS-4	03	01	04

Quadro 55: Continuação

5	Fatoração completa – Decomposição em fatores primos (DFP)	---	---	---
5.1	Definição de fatoração	P	--	
5.2	Definição de fatoração completa (TFA)	--	A	
5.3	Cálculo dos fatores primos pela multiplicação	P	--	
5.4	Decomposição em fatores primos por divisão sucessiva	P	--	
5.5	Aplicação de fatoração no cálculo de raiz quadrada	--	A	
	TOTAL CS-5	03	02	05
6	Máximo divisor comum (MDC)	---	---	---
6.1	Definição de Máximo divisor comum	P	--	
6.2	Determinação do mdc pela sequência de divisores	P	--	
6.3	Determinação do mdc pela fatoração completa	P	--	
6.4	Determinação do mdc pela DFP, divisão sucessiva e simultânea	--	A	
6.5	Determinação do mdc pelo processo prático de Euclides	P	--	
6.6	Identificação de primos entre si	P	--	
	TOTAL CS-6	05	01	06
7	Mínimo múltiplo comum (MMC)	---	---	---
7.1	Definição de mmc	P	--	
7.2	Determinação do mmc pela sequência dos múltiplos	P	--	
7.3	Determinação do mmc pela DFP em separado ou fatoração completa	P	--	
7.4	Determinação do mmc pela DFP divisão sucessiva e simultânea	P	--	
7.5	Determinação do mmc pela relação com o mdc	P	--	
	TOTAL CS-7	05	00	05
	TOTAL GERAL	31	09	40

Fonte: Malveira (1991). Elaborado pela autora.

Tabela 36: LDM-8 – Resultado final quantitativo e qualitativo da presença-ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro de Linaldo Malveira (1991)

Resultado final quantitativo e qualitativo da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade – LDM-8 de Linaldo Malveira (1991)					
Conteúdos Principais			Conteúdos Secundários		Total
CP	CP _P	CP _A	CS _P	CS _A	CD _P
CP1	01	-	04	00	04
CP2	01	-	02	04	06
CP3	01	-	09	01	10
CP4	01	-	03	01	04
CP5	01	-	03	02	05
CP6	01	-	05	01	06
CP7	01	-	05	00	05
Total	07	00	31	09	40
Conceito: Bom (ausência pouco expressiva dos conteúdos de divisibilidade)					
Legenda: CD _P (Conteúdos de divisibilidade presentes); CP _P (Conteúdos principais presentes); CP _A (Conteúdos principais ausentes); CS _P (Conteúdos secundários presentes); CS _A (Conteúdos secundários ausentes).					

Conforme podemos observar na Ficha de análise e na Tabela 36, com o resultado final da análise realizada, os conteúdos principais de divisibilidade estão todos contemplados, mas observamos a ausência dos seguintes conteúdos secundários:

CP-2 Divisores: não apresenta o método de determinação dos divisores pela sequência dos divisores e nem pela fatoração completa, como também não apresenta o cálculo de números de divisores; **CP-3 Critérios de divisibilidade:** não apresenta os critérios de divisibilidade por 7; **CP-4 Números primos:** não apresenta o reconhecimento dos números primos num intervalo de números pelo Crivo de Eratóstenes; **CP-5 Fatoração completa** (decomposição em fatores primos): não apresenta a definição de fatoração completa (TFA) e nem a aplicação da fatoração no cálculo da raiz quadrada; **CP-6 Máximo divisor comum:** não apresenta a determinação do mdc pela divisão sucessiva e simultânea de dois ou mais números.

Conforme podemos observar na Ficha de análise (Quadro 55) e na Tabela 36, o livro apresenta 22,5% de conteúdos ausentes e, desse modo, pelos indicadores é classificado com o conceito “Bom” por apresentar ausência pouco expressiva dos conteúdos de divisibilidade.

6.2.4 LDM-9: Análise do livro de Bongiovanni, Vissoto e Laureano “Matemática e vida” (1995)

O Livro “Matemática e vida” de Bongiovanni, Vissoto e Laureano (1995) apresenta o sumário, dividido em três unidades divididas em 36 capítulos. A Unidade I tem 19 capítulos (Capítulo de 1 a 19 capítulos); a Unidade II (Capítulo 20 a 27) tem 8 (oito) capítulos; a Unidade III (de 28 ao 36), têm nove capítulos. Este livro já foi elaborado seguindo as novas tendências pedagógicas da Educação Matemática, introduzindo os conteúdos com situações-problema contextualizadas e ilustrações coloridas e várias seções como “Fazendo você aprende”, “Treinando em casa”, “Calculando”. A seguir expomos a apresentação do livro pelos autores.

APRESENTAÇÃO

Escrever um livro é fácil?

Não quando se pretende um livro que leve você, aluno, a gostar cada vez mais da Matemática.

Nesse sentido, **Matemática e Vida** é um livro pretensioso.

Aqui não é proibido trazer a Matemática de casa para a escola ou levar a Matemática da escola para a vida.

Um pouco de história, alguns desafios. Use e abuse da régua e dos outros instrumentos de medida, da criatividade e do raciocínio.

E, são tantas as novidades, algumas bem curiosas.
Assim é matemática e Vida. Agora é com você. Um bom ano letivo.

A seguir apresentamos o Quadro 56 com os dados gerais do livro que será analisado, a apresentação pelo autor aos alunos, o Quadro 57 com os conteúdos de divisibilidade que constam no sumário do livro e no interior da unidade e capítulos, a Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade (Quadro 58) no livro e, por fim, a Tabela 37 com os dados do resultado final da análise com a qualificação do livro de acordo com os indicadores.

Quadro 56: LDM-9 – Dados gerais do livro de Bongiovanni, Vissoto e Laureano (1995)

LDM-9	1995 – PNLD-1996		
Título	MATEMÁTICA E VIDA: NÚMEROS, MEDIDAS E GEOMETRIA		
Autores	VINCENZO BONGIOVANNI¹⁰²; OLÍMPIO RUDININ VISSOTO LEITE ¹⁰³; JOSÉ LUIZ TAVARES LAUREANO¹⁰⁴		
Editora:	Ática	Edição: 11 ^a	Ano: 1995
Quantidade de páginas do livro	264	Dimensões da página: 20 cm por 27,50 cm	
Distribuição do conteúdo:	03 Unidades		36 capítulos
Capítulo que antecede divisibilidade	Capítulo 14: Par ou ímpar		(78 - 80) 03 páginas
Capítulos dedicados à divisibilidade	Unidade I – Números Naturais: Capítulos de 15 a 19: Divisores naturais de um número		(81 - 102) 22 páginas - 8,3 %
Capítulo posterior ao de divisibilidade	Unidade II – Capítulos 20: O nascimento da Geometria		(116 - 125) 10 páginas

Fonte: Bongiovanni et al. (1995). Elaborado pela autora.

Os conteúdos de divisibilidade estão distribuídos em cinco capítulos, do 15 ao 19, conforme podemos observar no Quadro 57, em que expomos os conteúdos de divisibilidade de acordo com o sumário do livro e como estão distribuídos no interior dos capítulos.

¹⁰² Vincenzo Bongiovanni – Licenciado em Matemática pela USP, Mestre em Matemática pela PUC-SP e Professor de Matemática de 1º, 2º e 3º graus.

¹⁰³ Olímpio Rudinin Vissoto Leite – Licenciado em Matemática pela USP. Pós-graduado em matemática aplicada pela USP. Professor de Matemática de 1º, 2º e 3º graus.

¹⁰⁴ José Luiz Tavares Laureano – licenciado em Matemática pela Fundação Santo André (São Paulo). Pós-graduado em Administração da Produção pelas Faculdades Santana e São Paulo. Professor de Matemática de 1º, 2º e 3º graus.

Quadro 57: LDM-9 – Conteúdos de divisibilidade no sumário e no interior do capítulo do livro de Bongiovanni, Vissoto e Laureano (1995)

Conteúdos de divisibilidade no sumário conforme o livro de Bongiovanni et al. (1995)	Conteúdos de divisibilidade no interior dos capítulos
Capítulo 15 – Os divisores naturais de um número	Definição • Fazendo você aprende (os divisores naturais de 6) (p. 81) • Exercícios propostos; seções: “Treinando em casa”; “Calculando ...”; “Brincando com números”. ► Todos os divisores de um número natural (p. 83). • Decomposição em fatores primos; • Dispositivo prático (de Euclides)
Capítulo 16 – Descobrindo regras de divisibilidade 1. Uma situação-problema	• Divisibilidade por 2 (p. 85), por 3 (p. 86) • Divisibilidade por 5 (p. 87) • Anos bissextos (divisibilidade por 4) (p. 86) • Em duas questões propostas menciona a divisibilidade por 6 e 10 (p. 86) • Treinando em casa • Calculando (de cabeça; com uso de algoritmo) • Brincando com geometria (p. 87)
Capítulo 17 – O que é um número primo? 1. Descobrindo os números primos (p. 88) 2. Decompondo um número natural em fatores primos (p. 89) 3. Processo prático (p. 89)	• Definição de número primo (p. 88) • Decomposição em fatores primos pela divisão sucessiva com o traço vertical (p. 89); Exercícios propostos identificados por: • Fazendo você aprende (p. 89); • Treinando em casa • Calculando (de cabeça; com uso de algoritmo) (p. 90) • Brincando com geometria “OPCIONAL” • Como reconhecer se um número é primo? • Crivo de Eratóstenes (no intervalo de 1 a 100) (p. 91) • Modo prático de reconhecer se um número é primo pela divisão por primos (p. 92).
Capítulo 18 – Máximo divisor comum 1. Descobrindo o máximo divisor comum dos números naturais 2. Números primos entre si.	• Situação-problema, determinação do mdc pelas sequências dos divisores (p. 93) • Definição de mdc (p. 93) • Fazendo você aprende (p. 89); • Treinando em casa • Calculando (de cabeça; com uso de algoritmo) (p. 90) • Brincando com geometria (p. 95). ► Métodos de obtenção do mdc – • Método pela decomposição em fatores primos (p. 96); • Método das divisões sucessivas ou método de Euclides (p. 96) Exercícios (p. 97).

Quadro 57: continuação

Conteúdos de divisibilidade no índice conforme o livro de Bongiovanni et al. (1995)	Conteúdos de divisibilidade no interior dos capítulos
Capítulo 19 – Os múltiplos naturais de um número natural 1. Os múltiplos naturais 2. Descobrindo o mínimo múltiplo comum de números naturais 3. Método de obtenção do mmc 4. Dispositivo prático.	- Definição de múltiplos (p. 98) - Método de obtenção do mmc. - Dispositivo prático pela decomposição em fatores primos, sucessiva simultânea (p. 99) - Fazendo você aprende (p. 100); - Treinando em casa (p. 101).

Fonte: Bongiovanni, Vissoto e Laureano I (1995). Elaborado pela autora

Os autores introduzem os conteúdos de divisibilidade a partir de exemplos, seguidos de definições e de métodos de cálculos. Além disso, apresentam exemplos, situações-problema contextualizadas nos assuntos de mdc e mmc. Apresenta também alguns aspectos históricos e bibliográficos, embora de forma bastante resumida.

A seguir apresentamos a ficha da análise do LDM-9 da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade (Quadro 58).

Quadro 58: LDM-9 – Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro de Bongiovanni, Vissoto e Laureano (1995).

Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade LDM- 9 de Bongiovanni, Vissoto e Laureano(1995)				
	CONTEÚDOS DE DIVISIBILIDADE	(P)	(A)	T.CD
1	Múltiplos	---	---	---
1.1	Definição de múltiplos de um número	P	--	
1.2	Ideia de “múltiplo de”	P	--	
1.3	Cálculos dos múltiplos (pela multiplicação)	P	--	
1.4	Sequência dos múltiplos de um número	P	--	
	TOTAL CS-1	04	00	04
2	Divisores	---	---	---
2.1	Definição de divisor de um número	P	--	
2.2	Ideia de “divisível por”	P	--	
2.3	Determinação dos divisores pela sequência (divisão ou multiplicação)	P	--	
2.4	Determinação de todos divisores pela DFP (Fatoração completa)	P	--	
2.5	Determinação de todos divisores pela DFP (Algoritmo de Euclides)	P	--	
2.6	Cálculo do Número (quantidade) de divisores	--	A	
	TOTAL CS-2	05	01	06
3	Critério de divisibilidade	---	---	---
3.1	Definição	--	A	
3.2	Divisibilidade por 2	P	--	
3.3	Divisibilidade por 3	P	--	
3.4	Divisibilidade por 4	P	--	
3.5	Divisibilidade por 5	P	--	

Quadro 58: Continuação

3.6	Divisibilidade por 6	P	--	
3.7	Divisibilidade por 7	--	A	
3.8	Divisibilidade por 9	--	A	
3.9	Divisibilidade por 10	P	--	
3.10	Divisibilidade por 11	--	A	
	TOTAL CS-3	06	04	10
4	Números primos	---	---	---
4.1	Definição de Números primos	P	--	
4.2	Definição de Número composto	--	A	
4.3	Identificação de números primos pelo Crivo de Eratóstenes.	P	--	
4.4	Reconhecimento de um número primo pela divisão por primos	P	--	
	TOTAL CS-4			04
5	Fatoração completa – Decomposição em fatores primos (DFP)	---	---	---
5.1	Definição de fatoração	P	--	
5.2	Definição de fatoração completa (TFA)	--	A	
5.3	Cálculo dos fatores primos pela multiplicação	P	--	
5.4	Decomposição em fatores primos por divisão sucessiva	P	--	
5.5	Aplicação de fatoração no cálculo de raiz quadrada	--	A	
	TOTAL CS-5	03	02	05
6	Máximo Divisor Comum (MDC)	---	---	---
6.1	Definição de Máximo divisor comum	P	--	
6.2	Determinação do mdc pela sequência de divisores	P	--	
6.3	Determinação do mdc pela fatoração completa	P	--	
6.4	Determinação do mdc pela DFP, divisão sucessiva e simultânea	P	--	
6.5	Determinação do mdc pelo processo prático de Euclides	P	--	
6.6	Identificação de primos entre si	P	--	
	TOTAL CS-6	06	00	06
7	Mínimo múltiplo comum (MMC)	---	---	---
7.1	Definição de mmc	P	--	
7.2	Determinação do mmc pela sequência dos múltiplos	--	A	
7.3	Determinação do mmc pela DFP em separado ou fatoração completa	P	--	
7.4	Determinação do mmc pela DFP divisão sucessiva e simultânea	P	--	
7.5	Determinação do mmc pela relação com o mdc	--	A	
	TOTAL CS-7	03	02	05
	TOTAL GERAL	31	09	40

Fonte: Bongiovanni, Vissoto e Laureano (1995). Elaborada pela autora.

A seguir apresentamos a Tabela 37, com o resultado final da análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro de Bongiovanni, Vissoto e Laureano (1995).

Tabela 37: LDM-9 – Resultado final quantitativo e qualitativo da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade do livro de Bongiovanni et al. (1995)

Resultado final quantitativo e qualitativo da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade – LDM-9 de Bongiovanni, Vissoto e Laureano (1995).					
Conteúdos Principais			Conteúdos Secundários		Total
CP	CP _P	CP _A	CS _P	CS _A	CD _P
CP1	01	-	04	00	04
CP2	01	-	05	01	06
CP3	01	-	06	04	10
CP4	01	-	03	01	04
CP5	01	-	03	02	05
CP6	01	-	06	00	06
CP7	01	-	03	02	05
Total	07	00	30	10	40
Conceito: Regular (ausência moderadamente expressiva dos conteúdos de divisibilidade)					
Legenda: CD _P (Conteúdos de divisibilidade presentes); CP _P (Conteúdos principais presentes); CP _A (Conteúdos principais ausentes); CS _P (Conteúdos secundários presentes); CS _A (Conteúdos secundários ausentes).					

Conforme a Ficha de Análise (Quadro 58) e Tabela 37 com o resultado final, observamos que o livro contempla todos os conteúdos principais de divisibilidade, entretanto, mas constatamos a ausência dos seguintes conteúdos secundários:

CP-2 Divisores: não apresenta o método de determinação dos números (quantidade) de divisores; **CP-3 Critérios de divisibilidade:** não apresenta a definição e nem os critérios de divisibilidade por 7, 9 e 11; **CP-4 Números primos:** não apresenta a definição de números compostos; **CP-5 Fatoração completa** (decomposição em fatores primos): não apresenta a definição de fatoração completa (TFA) e nem a aplicação da fatoração no cálculo da raiz quadrada; **CP-6 Mínimo múltiplo comum:** não apresenta a determinação do mmc pela fatoração completa e nem pela relação com o mdc de dois ou mais números.

Conforme podemos observar na Ficha de análise (Quadro 58) e na Tabela 37, o livro apresenta 25% de conteúdos ausentes e, desse modo, pelos indicadores é classificado com o conceito “Regular” por apresentar ausência moderadamente expressiva dos conteúdos de divisibilidade.

6.2.5 LDM-10: Análise do Livro de Iracema Mori e Dulce Onaga “Matemática: ideias e desafios” (2002) – PNLD-2003

O livro de Mori e Onaga “Matemática: ideias e desafios” (2002) está organizado em 12 Unidades¹⁰⁵ e cada unidade em capítulos. Sendo que os conteúdos de divisibilidade estão na Unidade 5 (cinco).

A seguir expomos a apresentação do livro pelas autoras aos alunos, e apresentamos o Quadro 59 com os dados gerais do livro que será analisado, o Quadro 60, com os conteúdos de divisibilidade no sumário do livro e no interior do capítulo, a Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro (Quadro 61) e, por fim, na Tabela 38, o resultado final da análise com a qualificação do livro de acordo com os indicadores. A seguir expomos a apresentação do livro pelas autoras aos alunos:

Caro estudante,
Ideias e desafios, molas propulsoras para descobertas e desenvolvimento do conhecimento.
Pensando nisso, escrevemos a coleção **Matemática: Ideias e Desafios**. Ao longo da obra, procuramos mostrar, em vários momentos, que o conhecimento matemático é resultado da vivência e resolução de problemas do cotidiano, da observação dos fenômenos que ocorrem na Natureza. Aceitando os desafios que esta obra lhe propõe, você será instigado a resolvê-los, e, conseqüentemente, desenvolverá ideias e conceitos, acrescentando novos conhecimentos ao seu acervo matemático. Terá a oportunidade de aprofundar, de maneira estimulante e participativa, o conhecimento adquirido nesta matéria tão presente no seu cotidiano. Aprenderá a utilizar novas ferramentas da Matemática em sua interação com o espaço em que vive, o espaço dos números, das formas, das medidas e das informações, ou seja, o espaço da vida. Nosso esforço conjunto (autor, professor e aluno) terá valido a pena se você desempenhar com perseverança o papel que lhe cabe na construção de seu próprio conhecimento. Isto proporcionará a você maior segurança na capacidade de aprender Matemática.

As autoras

O livro apresenta a Unidade 5 “Divisibilidade”, com uma fotografia bem grande, seguida de uma introdução e os demais conteúdos de divisibilidade iniciam com exemplos e/ou definições. Apresenta no final de cada conteúdo “Exercícios”, “Problemas” e “Exercícios complementares”, bem como “Seção livre”.

¹⁰⁵ No Sumário e nem na apresentação do livro não há nenhuma indicação de capítulos ou unidades, mas pela representação no interior do livro, há uma numeração maior com título principal e outra numeração com títulos como se fossem capítulos, dessa forma, vamos considerar que está dividido em Unidades e cada Unidade em capítulos.

A seguir apresentamos o Quadro 59, com os dados gerais do livro, seguido do Quadro 60, com os conteúdos de divisibilidade no sumário do livro e no interior da Unidade 5, que contempla os conteúdos de divisibilidade.

Quadro 59: LDM-10 – Dados gerais do Livro de Iracema Mori e Dulce Onaga (2002)

LDM-10	DE 2002 – PNDL-2003		
Título	Matemática ideias e desafios 5ª Série		
Autor	IRACEMA MORI ¹⁰⁶ E DULCE SATIKO ONAGA ¹⁰⁷		
Editora	Saraiva	10ª edição revista e atualizada (2001)	5ª tiragem (2002)
Quantidade de páginas do livro	288	Dimensões da página 20,50 por 27,50 cm	
Distribuição do conteúdo:	12 Unidades		
Unidade dedicada à divisibilidade	5 – Divisibilidade	(89 – 114) 26 páginas 9%	
Unidade que antecede à de divisibilidade	4 – Potenciação e radiciação	(76 – 88) 13 páginas	
Unidade posterior ao de divisibilidade	6 – Frações	(115 – 133) 18 páginas	

Fonte: Mori e Onaga (2001). Elaborado pela autora.

Quadro 60: LDM-10 – Conteúdos de divisibilidade apresentados no sumário e no interior dos capítulos do livro de Mori e Onaga (2002)

Conteúdos de divisibilidade no sumário do LDM-10 de Mori e Onaga (2002) Unidade 5 – Divisibilidade	Conteúdos de divisibilidade no interior dos capítulos
Unidade 5 – Divisibilidade (p. 89) Divisibilidade: uma característica dos números naturais 1. DIVISORES (p. 90)	1. Divisores (p. 90): <i>“Ideia de “divisível por” seus fatores ou por seus divisores”.</i> Definição de divisor; “Exercícios”; “Problemas”. 1.1. Critérios de divisibilidade, (p. 92) • Critério de divisibilidade por 2, (p. 92) • Critério de divisibilidade por 5, (p. 93) • Critério de divisibilidade por 10, (p. 93) • Critério de divisibilidade por 3, (p. 93) • Critério de divisibilidade por 9, (p. 93) Exercícios complementares (p. 94) Seção livre – divisibilidade por 7 (p. 95) • Problemas (p. 95)

¹⁰⁶ Iracema Mori – Licenciada em Matemática pela USP. Professora da rede pública de ensino do estado de São Paulo. Assessora de Matemática em escolas de Ensino Fundamental e Médio da rede pública e particular do estado de São Paulo.

¹⁰⁷ Dulce Satiko Onaga – Licenciada em Matemática pela USP. Professora da rede pública e particular de ensino do estado de São Paulo. Assessora de Matemática em escolas de Ensino Fundamental e Médio da rede pública e particular do estado de São Paulo.

Quadro 60: Continuação

Conteúdos de divisibilidade no sumário do LDM-10 de Mori e Onaga (2002)	Conteúdos de divisibilidade no interior dos capítulos
1. DIVISORES (p. 90)	1.2. Números primos, (p. 96): - Definição de números primos - Definição de números compostos - Reconhecimento de um número primo pela divisão por primos, (p.96). Exercícios (p. 97). “Leitura +” – Reconhecimento de números primos no intervalo de 1 a 50 pelo Crivo de Eratóstenes (p. 97). Exercícios (p. 98) 1.3. Decomposição em fatores primos, (p.98) Definição de decomposição em fatores primos 1.4. Regras prática para a fatoração – pela operação de multiplicação (método da árvore) e pela divisão sucessiva e decomposição em fatores primos (p. 99). 1.5. Determinação dos divisores de um número (p. 99): - Pelo processo prático de Euclides (p. 100) Exercícios (p. 100) Exercícios complementares (p. 101) Seção livre (problema) (p. 101) 1.6 Fatoração e raiz quadrada: - Aplicação da decomposição em fatores primos no cálculo de raiz quadrada (p. 102) Exercícios (p. 102).
2. MÁXIMO DIVISOR COMUM (p. 103)	2. Máximo Divisor Comum (p. 103): Definição do mdc (p. 103) 2.1. Cálculo do M.D.C. pela fatoração completa e exercícios (p. 104). 2.2. Cálculo do M.D.C. pelo processo prático de Euclides (p.105). Exercícios (p. 105) 2.3. Números primos entre si (p.106) Exercícios complementares (p. 107)
3. MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM (p. 108) Múltiplo de um número	3. Mínimo Múltiplo Comum, (p. 108) 3.1. Múltiplo de um número natural, (p. 108) 3.2. Mínimo múltiplo comum m.m.c., (p. 109) 3.3 Cálculo do m.m.c. - Determinação do mmc pela fatoração completa e pela determinação do mmc pela decomposição simultânea (p. 111) - Determinação pela relação dos números primos entre si e pelos múltiplos dos números dados (p. 111) Exercícios e exercícios complementares (p. 112) Problemas (p. 113).

Fonte: Mori e Onaga (2002). Elaborado pela autora.

A ordem dos conteúdos de divisibilidade no livro está da seguinte forma: 1º). Divisores; 2º). Critérios de divisibilidade; 3º). Números primos; 4º). Decomposição em fatores primos; 5º) Máximo divisor comum e 6º). Múltiplos e, 7º). Mínimo múltiplo comum.

Na continuidade, apresentamos a Ficha de análise (Quadro 61) com os dados da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade e a Tabela 38 com o resultado final quanto à presença dos conteúdos de divisibilidade no livro analisado.

Quadro 61: LDM-10 – Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro de Mori e Onaga (2002)

Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade LDM-10 de Iracema Mori e Dulce Onaga (2002)				
	CONTEÚDOS DE DIVISIBILIDADE	(P)	(A)	T.CD
1	Múltiplos	---	---	---
1.1	Definição de múltiplos de um número	P	--	
1.2	Ideia de “múltiplo de”	P	--	
1.3	Cálculos dos múltiplos (pela multiplicação)	P	--	
1.4	Sequência dos múltiplos de um número	P	--	
	TOTAL CS-1	03	00	04
2	Divisores	---	---	---
2.1	Definição de divisor de um número	P	--	
2.2	Ideia de “divisível por”	P	--	
2.3	Determinação dos divisores pela sequência (divisão ou multiplicação)	P	--	
2.4	Determinação de todos divisores pela DFP (Fatoração completa)	P	--	
2.5	Determinação de todos divisores pela DFP (Algoritmo de Euclides)	P	--	
2.6	Cálculo do Número (quantidade) de divisores	--	A	
	TOTAL CS-2	05	01	06
3	Critério de divisibilidade	---	---	---
3.1	Definição	P	--	
3.2	Divisibilidade por 2	P	--	
3.3	Divisibilidade por 3	P	--	
3.4	Divisibilidade por 4	--	A	
3.5	Divisibilidade por 5	P	--	
3.6	Divisibilidade por 6	--	A	
3.7	Divisibilidade por 7	P	--	
3.8	Divisibilidade por 9	P	--	
3.9	Divisibilidade por 10	P	--	
3.10	Divisibilidade por 11	--	A	
	TOTAL CS-3	07	03	10
4	Números primos	---	---	---
4.1	Definição de Números primos	P	--	
4.2	Definição de Número composto	P	--	
4.3	Identificação de números primos pelo Crivo de Eratóstenes.	P	--	
4.4	Reconhecimento de um número primo pela divisão por primos	P	--	
	TOTAL CS-4	04	00	04

Quadro 61: Continuação.

Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade LDM-10 de Iracema Mori e Dulce Onaga (2002)				
	CONTEÚDOS DE DIVISIBILIDADE	(P)	(A)	T.CD
5	Fatoração completa – Decomposição em fatores primos (DFP)	---	---	---
5.1	Definição de fatoração	P	--	
5.2	Definição de fatoração completa (TFA)	P	--	
5.3	Cálculo dos fatores primos pela multiplicação	A	--	
5.4	Decomposição em fatores primos por divisão sucessiva	A	--	
5.5	Aplicação de fatoração no cálculo de raiz quadrada	P	--	
	TOTAL CS-5	05	00	05
6	Máximo Divisor Comum (MDC)	---	---	---
6.1	Definição de Máximo divisor comum	P	--	
6.2	Determinação do mdc pela sequência de divisores	--	A	
6.3	Determinação do mdc pela fatoração completa	P	--	
6.4	Determinação do mdc pela DFP, divisão sucessiva e simultânea	--	A	
6.5	Determinação do mdc pelo processo prático de Euclides	P	--	
6.6	Identificação de primos entre si	P	--	
	TOTAL CS-6	04	02	06
7	Mínimo múltiplo comum (MMC)	---	---	---
7.1	Definição de mmc	P	--	
7.2	Determinação do mmc pela sequência dos múltiplos	P	--	
7.3	Determinação do mmc pela DFP em separado ou fatoração completa	P	--	
7.4	Determinação do mmc pela DFP divisão sucessiva e simultânea	P	--	
7.5	Determinação do mmc pela relação com o mdc	--	A	
	TOTAL CS-7	04	01	05
	TOTAL GERAL	33	07	40

Fonte: Mori e Onaga (2002). Elaborada pela autora.

Tabela 38: LDM-10 – Resultado final quantitativo e qualitativo da presença-ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro de Mori e Onaga (2002)

Resultado final quantitativo e qualitativo da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade – LDM-10 de Iracema Mori e Dulce Onaga (2002)					
Conteúdos Principais			Conteúdos Secundários		Total
CP	CP _P	CP _A	CS _P	CS _A	CD _P
CP1	01	-	04	00	04
CP2	01	-	05	01	06
CP3	01	-	07	03	10
CP4	01	-	04	00	04
CP5	01	-	05	00	05
CP6	01	-	04	02	06
CP7	01	-	04	01	05
Total	07	00	33	07	40
Conceito: Bom (ausência pouco expressiva dos conteúdos de divisibilidade)					
Legenda: CD _P (Conteúdos de divisibilidade presentes); CP _P (Conteúdos principais presentes); CP _A (Conteúdos principais ausentes); CS _P (Conteúdos secundários presentes); CS _A (Conteúdos secundários ausentes).					

Conforme podemos observar na Ficha de análise (Quadro 59) e na Tabela 38, dos resultados finais, todos os conteúdos principais de divisibilidade estão contemplados no livro analisado. Entretanto, constatou-se a ausência dos seguintes conteúdos secundários:

CP-2 Divisores: Não apresenta o método de determinação dos números (quantidade) de divisores;

CP-3 Critérios de divisibilidade: Não apresenta os critérios de divisibilidade por 4, 6 e 11;

CP-6 MDC: Não apresenta a determinação pela sequência dos divisores de dos números dados e nem pela decomposição em fatores primos sucessiva e simultânea;

CP-6 Mínimo múltiplo comum: Não apresenta a determinação do mmc pela relação com o mdc de dois ou mais números.

Desse modo, observamos que 17,5% dos conteúdos de divisibilidade estão ausentes no LDM-10 e, pelos indicadores é classificado com o conceito “Bom” por apresentar ausência pouco expressiva dos conteúdos de divisibilidade.

6.2.6 LDM-11: Análise do Livro de Andrini e Vasconcelos (2002)

Em seções anteriores da Fase 1 analisamos dois livros de Álvaro Andrini (1984 e 1989) que os produziu sozinho, mas a partir desta seção apresentamos a análise dos livros desse autor em parceria com Maria José Vasconcelos.

Os conteúdos matemáticos deste livro estão distribuídos em 14 Unidades e cada unidade em capítulos. Os conteúdos de divisibilidade estão contemplados na Unidade 6, sob o título “Múltiplos e divisores” e distribuídos em seis capítulos.

A seguir expomos a apresentação dos autores aos alunos.

Prezado Aluno

Você já deve ter perguntado a si mesmo (ou ao seu professor...):

“Para que eu devo estudar Matemática?”

Há três respostas possíveis:

- a Matemática permite que você conheça melhor a realidade;
- a Matemática pode ajudar você a organizar raciocínios;
- a Matemática pode ajudar você a fazer descobertas.

Este livro e as orientações de seu professor constituem um ponto de partida. O caminho para o conhecimento é você quem faz.

Os autores.

Apresentamos o Quadro 62, com os dados gerais do livro que será analisado e o Quadro 63 com os conteúdos de divisibilidade no sumário do livro e no interior dos capítulos.

Quadro 62: LDM-11 – Dados gerais do livro de Andrini e Vasconcelos (2002)

LDM-11	De 2002 – PNLD 2006		
Titulo	Novo Praticando Matemática (Atualizada)		
Autores	ÁLVARO ANDRINI ¹⁰⁸ E MARIA JOSÉ VASCONCELOS ¹⁰⁹		
Editora	Editora do Brasil S/A	1ª edição, São Paulo – SP	Ano: 2002
Quantidade de páginas do livro	272	Dimensões da página 27,5 cm por 20,5 cm	
Distribuição do conteúdo no livro	14 Unidades		
Unidade dedicada a divisibilidade	Unidade 6: Múltiplos e divisores		81 – 102 22 páginas (8,1%)
Unidade que antecede divisibilidade	Unidade 5: Potenciação e raiz quadrada de Números Naturais		69 – 74 6 páginas
Unidade posterior ao de divisibilidade	Unidade 7: Dados, tabelas e gráficos de barras		103 – 114 12 páginas

Fonte: Andrini e Vasconcelos (2002). Elaborado pela autora.

Quadro 63: LDM-11 – Conteúdos de divisibilidade apresentados no sumário e no interior da unidade do livro de Andrini e Vasconcelos (2002)

Conteúdos de divisibilidade no sumário do livro de Andrini e Vasconcelos (2002) Unidade 6 – Múltiplos e Divisores	Conteúdos de divisibilidade no interior da Unidade 6 – Múltiplos e Divisores
1. Sequência dos múltiplos de um número (p. 85)	1. Sequência dos múltiplos de um número – Inicia com situação-problema. Apresenta sequência dos múltiplos de 7 (p. 81); – Cálculo dos múltiplos pela operação de multiplicação (p. 81) • ideia de “múltiplo de” e “divisível por” (p. 82). Exercícios (p. 83).
2. Critérios de divisibilidade – Economizando cálculos (p. 84)	2. Critérios de divisibilidade – Economizando cálculos (p. 84) • Divisibilidade por 2, 5 e 10 (p. 84). • Divisibilidade por 3 e 9 (p. 85). • Divisibilidade por 4 e por 8 (p. 86). • Divisibilidade por 6 (p. 87). Exercícios (p. 87).

¹⁰⁸ Álvaro Andrini. Licenciado em Matemática, Física e Desenho Geométrico pela Universidade de Taubaté – SP.

¹⁰⁹ Maria José Vasconcelos. Licenciado em Matemática, Física e Desenho Geométrico pela Universidade de Taubaté – SP.

Quadro 63: Continuação.

Conteúdos de divisibilidade no sumário do livro de Andrini e Vasconcelos (2002) Unidade 6 – Múltiplos e Divisores	Conteúdos de divisibilidade no interior da Unidade 6 – Múltiplos e Divisores
3. Os fatores de um número natural (p. 88)	3. Os fatores de um número natural (p. 88) – Ideia de “múltiplo de” e “divisor de” a partir de exemplos (p. 88). – Cálculos dos divisores ou fatores pela operação de multiplicação (p. 88) • Números primos (p. 89) – Definição incompleta dos Números primos: <i>“Existem números que possuem exatamente dois divisores. Como o número 13 e o 17, por exemplo. Esses números são chamados de números primos”</i> . – Apresenta o cálculo dos fatores primos de um número pela multiplicação (p. 89). – Pela “ <i>forma fatorada prima</i> ” determina os divisores do número 30 (p. 89). • Decomposição em fatores primos pela divisão sucessiva com traço vertical (p. 90). Exercícios (p. 91).
4. Quando os múltiplos se encontram (p. 93)	• Apresenta uma situação-problema. Na resolução apresenta a sequência dos múltiplos de 9 e 12, os múltiplos comuns e o mmc desses números (p. 93). – Mínimo múltiplo comum pela sequência dos múltiplos (p. 93). – Cálculo do mmc pela decomposição em fatores primos pela divisão sucessiva e simultânea (p. 94). Exercícios (p. 95).
5. Divisores comuns e o mdc (p. 96)	• Apresenta uma situação-problema. Na resolução apresenta a sequência dos divisores e os divisores comuns e o mdc desses números (p. 96). – Cálculo do mdc pela decomposição em fatores primos pela divisão sucessiva em separado dos números dados (p. 96). Exercícios (p. 97).
6. Jogando com múltiplos (p. 98).	• Apresenta um jogo de múltiplos (p. 98). – No final da Unidade apresenta as seções: • Revisando (de 1 a 6) com 25 questões. • Para saber mais (de 1 a 3) com 03 questões. • Desafios (de 1 a 5) com 07 questões. • Autoavaliação (de 1 a 12) 48 questões.

Fonte: Andrini e Vasconcelos (2002). Elaborado pela autora.

Conforme podemos observar no Quadro 63, acima, os conteúdos de divisibilidade são introduzidos por situações-problema e na resolução são trabalhados

implicitamente os conceitos. Os autores apresentam “Exercícios” no final de cada conteúdo de divisibilidade e, no final da Unidade, várias seções tais como: “Revisando”, “Para saber mais” e “Desafios”.

Os conteúdos de divisibilidade são apresentados na seguinte ordem: 1º). Múltiplos; 2º). Critérios de divisibilidade; 3º). Fatoração – Decomposição em fatores primos; 4º). Números primos; 5º). Mínimo múltiplo comum; 6º). Divisores e, 7º). Máximo divisor comum.

A seguir apresentamos os dados da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade na Ficha de análise (Quadro 64) e, por fim, a Tabela 39, com o resultado final da análise com a qualificação do livro de acordo com os indicadores.

Quadro 64: LDM-11 – Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro de Andrini e Vasconcelos (2002) – PNLD-2006

Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade LDM-11 de Andrini e Vasconcelos (2002) PNLD-2006				
	CONTEÚDOS DE DIVISIBILIDADE	(P)	(A)	T.CD
1	Múltiplos	---	---	---
1.1	Definição de múltiplos de um número	--	A	
1.2	Ideia de “múltiplo de”	P	--	
1.3	Cálculos dos múltiplos (pela multiplicação)	P	--	
1.4	Sequência dos múltiplos de um número	P	--	
	TOTAL CS-1	03	01	04
2	Divisores	---	---	---
2.1	Definição de divisor de um número	--	A	
2.2	Ideia de “divisível por”	P	--	
2.3	Determinação dos divisores pela sequência (divisão ou multiplicação)	P	--	
2.4	Determinação de todos divisores pela DFP (Fatoração completa)	P	--	
2.5	Determinação de todos divisores pela DFP (Algoritmo de Euclides)	--	A	
2.6	Cálculo do Número (quantidade) de divisores	--	A	
	TOTAL CS-2	03	03	06
3	Critério de divisibilidade	---	---	---
3.1	Definição	--	A	
3.2	Divisibilidade por 2	P	--	
3.3	Divisibilidade por 3	P	--	
3.4	Divisibilidade por 4	P	--	
3.5	Divisibilidade por 5	P	--	
3.6	Divisibilidade por 6	P	--	
3.7	Divisibilidade por 7	--	A	
3.8	Divisibilidade por 9	P	--	
3.9	Divisibilidade por 10	P	--	
3.10	Divisibilidade por 11	--	A	
	TOTAL CS-3	07	03	10

Quadro 64: Continuação

Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade LDM-11 de Andrini e Vasconcelos (2002) PNLD-2006				
	CONTEÚDOS DE DIVISIBILIDADE	(P)	(A)	T.CD
4	Números primos	---	---	---
4.1	Definição de Números primos	P	--	
4.2	Definição de Número composto	--	A	
4.3	Identificação de números primos pelo Crivo de Eratóstenes.	--	A	
4.4	Reconhecimento de um número primo pela divisão por primos	--	A	
	TOTAL CS-4	01	03	04
5	Fatoração Completa – Decomposição em Fatores Primos (DFP)	---	---	---
5.1	Definição de fatoração	--	A	
5.2	Definição de Fatoração Completa (TFA)	--	A	
5.3	Cálculo dos fatores primos pela multiplicação	P	--	
5.4	Decomposição em fatores primos por divisão sucessiva	P	--	
5.5	Aplicação de fatoração no cálculo de raiz quadrada	--	A	
	TOTAL CS-5	02	03	05
6	Máximo Divisor Comum (MDC)	---	---	---
6.1	Definição de Máximo divisor comum	--	A	
6.2	Determinação do mdc pela sequência de divisores	P	--	
6.3	Determinação do mdc pela fatoração completa	P	--	
6.4	Determinação do mdc pela DFP, divisão sucessiva e simultânea	--	A	
6.5	Determinação do mdc pelo processo prático de Euclides	--	A	
6.6	Identificação de primos entre si	P	--	
	TOTAL CS-6	03	03	06
7	Mínimo múltiplo comum (MMC)	---	---	---
7.1	Definição de mmc	--	A	
7.2	Determinação do mmc pela sequência dos múltiplos	P	--	
7.3	Determinação do mmc pela DFP em separado ou fatoração completa	--	--	
7.4	Determinação do mmc pela DFP divisão sucessiva e simultânea	P	--	
7.5	Determinação do mmc pela relação com o mdc	--	A	
	TOTAL CS-7	02	03	05
	TOTAL GERAL	21	19	40

Fonte: Andrini e Vasconcelos (2002). Elaborada pela autora.

Tabela 39: LDM-11 – Resultado final quantitativo e qualitativo da presença-ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro de Andrini e Vasconcelos (2002)

Resultado final quantitativo e qualitativo da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no LDM-11 de Andrini e Vasconcelos (2002)					
Conteúdos Principais			Conteúdos Secundários		Total
CP	CP _P	CP _A	CS _P	CS _A	CD _P
CP1	01	-	03	01	04
CP2	01	-	03	03	06
CP3	01	-	07	03	10
CP4	01	-	01	03	04
CP5	01	-	02	03	05
CP6	01	-	03	03	06
CP7	01	-	02	03	05
Total	07	00	21	19	40
Conceito: Fraco (ausência expressiva dos conteúdos de divisibilidade)					

Legenda: CD_P (Conteúdos de divisibilidade presentes); CP_P (Conteúdos principais presentes); CP_A (Conteúdos principais ausentes); CS_P (Conteúdos secundários presentes); CS_A (Conteúdos secundários ausentes).

Conforme podemos observar na Tabela 39, acima, todos os conteúdos principais estão presentes. Entretanto, constatamos a ausência dos seguintes conteúdos secundários no livro analisado:

CP-1 Múltiplo: não apresenta a definição;

CP-2 Divisores: não apresenta a definição; também não apresenta o cálculo dos divisores de um número pela fatoração completa e nem pelo processo prático de Euclides, tampouco o cálculo de números de divisores;

CP-3 Critérios de divisibilidade: não apresenta a definição e nem os critérios de divisibilidade por 7 e por 11;

CP-4 Números primos: não apresenta a definição completa de números primos e nem a definição dos números compostos. Não apresenta nenhum método para o reconhecimento dos números primos;

CP-5 Fatoração – decomposição em fatores primos: não apresenta a definição de fatoração e nem de fatoração completa de fatores primos. Não apresenta a aplicação da fatoração no cálculo da raiz quadrada;

CP-6 Máximo divisor comum: Não apresenta a definição de mdc. Não apresenta a determinação do mdc pela fatoração completa e nem pela divisão sucessiva e simultânea de dois ou mais números;

CP-7 Mínimo múltiplo comum: Não apresenta a determinação do mmc pela fatoração completa (divisão sucessiva em separado) e nem pela relação com o mdc.

De acordo com a análise do LDM-11 constatou-se ausência expressiva dos conteúdos de divisibilidade, equivalente a 47,5% dos conteúdos de divisibilidade ausentes e, desse modo, pelos indicadores o livro é classificado com o conceito “Fraco”.

6.2.7 LDM-12: Análise do Livro de Luiz Roberto Dante (2005)

O livro “Tudo é Matemática” está dividido em dez capítulos que estão distribuídos da seguinte forma: (1) Números naturais e sistemas de numeração; (2) Operações fundamentais com números naturais; (3) Potenciação, raiz quadrada e

expressões numéricas; (4) Geometria: sólidos geométricos, regiões planas e contornos; **(5) Divisores e múltiplos de números naturais**; (6) Frações e porcentagens; (7) Números decimais; (8) Geometria: ângulos, polígonos e circunferências; (9) Grandeza e medidas; (10) Perímetros, áreas e volumes.

A seguir expomos a apresentação do livro pelo autor aos alunos, seguida do Quadro 65, com os dados gerais do livro que será analisado.

Apresentação

Caro(a) aluno(a)

Bem-vindo(a) a esta nova etapa de estudos e aprendizagens.

Como você já sabe, a Matemática é uma parte importante de sua vida. Ela está presente em todos os lugares e em todas as situações de seu cotidiano: na escola, no lazer, nas brincadeiras, em casa.

Escrevi este livro para você compreender as ideias matemáticas e aplicá-las em seu dia-a-dia. Estou certo de que fará isso de maneira prazerosa, agradável, participativa e sem aborrecimentos. Sabe por quê? Porque ao longo deste livro você será convidado(a) a pensar, a resolver problemas e desafios, a trocar ideias com os colegas, a observar ao seu redor, a ler sobre a evolução histórica da Matemática, a trabalhar em equipe, a conhecer curiosidades, a brincar, a pesquisar, a argumentar, a redigir e a divertir-se. Gostaria muito de que aceitasse este convite com entusiasmo e dedicação, participando ativamente de todas as atividades propostas.

Vamos começar?

Um abraço

O autor

Quadro 65: LDM-12 – Dados Gerais do Livro de Luiz Roberto Dante (2005)

LDM-12	2005 – PNLD-2008 (Triênio: 2008-2009-2010)		
Título	TUDO É MATEMÁTICA 5ª Série		
Autor	LUIZ ROBERTO DANTE ¹¹⁰		
Ano de publicação:	2005	Editora Ática	São Paulo
Quantidade de páginas do livro	296	Dimensões da página: 20 cm por 27,50 cm	
Distribuição do conteúdo:	10 capítulos		
Capítulo dedicado à Divisibilidade	Capítulo 5: Divisores e múltiplos de números naturais.		(101 – 127) 27 páginas (9,1%)
Capítulo que antecede ao de Divisibilidade	Capítulo 4: Geometria		(82 – 100) 19 páginas
Capitulo posterior ao de Divisibilidade	Capítulo 6: Frações e porcentagens		(128 – 163) 36 páginas

Fonte: Dante (2005). Elaborado pela autora.

¹¹⁰ Luiz Roberto Dante – Livre-docente em Educação Matemática pela Unesp – rio Claro, SP. Doutor em Psicologia da Educação: Ensino da Matemática, pela PUC – São Paulo. Mestre em Matemática pela USP. Pesquisador em ensino e aprendizagem da Matemática pela Unesp – Rio Claro, SP. Ex-professor da rede estadual de Ensino Fundamental e Médio. Autor de vários livros, entre os quais: Didática da resolução de problemas de Matemática; Didática da Matemática na pré-escola; Coleção Vivência e Construção (1ª a 4ª séries); Matemática Contexto & Aplicações – 3 volumes e Volume único (Ensino Médio) (DANTE, 2005).

Cada capítulo do livro começa com uma *Introdução* e contém algumas seções: “*Trocando ideias*”; “*Você sabia que*”; “*Desafio*”; “*Raciocínio lógico*”; “*Curiosidade matemática*”; “*Brasil em números*”; “*Revisão cumulativa*”. Os conteúdos de divisibilidade são apresentados por itens numerados de 1 a 109. No final do livro há um glossário; as respostas dos problemas; leituras complementares e referências bibliográficas.

Quadro 66: LDM-12 – Conteúdos de divisibilidade apresentados no sumário e no interior do capítulo do livro de Luiz Roberto Dante (2005)

Conteúdos de divisibilidade no sumário do livro de Luiz Roberto Dante (2005)	Conteúdos de divisibilidade no interior do Capítulo 5 – Divisores e múltiplos de números naturais
Capítulo 5 – Divisores e múltiplo de números naturais (p. 101) Introdução (p. 101) Divisibilidade – múltiplo e divisor de números naturais (p. 101)	Introdução – O autor inicia o assunto com duas situações- problema não resolvidas. • Divisibilidade – múltiplo e divisor (p. 101) – Apresenta uma situação-problema para trabalhar a ideia de “divisível por” e “múltiplo de” e exemplos de cálculos pela operação de divisão. – Apresenta questões de 1 a 6 (pp. 101-102).
Critério de divisibilidade (103) Divisibilidade por 2 (103), Divisibilidade por 3 (103), Divisibilidade por 5 (104)	Critério de divisibilidade – apresenta questões de 7 a 31 (pp. 103-108). Neste – Item 7: Divisibilidade por 2 (103), – Divisibilidade por 3 (103), – Divisibilidade por 5 (104) – Item 20: Divisibilidade por 6; (p. 105) – Item 21: Divisibilidade por 4 (p. 105) – Item 22: Divisibilidade por 9 (105) – Item 23: Divisibilidade por 10 (106) – No item 25 apresenta a seguinte observação: “<i>Para saber se o número é divisível por 7, 8, 11, 13, etc., é prático efetuar a divisão</i>” (p. 106).
Divisores de um número natural (p. 108)	Divisores: apresenta questões de (32 a 45). – Inicia o assunto com uma situação problema envolvendo uma distribuição de pães, com cálculos para encontrar os divisores de 12, usando a operação de divisão (p. 108). – No item 38 apresenta uma situação-problema em que os cálculos para encontrar os divisores são por meio da operação de multiplicação, pois “<i>os divisores são também fatores</i>”. – No item 39 apresenta a sequência dos divisores de dois números D(36) e D(32) para mostrar a regularidade existente nos divisores (p. 110). – No item 42 apresenta “Divisores, geometria e medida (p. 111).

Quadro 66: Continuação

Conteúdos de divisibilidade no sumário do livro de Luiz Roberto Dante (2005) Capítulo 5	Conteúdos de divisibilidade no interior do Capítulo 5 –Divisores e Múltiplos de números naturais
Números Primo (p. 112)	Número Primo: questões de 46 a 58 (pp. 112-114) – No item 47 apresenta a definição de número primo (p. 112). – No item 51 em “Você sabia que?” Apresenta a Conjectura de Goldbach (p. 112) “que todo número par maior do que 4 é igual à soma de dois números primos”. – No item 53 apresenta a identificação dos números primos pelo Crivo de Eratóstenes (uma foto dele, matemático grego (276 a.C. – 194 a.C.) (p. 113). – No item 57, apresenta “Reconhecimento de um número primo” pela divisão por primos (p. 113).
Decomposição em fatores primos (p. 114)	Decomposição de números primos – itens de 59 a 72 (p. 114-118). – No item 60 apresenta o <i>processo das fatorações sucessivas</i>) por meio da operação de multiplicação (método da árvore) – Apresenta a definição de fatoração completa (TFA) (p. 115). – No item 61 apresenta “o <i>processo de decompor em fatores primos pela divisão sucessiva</i>”; no item 65 apresenta o cálculo da raiz quadrada de um número pela decomposição em fatores primos (p. 116). – No item 68, como aplicação da DFP apresenta o cálculo da quantidade de divisores de um número. Também apresenta o processo prático de Euclides para determinar todos os divisores de um número (p. 117). – No item 70 apresenta o método “Redes de divisores” para o cálculo de divisores (p. 118).
Máximo divisor comum (mdc) (118) Processo prático para a decomposição do mdc (p. 119)	Máximo divisor comum (mdc) – itens de 73 a 79 (pp. 118 – 120) – Introduz o assunto com uma situação problema, e apresenta a intersecção dos divisores pelo Diagrama de Venn (p. 118). – Após o item 76 apresenta o Processo prático para determinação do mdc através da DFP, pela divisão sucessiva e separada e também pela divisão sucessiva e simultânea (p. 119).
Múltiplos de um número natural (p. 120)	Múltiplos de um número natural – itens de 80 a 88 (pp. 120-121). – Inicia com uma situação problema e, na resolução apresenta a sequência dos múltiplos do número 3 pela operação de multiplicação (p. 120). – No item 86 apresenta a generalização dos múltiplos de 5 por $5.n$ (p. 121).

Quadro 66: Continuação

Conteúdos de divisibilidade no sumário do livro de Luiz Roberto Dante (2005)	Conteúdos de divisibilidade no interior do Capítulo 5
Mínimo múltiplo comum (mmc) (p. 121) Processo prático para a determinação do mmc (p. 123)	Mínimo múltiplo comum (mmc) – itens de 89 a 99 (pp.121-124). – Inicia o assunto com uma situação problema e a determinação do mmc se dá pelas sequências dos múltiplos de 4 e 6 (pp. 121-122). – Processo prático para a determinação do mmc pela decomposição em fatores primos, sucessiva e simultânea (pp.123-124).
Atividades envolvendo mdc e mmc (p. 124) Revisão cumulativa (p. 126) Para ler, pensar e divertir-se (p. 127)	– Apresenta várias situações-problema do item 100 ao 109 (pp. 124-125). – Apresenta questões de diferentes formatos dos itens 1 ao 14 com todos os assuntos já trabalhados dos capítulos anteriores. – Na seção “Para ler, pensar e divertir-se” apresenta um texto sobre “Números perfeitos e números amigos” (p. 127).

Fonte: Dante (2005). Elaborado pela autora.

Neste livro, cada capítulo está identificado por uma cor, e o de divisibilidade, está apresentado com a cor verde. Conforme podemos observar no Quadro 66, acima, os conteúdos de divisibilidade são apresentados em forma de questões, explicações e exemplos e introduzidos por situações-problema e em suas resoluções são trabalhados implicitamente os conceitos. Os conteúdos de divisibilidade são apresentados na seguinte ordem: 1º). Critérios de divisibilidade; 2º). Divisores; 3º). Números primos; 4º). Fatoração – Decomposição em fatores primos; 5º). Máximo divisor comum; 6º). Múltiplos; 7º). Mínimo múltiplo comum.

A seguir apresentamos os dados da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade na Ficha de análise (Quadro 67) e, por fim, a Tabela 40 com o resultado final da análise e a qualificação do livro de acordo com os indicadores.

Quadro 67: LDM-12 – Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro de Luiz Roberto Dante (2005)

Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade LDM-12 de Luiz Roberto Dante (2005) – PNLD-2008				
	CONTEÚDOS DE DIVISIBILIDADE	(P)	(A)	T.CD
1	Múltiplos	---	---	---
1.1	Definição de múltiplos de um número	-	A	
1.2	Ideia de “múltiplo de”	P	-	
1.3	Cálculos dos múltiplos (pela multiplicação)	P	-	
1.4	Sequência dos múltiplos de um número	P	-	
	TOTAL CS-1	03	01	04

Quadro 67: Continuação

2	Divisores	---	---	---
2.1	Definição de divisor de um número	-	A	
2.2	Ideia de “divisível por”	P	-	
2.3	Determinação dos divisores pela sequência (divisão ou multiplicação)	P	-	
2.4	Determinação de todos divisores pela DFP (Fatoração completa)	-	A	
2.5	Determinação de todos divisores pela DFP (Algoritmo de Euclides)	P	-	
2.6	Cálculo do Número (quantidade) de divisores	P	-	
	TOTAL CS-2	04	02	06
3	Critério de divisibilidade	---	---	---
3.1	Definição	P	-	
3.2	Divisibilidade por 2	P	-	
3.3	Divisibilidade por 3	P	-	
3.4	Divisibilidade por 4	P	-	
3.5	Divisibilidade por 5	P	-	
3.6	Divisibilidade por 6	P	-	
3.7	Divisibilidade por 7	-	A	
3.8	Divisibilidade por 9	P	-	
3.9	Divisibilidade por 10	P	-	
3.10	Divisibilidade por 11	-	A	
	TOTAL CS-3	08	02	10
4	Números primos	---	---	---
4.1	Definição de Números primos	P	-	
4.2	Definição de Número composto	-	A	
4.3	Identificação de números primos pelo Crivo de Eratóstenes.	P	--	
4.4	Reconhecimento de um número primo pela divisão por primos	P	--	
	TOTAL CS-4	03	01	04
5	Fatoração completa – Decomposição em fatores primos (DFP)	---	---	---
5.1	Definição de fatoração	--	A	
5.2	Definição de fatoração completa (TFA)	P	-	
5.3	Cálculo dos fatores primos pela multiplicação	P	-	
5.4	Decomposição em fatores primos por divisão sucessiva	P	-	
5.5	Aplicação de fatoração no cálculo de raiz quadrada	P	-	
	TOTAL CS-5	04	01	05
6	Máximo Divisor Comum (MDC)	---	---	---
6.1	Definição de Máximo divisor comum	-	A	
6.2	Determinação do mdc pela sequência de divisores	P	-	
6.3	Determinação do mdc pela fatoração completa	P	-	
6.4	Determinação do mdc pela DFP, divisão sucessiva e simultânea	P	-	
6.5	Determinação do mdc pelo processo prático de Euclides	-	A	
6.6	Identificação de primos entre si	-	A	
	TOTAL CS-6	03	03	06
7	Mínimo múltiplo comum (MMC)	---	---	---
7.1	Definição de mmc	-	A	
7.2	Determinação do mmc pela sequência dos múltiplos	P	-	
7.3	Determinação do mmc pela DFP em separado ou fatoração completa	-	A	
7.4	Determinação do mmc pela DFP divisão sucessiva e simultânea	P	-	
7.5	Determinação do mmc pela relação com o mdc	-	A	
	TOTAL CS-7	02	03	05
	TOTAL GERAL	27	13	40

Fonte: Dante (2005). Elaborada pela autora.

Tabela 40: LDM-12 – Resultado final quantitativo e qualitativo da presença-ausência dos conteúdos de divisibilidade do livro de Luiz Roberto Dante (2005)

Resultado final quantitativo e qualitativo da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade LDM-11 de Luiz Roberto Dante (2005)					
Conteúdos Principais			Conteúdos Secundários		Total
CP	CP _P	CP _A	CS _P	CS _A	CD _P
CP1	01	-	03	01	04
CP2	01	-	04	02	06
CP3	01	-	08	02	10
CP4	01	-	03	01	04
CP5	01	-	04	01	05
CP6	01	-	03	03	06
CP7	01	-	02	03	05
Total	07	00	27	13	40
Conceito: Regular (ausência moderadamente expressiva dos conteúdos de divisibilidade)					
Legenda: CD _P (Conteúdos de divisibilidade presentes); CP _P (Conteúdos principais presentes); CP _A (Conteúdos principais ausentes); CS _P (Conteúdos secundários presentes); CS _A (Conteúdos secundários ausentes).					

Conforme podemos observar na Ficha de análise (Quadro 67) e na Tabela 40, dos resultados finais, todos os conteúdos principais de divisibilidade estão contemplados no livro analisado. Entretanto, constatamos a ausência dos seguintes conteúdos secundários:

CP-1 Múltiplo: Não apresenta a definição; **CP-2 Divisores:** Não apresenta a definição; também não apresenta o cálculo dos divisores de um número pela fatoração completa;

CP-3 Critérios de divisibilidade: Não apresenta a definição e nem os critérios de divisibilidade por 7 e por 11;

CP-4 Números primos: Não apresenta a definição dos números compostos; **CP-5 Fatoração – decomposição em fatores primos:** não apresenta a definição de fatoração;

CP-6 Máximo divisor comum: Não apresenta a definição de mdc. Não apresenta a determinação do mdc pelo processo prático de Euclides e nem a o mdc de números primos entre si;

CP-7 Mínimo múltiplo comum: não apresenta a definição; não apresenta a determinação do mmc pela fatoração completa (divisão sucessiva em separado) e nem pela relação com o mdc.

Conforme a análise realizada foi constatada ausência moderadamente expressiva, equivalente a 32,5% de conteúdos de divisibilidade ausentes e, desse modo, pelos indicadores o livro é classificado com o conceito “Regular”.

6.2.8 LDM-13: Análise do Livro de Luiz Roberto Dante 6º ano (2010)

Na continuidade das análises apresentamos o livro “Tudo é Matemática” do 6º ano de Luiz Roberto Dante (2010) – PNLD-2011 para o triênio de 2011-2012-2014.

Este livro com relação à edição anteriormente analisada, do PNLD-2008, mantém o mesmo título, mas o *design* gráfico da capa mudou, na edição anterior a capa do livro era toda vermelha, nesta edição o fundo da capa é branco com as letras vermelhas.

Além disso, nesta edição houve mudança significativa no interior do livro que distribui o conteúdo em 10 capítulos e passa a apresentar a teoria a partir de situações-problema e na resolução apresenta os cálculos, as regras e a ideia dos temas abordados, seguidos de atividades sobre o tema.

Na visão dos especialistas, conforme Guia do livro didático de matemática

A metodologia adotada no livro valoriza a resolução de problemas. Porém, na apresentação dos conceitos, definições e procedimentos nem sempre a iniciativa do aluno é favorecida. As contextualizações realizadas contribuem para dar mais significado aos conteúdos (PNLD-2011, p.83).

Este livro segue a mesma estrutura interna da edição anteriormente analisada, apresenta a mesma redação de apresentação do livro pelo autor para os alunos, por isso não vamos expor nesta seção.

Entretanto, vamos evidenciar algumas diferenças encontradas no livro e no capítulo referente aos conteúdos de Divisibilidade, após a apresentação do quadro com os conteúdos de divisibilidade.

A seguir apresentamos o Quadro 68 com os dados gerais do livro que será analisado, o Quadro 69 com os conteúdos de divisibilidade no sumário do livro e no interior do capítulo.

Quadro 68: LDM-13 – Dados gerais do livro de Luiz Roberto Dante (2010)

LDM-13	2010 – PNLD-2011 (Triênio: 2011-2012-2013)		
Titulo	TUDO É MATEMÁTICA 6º ano		
Autor	LUIZ ROBERTO DANTE		
Ano da publicação	2010	3ª edição: 2010	1ª impressão
Editora	Ática	São Paulo	
Quantidade de páginas do livro	344	Dimensões da página: 20 cm por 27,50 cm	
Manual pedagógico do professor	1 a 88 páginas		
Distribuição do conteúdo	10 capítulos		
Capítulo dedicado a divisibilidade	Capítulo 5 – Divisores e múltiplos de números naturais.		(118 – 149) 32 páginas (9,3%)
Capítulo que antecede divisibilidade	Capítulo 4 – Geometria: sólidos geométricos, regiões planas e contornos.		(96 – 117) 22 páginas
Capítulo posterior ao de divisibilidade	Capítulo 6 – Frações e porcentagens		(150 – 191) 42 páginas

Fonte: Dante (2010). Elaborado pela autora.

Quadro 69: LDM-13 – Conteúdos de divisibilidade apresentados no sumário e no interior do capítulo do livro de Luiz Roberto Dante (2010)

Conteúdos de divisibilidade no sumário do livro de Luiz Roberto Dante (2010) Capítulo 5	Conteúdos de divisibilidade no interior do Capítulo 5 – Divisores e múltiplos de números naturais
Capítulo 5 – Divisores e múltiplos de números naturais (p. 118) 1. Divisibilidade (p. 120) Múltiplo e divisor de um número natural (p. 120-121) Crêterios de divisibilidade (121) Divisibilidade por 2 (122), Divisibilidade por 3 (123), Divisibilidade por 5 (124) Divisibilidade por 6 (125), Divisibilidade por 4 (125), Divisibilidade por 9 (125) Divisibilidade por 10 (127).	Divisores e múltiplos de números naturais – Introduz o assunto com uma situação-problema para o aluno ter a ideia de múltiplo e divisor“.
	• Múltiplo e divisor de um número natural – Inicia com uma situação-problema, cuja resolução se dá pela operação de divisão. – Apresenta a ideia de “divisível por” e “múltiplo de” (120). – Seção “Leitura”: apresenta um texto sobre “Anos bissextos” (p. 126). • Crêterio de divisibilidade (p. 121) – Apresenta todos os crêterios de divisibilidade que estão no sumário (pp. 121–127).
2. Divisores de um número natural (p. 129) • Obtenção dos divisores pelo processo geométrico (p. 131).	2. Divisores de um número natural (p. 129) Inicia o assunto com uma situação problema usa a operação de divisão e também de multiplicação com a sequência de divisores dos números.
	– No item 34 apresenta a sequência dos divisores de dois números D (36) e D (32) para mostrar a regularidade existente nos divisores de um número natural (p. 131). – Apresenta “ Obtenção dos Divisores pelo processo geométrico.

Quadro 69: continuação

Conteúdos de divisibilidade no sumário do livro de Luiz Roberto Dante (2010) Capítulo 5	Conteúdos de divisibilidade no interior do Capítulo 5 – Divisores e múltiplos de números naturais
3. Números Primo (p. 132) • Crivo de Eratóstenes (p. 133) • Decomposição de um número natural em fatores primos (p. 135) • Processo das fatorações sucessivas (p. 135) • Processo das divisões sucessivas (p. 136) • Cálculo da raiz quadrada: uma importante aplicação de decomposição de um número natural em fatores primos (p. 137)	• Números Primo – apresenta a definição de números primos (p. 132) – Apresenta o Crivo de Eratóstenes para identificar os números primos de 2 a 100 (p. 133). – Apresenta “Reconhecimento de um número primo” pela divisão por primos (p. 134). • Decomposição de um número natural em fatores primos – Apresenta definição de fatoração (p. 135) – Processo das fatorações sucessivas pela multiplicação (método da árvore) (p. 135) – Apresenta a definição de fatoração completa (TFA) (p. 135). – Apresenta o processo das divisões sucessivas em fatores primos (p. 136) – Apresenta o “Cálculo da raiz quadrada: como aplicação da DFP” (p. 137) • Aplicações da Decomposição em fatores primos: – Apresenta a determinação de todos os divisores de um número pelo Algoritmo de Euclides e o método de calcular a quantidade de divisores de um número (p. 138) – Apresenta o método “Redes de divisores” para o cálculo de divisores (p. 139).
4. Máximo divisor comum (mdc) (140) • Processo prático para a decomposição do mdc (p. 141)	4. Máximo divisor comum (mdc) – introduz o assunto com uma situação problema e na resolução apresenta a intersecção dos divisores pelo Diagrama de Venn (p. 140). – Apresenta o Processo prático para determinação do mdc pela DFP, pela divisão sucessiva e separada e também pela divisão sucessiva e simultânea (p. 141).
5. Múltiplos de um número natural (p. 142) • Mínimo múltiplo comum (mmc) (p. 144) • Cálculo mental do mmc (p. 145) • Processo prático para a determinação do mmc (146)	5. Múltiplos de um número natural (p. 142) – Inicia com uma situação problema. Usa a operação de multiplicação e apresenta a sequência dos múltiplos do número 3. – Apresenta a generalização dos múltiplos com o exemplo de múltiplos de 5 por 5.n (p. 143). • Mínimo múltiplo comum (MMC) – Inicia o assunto com uma situação problema e usa as sequências dos múltiplos de 4, 6 e 12 para determinar o mmc (p. 144) • Cálculo mental do mmc a partir da regra: “se a divisão de $10 : 8$ não é exata, tenta-se o dobro do maior pelo menor ($20 : 8$) e se não é exata, tenta-se o triplo: $30 : 8$ e ainda não é exata, tenta-se o quádruplo: $40 : 8$ é exata. Então, o mmc ($8, 10$) = 40. ► Processo prático para a determinação do mmc pela DFP, sucessiva e simultânea (p. 146).

Quadro 69: Continuação

Conteúdos de divisibilidade no sumário do livro de Luiz Roberto Dante (2010) Capítulo 5	Conteúdos de divisibilidade no interior do Capítulo 5 – Divisores e múltiplos de números naturais
6 . Problemas envolvendo mdc e mmc (p. 147) Revisão cumulativa (p. 148) Para ler, pensar e divertir-se (p. 149).	6. Problemas envolvendo mdc e mmc (p. 147) Atividades de 85 a 90 e “Raciocínio lógico” (p. 147) Revisão cumulativa (p. 148) Para ler, pensar e divertir-se (p. 149).

Fonte: Dante (2010). Elaborado pela autora.

Vamos apresentar algumas diferenças nos dois livros analisados (LDM-12 e LDM-13) e nos capítulos dos conteúdos de divisibilidade.

Este livro continuou com o mesmo título que o da edição anteriormente analisada, mas a capa mudou, a da edição anterior tem fundo todo vermelho e letras brancas, e desta edição, o fundo é branco com letras vermelhas, a cor do capítulo também mudou de verde para azul.

A organização dos conteúdos mudou significativamente, visto que na edição de 2005 a teoria é apresentada numa sequência numérica contínua, entremeadas de explicações, regras e questões para o aluno resolver e, nesta edição, o autor apresenta o assunto com situações-problema e na sua resolução trabalha os conceitos e em seguida apresenta os exemplos. As atividades aparecem no final de cada conteúdo numa sequência numérica contínua de 1 a 90.

Houve mudança também na apresentação dos títulos e subtítulos e a quantidade de páginas do livro também aumentou e apresenta mais espaço entre as linhas dos textos. Além disso, melhorou a apresentação dos conteúdos e tornou-os mais explicativos.

Quanto ao aspecto gráfico, nesta edição apresenta mudança no estilo e tamanho das letras e números de páginas, ficaram maiores e também apresenta fotografias maiores e mais ilustrações explicativas.

A seguir apresentamos a Ficha de análise (Quadro 70) e a Tabela 41 com o resultado final da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade e a qualificação do livro segundo os indicadores.

Quadro 70: LDM-13 – Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro de Luiz Roberto Dante (2010) – PNLD-2011

Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade LDM-13 de Luiz Roberto Dante (2010) – PNLD-2011				
	CONTEÚDOS DE DIVISIBILIDADE	(P)	(A)	T.CD
1	Múltiplos	---	---	---
1.1	Definição de múltiplos de um número	--	A	
1.2	Ideia de “múltiplo de”	P	--	
1.3	Cálculos dos múltiplos (pela multiplicação)	P	--	
1.4	Sequência dos múltiplos de um número	P	--	
	TOTAL CS-1	03	01	04
2	Divisores	---	---	---
2.1	Definição de divisor de um número	--	A	
2.2	Ideia de “divisível por”	P	--	
2.3	Determinação dos divisores pela sequência (divisão ou multiplicação)	P	--	
2.4	Determinação de todos divisores pela DFP (Fatoração completa)	P	--	
2.5	Determinação de todos divisores pela DFP (Algoritmo de Euclides)	P	--	
2.6	Cálculo do Número (quantidade) de divisores	P	--	
	TOTAL CS-2	05	01	06
3	Critério de divisibilidade	---	---	---
3.1	Definição	P	--	
3.2	Divisibilidade por 2	P	--	
3.3	Divisibilidade por 3	P	--	
3.4	Divisibilidade por 4	P	--	
3.5	Divisibilidade por 5	P	--	
3.6	Divisibilidade por 6	P	--	
3.7	Divisibilidade por 7	--	A	
3.8	Divisibilidade por 9	P	--	
3.9	Divisibilidade por 10	P	--	
3.10	Divisibilidade por 11	--	A	
	TOTAL CS-3	08	02	10
4	Números primos	---	---	---
4.1	Definição de Números primos	P	--	
4.2	Definição de Número composto	--	A	
4.3	Identificação de números primos pelo Crivo de Eratóstenes.	P	--	
4.4	Reconhecimento de um número primo pela divisão por primos	P	--	
	TOTAL CS-4	03	01	04
5	Fatoração Completa – Decomposição em Fatores Primos (DFP)	---	---	---
5.1	Definição de fatoração	P	--	
5.2	Definição de fatoração completa (TFA)	P	--	
5.3	Cálculo dos fatores primos pela multiplicação	P	--	
5.4	Decomposição em fatores primos por divisão sucessiva	P	--	
5.5	Aplicação de fatoração no cálculo de raiz quadrada	P	--	
	TOTAL CS-5	05	00	05
6	Máximo Divisor Comum (MDC)	---	---	---
6.1	Definição de Máximo divisor comum	--	A	
6.2	Determinação do mdc pela sequência de divisores	P	--	
6.3	Determinação do mdc pela fatoração completa	P	--	
6.4	Determinação do mdc pela DFP, divisão sucessiva e simultânea	P	--	
6.5	Determinação do mdc pelo processo prático de Euclides	--	A	
6.6	Identificação de primos entre si	--	A	

Quadro 70: Continuação

	TOTAL CS-6	03	03	06
7	Mínimo múltiplo comum (MMC)	---	---	---
7.1	Definição de mmc	--	A	
7.2	Determinação do mmc pela sequência dos múltiplos	P	--	
7.3	Determinação do mmc pela DFP em separado ou fatoração completa	--	A	
7.4	Determinação do mmc pela DFP divisão sucessiva e simultânea	P	--	
7.5	Determinação do mmc pela relação com o mdc	--	A	
	TOTAL CS-7	02	03	05
	TOTAL GERAL	29	11	40

Fonte: Dante (2010). Elaborada pela autora.

Tabela 41: LDM-13 – Resultado final quantitativo e qualitativo da presença-ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro de Luiz Roberto Dante (2010)

Resultado final quantitativo e qualitativo da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade – LDM-13 de Luiz Roberto Dante (2010)					
Conteúdos Principais			Conteúdos Secundários		Total
CP	CP _P	CP _A	CS _P	CS _A	CD _P
CP1	01	-	03	01	04
CP2	01	-	05	01	06
CP3	01	-	08	02	10
CP4	01	-	03	01	04
CP5	01	-	05	00	05
CP6	01	-	03	03	06
CP7	01	-	02	03	05
Total	07	00	29	11	40
Conceito: Regular (ausência moderadamente expressiva dos conteúdos de divisibilidade)					
Legenda: CD _P (Conteúdos de divisibilidade presentes); CP _P (Conteúdos principais presentes); CP _A (Conteúdos principais ausentes); CS _P (Conteúdos secundários presentes); CS _A (Conteúdos secundários ausentes).					

Conforme podemos observar na Ficha de análise (Quadro 70) e na Tabela 41, dos resultados finais, todos os conteúdos principais de divisibilidade estão contemplados no livro analisado, entretanto, constatou-se a ausência dos seguintes conteúdos secundários:

CP-1 Múltiplo: não apresenta a definição; **CP-2 Divisores:** não apresenta a definição; não apresenta a determinação de todos os divisores pela fatoração completa e nem pelo algoritmo de Euclides; também não aprendizagem o cálculo dos números (quantidade) de divisores; **CP-3 Critérios de divisibilidade:** não apresenta os critérios de divisibilidade por 7 e por 11; **CP-4 Números primos:** não apresenta a definição de números compostos; **CP-6 Máximo divisor comum:** não apresenta a

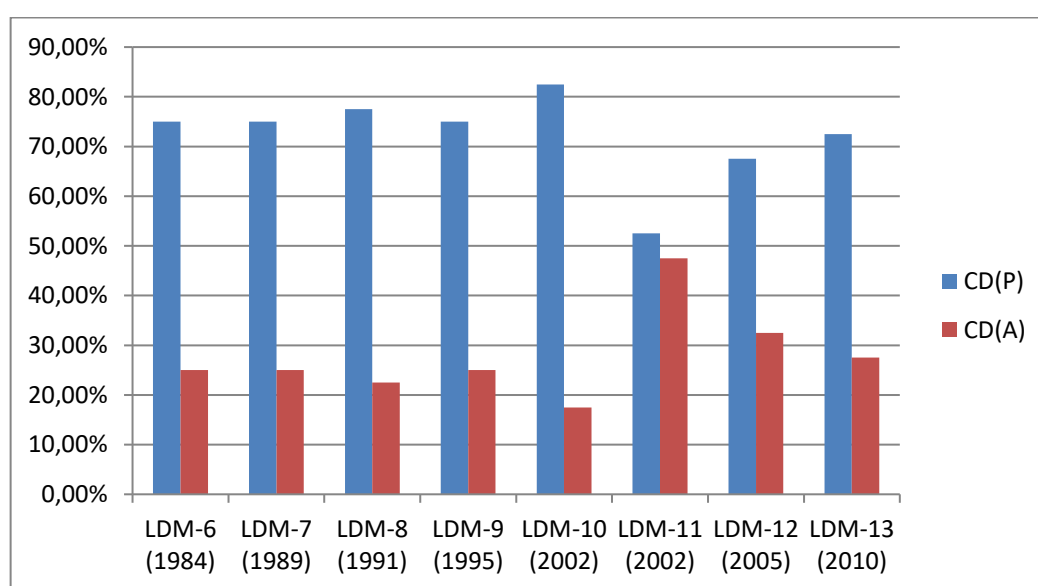
determinação do mdc pelo processo prático de Euclides e nem a definição e o mdc de números primos entre si; **CP-7 Mínimo múltiplo comum**: não apresenta a determinação do mmc pela divisão sucessiva em separado (fatoração completa) e nem pela relação com o mdc.

Conforme a análise realizada foi constatada ausência moderadamente expressiva, equivalente a 27,5% de conteúdos de divisibilidade ausentes e, desse modo, pelos indicadores o livro é classificado com o conceito “Regular”.

6.2.9 Considerações Finais da Análise da Fase 2 (Parte 1)

Analizamos os oito livros a seguir do período de 1980 a 2010: **LDM-6** “Matemática” de Álvaro Andrini (1984); **LDM-7** “Praticando Matemática” de Álvaro Andrini (1989); **LDM-8** “Matemática fácil” de Linaldo Malveira (1991); **LDM-9** “Matemática e vida” de Bongiovanni, Vissoto e Laureano (1995) e **LDM-10** “Matemática: ideias e desafios” de Iracema Mori e Dulce Onaga (2002); **LDM-11** “Novo Praticando Matemática” de Álvaro Andrini e M^a José Vasconcelos (2002); **LDM-12** “Tudo é Matemática” de Luiz Roberto Dante (2005); **LDM-13** “Tudo é Matemática” de Luiz Roberto Dante (2010). Apresentamos no Gráfico 4, o resultado final da análise da presença-ausência dos conteúdos de divisibilidade da Fase 2 (Parte 1).

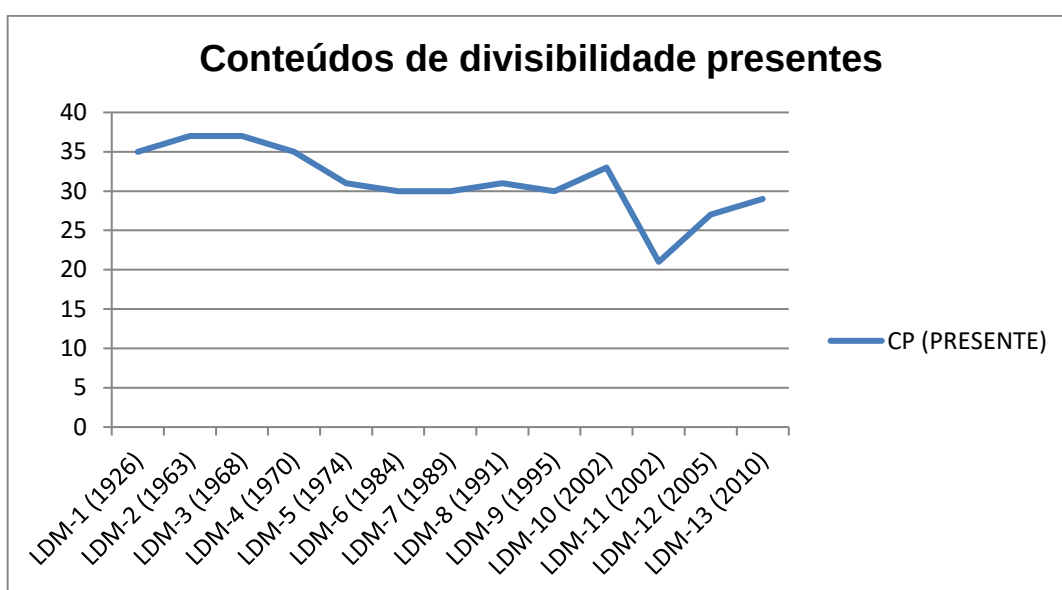
Gráfico 4: Resultado final da análise da Fase 2 (parte 1)



Legenda: CD (P) (conteúdos de divisibilidade presentes) CD (A) (conteúdos de divisibilidade ausentes).

De acordo com nossa análise constatamos ausência pouco expressiva (Bom) em apenas dois livros (LDM-8 e LDM-10), nos cinco livros (LDM-6, LDM-7, LDM-9, LDM-12 e LDM-13) observou-se ausência moderadamente expressiva (Regular) e, somente em um livro (LDM-11) observamos ausência expressiva (Fraco) dos conteúdos de divisibilidade.

Gráfico 5: Conteúdos de divisibilidade presentes nos 13 livros didáticos de matemática do período de 1926 a 2010



Conforme podemos verificar nos dados dos gráficos 4 e 5, da Fase 1 e Fase 2 (parte 1), decorrentes da análise, podemos inferir que houve redução dos conteúdos de divisibilidade, pois dos 13 livros analisados, três livros são ótimos por ter ausência inexpressiva (23%), quatro livros são bons por apresentarem ausência pouco expressiva (31%) e cinco são regulares por apresentarem ausência moderadamente expressiva (38%). Desses, somente um livro é considerado fraco, por apresentar ausência expressiva.

6.3 PNLD-2014 – ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA DO SEXTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL – ANOS FINAIS

Dando continuidade à análise dos livros da Fase 2, na parte 2 selecionamos mais seis livros didáticos de matemática do 6º ano, da relação dos mais distribuídos pelo PNLD-2014, a seguir apresentados na Tabela 42. Vamos averiguar a presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade nestes livros que foram utilizados por milhares de alunos das escolas públicas brasileiras pelo período de três anos (2014-2015-2016).

Tabela 42: LDM selecionados da relação dos mais distribuídos pelo PNLD-2014

Lugar	LDM	Título e autores	Unidade/ Capítulo	Título do capítulo
1º	14	Praticando matemática Álvaro Andrini	Unidade 6	Múltiplos e divisores
2º	15	Vontade de saber matemática Joamir Souza e Patrícia M. Pataro	Capítulo 5	Múltiplos e divisores
4º	16	Projeto Teláris – Matemática Luiz Roberto Dante	Capítulo 5	Divisores e múltiplos de números naturais
5º	17	Matemática - Bianchini Edwaldo Bianchini	Capítulo 4	Divisibilidade
6º	18	Matemática: teoria e contexto	Capítulo 3	Múltiplos e divisores
7º	19	Matemática: ideias e desafios Iracema Mori e Dulce Satiko Onaga	Unidade 6	Divisibilidade

Fonte: Portal FNDE (2014). Elaborado pela autora

Nas próximas seções faremos a análise de cada destes livros. Nesta fase e na próxima em que serão analisados livros distribuídos pelo PNLD-2017, vamos apresentar as imagens das capas dos livros didáticos de matemática do 6º ano.

6.3.1 LDM-14 – Análise do Livro “Praticando Matemática” Edição Renovada de Andrini e Vasconcelos (2012)

Este livro está organizado em 14 unidades, que tratam predominantemente de um dos campos da matemática escolar. Cada unidade é subdividida em itens dedicados a tópicos do conteúdo, nos quais há explanações acompanhadas de exemplos e de exercícios propostos. No interior das unidades há algumas seções, tais como: *Revisando*, *Autoavaliação* e, *Seção livre* (com curiosidades, situações do cotidiano ou questões interdisciplinares). O livro apresenta exercícios no final de cada

assunto e no final da unidade e ao final do livro, são apresentadas, ainda, outras quatro seções: *Sugestões de leitura e de sites para o aluno*; *Referências bibliográficas*; *Moldes ou malhas para as atividades* e *Respostas dos exercícios* e das atividades propostas nas unidades.

A seguir expomos a apresentação pelos autores aos alunos e a Imagem 15, da capa do livro que será analisado.

Prezado Aluno

Você já deve ter perguntado a si mesmo, ou a seu professor:

“Para que eu devo estudar Matemática?”

Há três respostas possíveis:

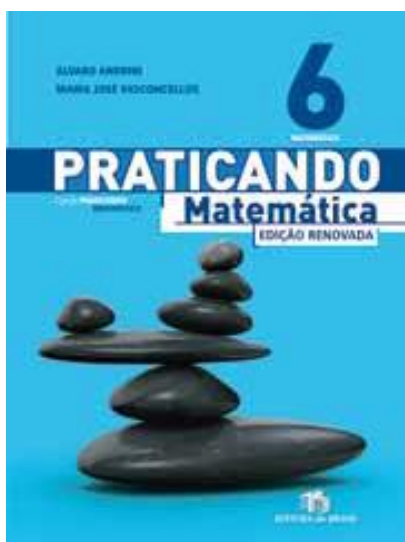
1. A Matemática permite que você conheça melhor a realidade.
2. A Matemática pode ajudar você a organizar raciocínios.
3. A Matemática pode ajudar você a fazer descobertas.

Este livro e as orientações de seu professor constituem um ponto de partida.

O caminho para o conhecimento é você quem faz.

Os autores.

Imagem 15: Capa do LDM-14 de Andrini e Vasconcelos (2012)



Fonte: Guia do livro didático PNLD-2014: Matemática (2013, p. 59)

A seguir apresentamos o Quadro 71 com os dados gerais do livro que será analisado, seguido do Quadro 72, com os conteúdos de divisibilidades apresentados no sumário e no interior da unidade e capítulos.

Quadro 71: LMD-14 – Dados gerais do livro de Andrini e Vasconcelos (2012)

LDM-14	De 2012 – PNLD 2014		
Titulo	PRATICANDO MATEMÁTICA (Ed. Renovada)		
Autor	ÁLVARO ANDRINI ¹¹¹ E MARIA JOSÉ VASCONCELOS ¹¹²		
Editora	Editora do Brasil S/A	São Paulo, SP	Ano 2012
Quantidade de páginas do livro	288	Dimensões da página 27,5 cm por 20,5 cm	
Distribuição do conteúdo no livro	14 Unidades		
Unidade dedicada à divisibilidade	Unidade 6: Múltiplos e divisores		85 – 106 22 páginas (7,6%)
Unidade anterior à divisibilidade	Unidade 5: Potenciação e raiz quadrada de Números Naturais		75 – 84 10 páginas
Unidade posterior à divisibilidade	Unidade 7: Dados, tabelas e gráficos de barras		107 – 116 10 páginas

Fonte: Andrini e Vasconcelos (2012). Elaborado pela autora.

Os conteúdos de divisibilidade estão contemplados na Unidade 6 – Múltiplos e divisores e distribuídos em seis itens e cada página está identificada pela cor lilás.

Quadro 72: LDM-14 – Conteúdos de Divisibilidade no Sumário e no interior da unidade do livro de Andrini e Vasconcelos (2012)

Conteúdos de divisibilidade no sumário do livro de Andrini e Vasconcelos (2012) Unidade 6 – Múltiplos e Divisores	Conteúdos de divisibilidade no interior da Unidade 6 – Múltiplos e Divisores
Unidade 6 – Múltiplos e divisores 1. Sequência dos múltiplos de um número (p. 85)	Múltiplos e divisores (p. 85) 1. Sequência dos múltiplos de um número – Inicia o assunto com uma situação-problema e na resolução apresenta a sequência dos múltiplos de 7 (p. 85); – Cálculo dos múltiplos pela operação de multiplicação (p. 85). • Como saber se um número é múltiplo de outro? – Pela operação de divisão (p. 86) • ideia de “múltiplo de” e “divisível por” (p. 82).
2. Fatores ou divisores de um número natural (p. 87)	2. Fatores ou divisores de um número natural – Ideia de “múltiplo de” e “divisor de” a partir de exemplos (p. 87). – Cálculos dos divisores ou fatores pela operação de multiplicação (p. 87) – Exercícios de 1 a 6 (21 questões) (p. 88).

¹¹¹ Álvaro Andrini – Licenciado em Matemática. Pós-graduado em Álgebra Linear e Equações Diferenciais. Foi professor efetivo de Matemática da rede estadual durante trinta anos. Autor de diversos livros didáticos. (ANDRINI e VASCONCELOS, 2012).

¹¹² Licenciada em Matemática. Coordenadora e professora de Matemática em escola da rede particular. Coautora de coleção de Matemática para o Ensino Médio (ANDRINI e VASCONCELOS, 2012).

Quadro 72: Continuação

Conteúdos de divisibilidade no sumário do livro de Andrini e Vasconcelos (2002) Unidade 6 – Múltiplos e Divisores	Conteúdos de divisibilidade no interior da Unidade 6 – Múltiplos e Divisores
3. Critérios de divisibilidade – Economizando cálculos (p. 89)	3. Critérios de divisibilidade – Economizando cálculos (p. 89) • Divisibilidade por 2 por 5 e 10 (p. 89), • Divisibilidade por 4 e por 8 (p. 90) • Divisibilidade por 3 e 9 (p. 91) • Divisibilidade por 6 (p. 92). – Exercícios de 7 a 11: (p. 92)
4. Números primos (p. 93)	4. Números primos (p. 93): – Definição completa dos Números primos: – Apresenta a sequência dos números primos até 30 (p. 93) – Apresenta um texto num quadro com fundo amarelo “Quer saber mais sobre os números primos?” • Decomposição em fatores primos – Apresenta a definição de fatoração em fatores primos (p. 94). – Apresenta o cálculo dos fatores primos de um número pela multiplicação (p. 94). – Pela “<i>forma fatorada prima</i>” determina os divisores do número 30 (p. 94). – Decomposição em fatores primos pela divisão sucessiva com traço vertical (p. 95). – Exercícios de 12 a 22: 45 questões (p. 96).
5. Quando os múltiplos se encontram (p. 97)	5. Quando os múltiplos se encontram (p. 97): – Apresenta uma situação-problema. Na resolução apresenta a sequência dos múltiplos, múltiplos comuns e o mmc desses números (p. 97). – Cálculo do mmc pela decomposição em fatores primos pela divisão sucessiva e simultânea (p. 98). – Exercício de 23 a 30 (20 questões) (p. 99).
6. Divisores comuns e o mdc (p. 100)	6. Divisores comuns e o mdc (p. 100): – Apresenta uma situação-problema. Na resolução apresenta as sequências dos divisores, os divisores comuns e o mdc dos números 135, 105 e 90 (p. 100). – Cálculo do mdc pela decomposição em fatores primos pela divisão sucessiva em separado dos números dados e fatoração completa (p. 100). – Exercício de 31 a 36 (16 questões) (p. 101).
Final da Unidade: • Jogando com múltiplos (p. 102).	• Revisando (de 37 a 46): com 29 questões (pp. 103-104); • Desafios (de 47 a 50): 05 questões (p. 104); • Seção livre (de 51 a 55): 16 questões (p. 105); • Autoavaliação (de 56 a 64) 36 questões (p. 106)

Fonte: Andrini e Vasconcelos (2012). Elaborado pela autora.

Ao analisar os dois livros de Andrini e Vasconcelos, de 2002 (PNLD-2006), na seção 6.2.6 (LDM-11) e de 2012 (PNLD-2104) observamos algumas diferenças, as quais indicaremos a seguir:

- A cor indicativa da Unidade 6 mudou, desta edição é lilás e da edição anterior é azul;
- Mantém os mesmos exemplos e figuras;
- Na edição de 2002 logo após o assunto 1 “como saber se um número é múltiplo ...” apresenta exercícios, mas nesta edição não tem exercícios;
- Em **Números primos** na edição anterior o livro apresenta a definição incompleta de números primos e, nesta edição apresenta a definição completa, conforme expomos a seguir:

“Existem números que possuem exatamente dois divisores. Como o número 13 e 17, por exemplo. Esses números são chamados de *números primos*” (ANDRINI E VASCONCELOS, 2002, p. 89).

“Existem números que têm exatamente dois divisores: a unidade e o próprio número. Como o número 13 e 17, por exemplo. Esses números são chamados de **números primos**” (ANDRINI E VASCONCELOS, 2012, p. 93).

- Nesta edição apresenta um texto num quadro com fundo amarelo “Quer saber mais sobre os números primos?”, na edição anterior não havia nenhum texto sobre os números primos.
- Em ambas edições não há nenhum método de identificar os números primos e nem a definição de números compostos e, também não apresentam as definições de mdc e mmc.

Os conteúdos de divisibilidade, neste livro, estão apresentados na seguinte ordem: 1º). Múltiplos; 2º). Divisores; 3º). Critérios de divisibilidade; 4º). Números primos; 5º). Fatoração – Decomposição em fatores primos; 6º). Mínimo múltiplo comum; 7º). Máximo divisor comum.

A seguir apresentamos a Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade do LDM-14 (Quadro 73) e a Tabela 43, com o resultado final da análise de acordo com os indicadores.

Quadro 73: LDM-14 – Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro de Andrini e Vasconcelos (2012) – PNLD-2014

Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade LDM-14 de Andrini e Vasconcelos (2012) PNLD-2014				
	CONTEÚDOS DE DIVISIBILIDADE	(P)	(A)	T.CD
1	Múltiplos	---	---	---
1.1	Definição de múltiplos de um número	--	A	
1.2	Ideia de “múltiplo de”	P	--	
1.3	Cálculos dos múltiplos (pela multiplicação)	P	--	
1.4	Sequência dos múltiplos de um número	P	--	
	TOTAL CS-1	03	01	04
2	Divisores	---	---	---
2.1	Definição de divisor de um número	--	A	
2.2	Ideia de “divisível por”	P	--	
2.3	Determinação dos divisores pela sequência (divisão ou multiplicação)	P	--	
2.4	Determinação de todos divisores pela DFP (Fatoração completa)	P	--	
2.5	Determinação de todos divisores pela DFP (Algoritmo de Euclides)	--	A	
2.6	Cálculo do Número (quantidade) de divisores	--	A	
	TOTAL CS-2	03	03	06
3	Critério de divisibilidade	---	---	---
3.1	Definição	--	A	
3.2	Divisibilidade por 2	P	--	
3.3	Divisibilidade por 3	P	--	
3.4	Divisibilidade por 4	P	--	
3.5	Divisibilidade por 5	P	--	
3.6	Divisibilidade por 6	P	--	
3.7	Divisibilidade por 7	--	A	
3.8	Divisibilidade por 9	P	--	
3.9	Divisibilidade por 10	P	--	
3.10	Divisibilidade por 11	--	A	
	TOTAL CS-3	07	03	10
4	Números primos	---	---	---
4.1	Definição de Números primos	P	--	
4.2	Definição de Número composto	--	A	
4.3	Identificação de números primos pelo Crivo de Eratóstenes.	--	A	
4.4	Reconhecimento de um número primo pela divisão por primos	--	A	
	TOTAL CS-4	01	03	04
5	Fatoração completa – Decomposição em Fatores Primos (DFP)	---	---	---
5.1	Definição de fatoração	P	--	
5.2	Definição de fatoração completa (TFA)	--	A	
5.3	Cálculo dos fatores primos pela multiplicação	P	--	
5.4	Decomposição em fatores primos por divisão sucessiva	P	--	
5.5	Aplicação de fatoração no cálculo de raiz quadrada	--	A	
	TOTAL CS-5	03	02	05
6	Máximo Divisor Comum (MDC)	---	---	---
6.1	Definição de Máximo divisor comum	--	A	
6.2	Determinação do mdc pela sequência de divisores	P	--	
6.3	Determinação do mdc pela fatoração completa	P	--	
6.4	Determinação do mdc pela DFP, divisão sucessiva e simultânea	--	A	

Quadro 73: Continuação

Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade LDM-14 de Andrini e Vasconcelos (2012) PNLD-2014				
	CONTEÚDOS DE DIVISIBILIDADE	(P)	(A)	T.CD
6	Máximo Divisor Comum (MDC)	---	---	---
6.5	Determinação do mdc pelo processo prático de Euclides	--	A	
6.6	Identificação de primos entre si	--	A	
	TOTAL CS-6	02	04	06
7	Mínimo múltiplo comum (MMC)	---	---	---
7.1	Definição de mmc	--	A	
7.2	Determinação do mmc pela sequência dos múltiplos	P	--	
7.3	Determinação do mmc pela DFP em separado ou fatoração completa	--	A	
7.4	Determinação do mmc pela DFP divisão sucessiva e simultânea	P	--	
7.5	Determinação do mmc pela relação com o mdc	--	A	
	TOTAL CS-7	02	03	05
	TOTAL GERAL	21	19	40

Fonte: Andrini e Vasconcelos (2012). Elaborada pela autora.

Tabela 43: LDM-14 – Resultado final quantitativo e qualitativo da presença-ausência dos conteúdos de divisibilidade do livro de Andrini e Vasconcelos (2012).

Resultado final quantitativo e qualitativo da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade – LDM-14 de Andrini e Vasconcelos (2012)					
Conteúdos Principais			Conteúdos Secundários		Total
CP	CP _P	CP _A	CS _P	CS _A	CD _P
CP1	01	-	03	01	04
CP2	01	-	03	03	06
CP3	01	-	07	03	10
CP4	01	-	01	03	04
CP5	01	-	03	02	05
CP6	01	-	02	04	06
CP7	01	-	02	04	05
Total	07	00	21	19	40
Conceito: Fraco (ausência expressiva dos conteúdos de divisibilidade)					
Legenda: CD _P (Conteúdos de divisibilidade presentes); CP _P (Conteúdos principais presentes); CP _A (Conteúdos principais ausentes); CS _P (Conteúdos secundários presentes); CS _A (Conteúdos secundários ausentes).					

Após a análise constatamos que todos os conteúdos principais de divisibilidade estão contemplados no livro analisado, entretanto, observamos a ausência dos seguintes conteúdos secundários: **CP-1 Múltiplo**: Não apresenta a definição; **CP-2 Divisores**: Não apresenta a definição; não apresenta o cálculo para encontrar todos os divisores pelo processo prático de Euclides, tampouco o cálculo

de números de divisores; **CP-3 Critérios de divisibilidade:** Não apresenta a definição e nem os critérios de divisibilidade por 7 e por 11; **CP-4 Números primos:** Não apresenta a definição dos números compostos. Não apresenta nenhum método para o reconhecimento dos números primos; **CP-5 Fatoração – decomposição em fatores primos:** Não apresenta a definição de fatoração completa (TFA). Não apresenta a aplicação da fatoração no cálculo da raiz quadrada; **CP-6 Máximo divisor comum:** Não apresenta a definição de mdc; não apresenta a determinação do mdc pela divisão sucessiva e simultânea e nem a determinação pelo algoritmo de Euclides; não apresenta a definição e nem o mdc pelos números primos entre si. **CP-7 Mínimo múltiplo comum:** Não apresenta a definição de mmc; também não apresenta a determinação do mmc pela DFP sucessiva e em separado e nem a determinação do mmc pela relação com o mdc.

Conforme podemos observar na Ficha de análise (Quadro 73) e na Tabela 43, o livro apresenta 47,5% de conteúdos ausentes e, desse modo, pelos indicadores é classificado com o conceito “Fraco” por apresentar ausência expressiva dos conteúdos de divisibilidade.

6.3.2 LDM-15 – Análise do Livro Vontade de Saber Matemática 6º ano de Joamir Souza e Patrícia Pataro (2012)

Imagem 16: Capa do LDM-15 de Joamir Souza e Patrícia Pataro (2012)



Fonte: Guia do livro didático – PNLD-2014: Matemática (2013, p. 88).

A seguir expomos a apresentação do livro pelos autores aos alunos e o Quadro 74, com os dados gerais do livro que será analisado.

Apresentação

Provavelmente você já reparou nos códigos de barras das embalagens de produtos, utilizou uma balança ou observou algum gráfico na televisão. Esses são apenas alguns exemplos de situações nas quais a Matemática está presente. Ela está relacionada a diversas áreas do conhecimento e é uma ferramenta indispensável em nosso dia a dia. Compreender a Matemática e suas ideias nos auxilia a entender o mundo à nossa volta e a nos tornar cidadãos e cidadãs críticos e participantes na sociedade.

Este livro foi elaborado para que você possa, de maneira prazerosa, aplicar a Matemática em seu cotidiano. Para isso, procuramos abordar situações interessantes e atuais, nas quais você poderá usar a criatividade, explorar o raciocínio matemático, conversar com os colegas sobre procedimentos, levantar hipóteses e tomar decisões.

Contudo, a sua dedicação é fundamental. É importante que você faça sugestões, dê opinião, empenhe-se na resolução de situações desafiadoras, tornando-se participativo em sala de aula.

Enfim, esperamos que você, aluno ou aluna, desenvolva suas habilidades matemáticas e, com as orientações do professor, utilize este livro com entusiasmo e dedicação.

Os autores.

Quadro 74: LDM-15 – Dados gerais do livro de Joamir Souza e Patrícia Pataro (2012) – PNLD-2014

LDM-15	DE 2012 – PNLD-2014		
Título	VONTADE DE SABER MATEMÁTICA 6º ano (Livro do aluno e do professor)		
Autores	JOAMIR ROBERTO DE SOUZA ¹¹³ E PATRÍCIA ROSANA MORENO PATARO ¹¹⁴		
Editora	FTD	2ª edição	Ano: 2012
Quantidade de páginas do livro	352	Dimensões da página 20,50 por 27,50 cm	
Orientações para o professor	De 1 a 96 paginas		
Distribuição do conteúdo no livro	Em 14 Capítulos		
Capítulo dedicado à divisibilidade	Capítulo 5 – Múltiplo e divisores	(100 – 123) 24 páginas 6,5%	
Capítulo anterior ao de divisibilidade	Capítulo 4 – Potências e raízes	(84 – 99) 16 páginas	
Capítulo posterior ao de divisibilidade	Capítulo 6 – Frações	(124 – 159) 36 páginas	

Fonte: Souza e Pataro (2012). Elaborado pela autora.

¹¹³ Joamir Roberto de Souza – Professor graduado em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). Especialista em Estatística pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). Professor de Matemática da rede pública de ensino (SOUZA E PATARO, 2012).

¹¹⁴ Patrícia Rosana Moreno Pataro – Professora graduada em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). Especialista em Estatística pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). Professora de Matemática em escolas da rede particular de ensino (SOUZA E PATARO, 2012).

Este livro está dividido em 14 capítulos, iniciados com uma apresentação do tema a ser estudado, acompanhada da seção “*Conversando sobre o assunto*”. Os conteúdos são organizados em itens, que contêm explicações e exemplos relativos aos tópicos do tema do capítulo. Cada item inclui, ainda, atividades propostas, algumas das quais são destacadas com ícones: “*Desafio*”, “*Cálculo mental*”, “*Contexto*”, “*Tratamento da Informação*” e “*Calculadora*”. Ao final de cada capítulo, há a seção “*Refletindo sobre o capítulo*”.

Os conteúdos de divisibilidade estão contemplados no capítulo 5 e são introduzidos por um texto sobre o *Calendário Gregoriano* enfatizando os anos bissextos e apresenta três questões para os alunos responderem após o estudo do assunto no capítulo.

A seguir apresentamos o Quadro 75, com os conteúdos de divisibilidade no sumário do livro e no interior do capítulo do livro “*Vontade de Saber Matemática*”.

Quadro 75: LDM-15 – Conteúdos de divisibilidade no sumário e no interior do capítulo do livro de Souza e Pataro (2012) – PNLD-2014

Conteúdos de divisibilidade no sumário do LDM-15 de Joamir Souza e Patrícia Pataro (2012) – Capítulo 5: Múltiplos e divisores	Conteúdos de divisibilidade no interior da Capítulo 5 – Múltiplos e Divisores
Capítulo 5 – Múltiplos e divisores (p. 100)	– Introdução com um texto sobre o Calendário gregoriano (p. 100) – Seção “ <i>Conversando sobre o assunto</i> ”. Questões de 1 a 3. (p. 100).
Múltiplos de um número natural (p. 102)	• Múltiplo de um número natural (p. 102) – Apresenta definição de múltiplo e exemplos com a operação de multiplicação e de divisão. • Mínimo múltiplo comum (mmc) (p. 102) – Apresenta a determinação do mmc pelas sequências dos múltiplos de 3 e 5. – Apresenta a definição de mmc (p. 102) • Atividades de 1 a 10 (pp. 103 – 104).
Divisores de um número natural (p. 105)	Divisores de um número natural (p. 105) – Introduz o assunto com uma situação-problema. Apresenta os divisores pela operação de divisão (p. 129) – Apresenta definição de divisor. – Atividades de 11 a 18 (pp. 106 – 107) • Crêterios de divisibilidade (p.108) – Apresenta definição de divisibilidade – Divisibilidade por 2 (p.108) – Divisibilidade por 3 e 9 (p. 108) – Divisibilidade por 4 (p. 109) – Divisibilidade por 5 (p. 109) – Divisibilidade por 6 (p. 109) – Divisibilidade por 10 (p. 110).

Quadro 75: continuação

Conteúdos de divisibilidade no sumário do LDM-15 de Joamir Souza e Patrícia Pataro (2012) – Capítulo 5: Múltiplos e divisores	Conteúdos de divisibilidade no interior da Capítulo 5 – Múltiplos e Divisores
	• Máximo divisor comum (p.108) – Apresenta a determinação do mdc pelos exemplos de sequências dos divisores dos números 18 e 24 (p. 110) – Apresenta definição de mdc. – Apresenta uma situação-problema como exemplo de aplicação do mdc (p; 110) – Atividades, cálculo mental e desafios, de 19 a 27 (p. 111).
Números primos e números compostos (p. 112)	– Inicia o assunto apresentando os divisores dos números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12. – Apresenta a definição dos números primos e números compostos (p. 112) – Apresenta texto sobre o maior número primo encontrado em 2008 (p. 112). • Crivo de Eratóstenes – apresenta um pequeno texto de introdução ao método do Crivo de Eratóstenes para identificação dos números primos de 1 a 70 números.
Números primos e números compostos (p. 112) (Continuação)	• Decomposição em fatores primos (DFP) (p. 113) – Apresenta três formas de decomposição pela operação de multiplicação (p. 113). – Apresenta a definição de fatoração e de fatoração completa (TFA) (p. 113); – Apresenta a decomposição em fatores primos pela divisão sucessiva. • Cálculo do mmc pela decomposição em fatores primos (p. 114) – Apresenta a determinação do mmc pela DFP pela divisão sucessiva e separada (p. 114); – Apresenta a determinação do mmc pela DFP pela divisão sucessiva e simultânea (p. 114); – Atividades, cálculo mental e desafios, de 28 a 44 (pp. 115–116). • Cálculo do mdc pela decomposição em fatores primos (p. 117) – Apresenta a determinação do mdc pela DFP pela divisão sucessiva e separada (p. 117); – Apresenta a determinação do mdc pela DFP pela divisão sucessiva e simultânea (p. 117); – Apresenta definição e identificação dos números primos entre si (p. 117) – Atividades, cálculo mental e desafios, de 45 a 53 (pp. 117–119).
Refletindo sobre o capítulo (p. 119) Acessando tecnologias (p. 120) • Células de informação Revisão (p. 122) Testes (p. 123)	• Refletindo sobre o capítulo (p. 119) – Apresenta de 1 a 9 questões discursivas (p. 119) • Células de informação – Apresenta texto sobre Planilhas do <i>Libre Office</i> (Calc.) – Desafio de 62 a 64 (p. 123) – Testes de 65 a 70 (p. 123).

Fonte: Souza e Pataro (2012). Elaborado pela autora.

Conforme podemos observar no Quadro 75, acima, os conteúdos de divisibilidade são introduzidos a partir de textos explicativos, situações-problema e exemplos, para logo após apresentar as definições. Os autores apresentam em cada final de conteúdo de divisibilidade “Atividades, Cálculo mental e desafios”.

Os conteúdos de divisibilidade são apresentados na seguinte ordem: 1º). Múltiplos; 2º). Mínimo múltiplo comum; 3º). Divisores 4º). Critérios de divisibilidade; 5º). Máximo divisor comum; 6º). Números primos; 7º). Fatoração – Decomposição em fatores primos.

A seguir apresentamos a Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro (Quadro 76), e a Tabela 44 com o resultado final da análise e a qualificação do livro de acordo com os indicadores.

Quadro 76: LDM-15 – Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro de Joamir Souza e Patrícia Pataro (2012) – PNLD-2014

Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade LDM-15 de Joamir Souza e Patrícia Pataro (2012) – PNLD-2014				
	CONTEÚDOS DE DIVISIBILIDADE	(P)	(A)	T.CD
1	Múltiplos	---	---	---
1.1	Definição de múltiplos de um número	P	--	
1.2	Ideia de “múltiplo de”	P	--	
1.3	Cálculos dos múltiplos (pela multiplicação)	P	--	
1.4	Sequência dos múltiplos de um número	P	--	
	TOTAL CS-1	04	00	04
2	Divisores	---	---	---
2.1	Definição de divisor de um número	P	--	
2.2	Ideia de “divisível por”	P	--	
2.3	Determinação dos divisores pela sequência (divisão ou multiplicação)	P	--	
2.4	Determinação de todos divisores pela DFP (Fatoração completa)	--	A	
2.5	Determinação de todos divisores pela DFP (Algoritmo de Euclides)	--	A	
2.6	Cálculo do Número (quantidade) de divisores	--	A	
	TOTAL CS-2	03	03	06
3	Critério de divisibilidade	---	---	---
3.1	Definição	P	--	
3.2	Divisibilidade por 2	P	--	
3.3	Divisibilidade por 3	P	--	
3.4	Divisibilidade por 4	P	--	
3.5	Divisibilidade por 5	P	--	
3.6	Divisibilidade por 6	P	--	
3.7	Divisibilidade por 7	--	A	
3.8	Divisibilidade por 9	P	--	
3.9	Divisibilidade por 10	P	--	
3.10	Divisibilidade por 11	--	A	
	TOTAL CS-3	08	02	10

Quadro 76: Continuação

Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade LDM-15 de Joamir Souza e Patrícia Pataro (2012) – PNLD-2014				
	CONTEÚDOS DE DIVISIBILIDADE	(P)	(A)	T.CD
4	Números primos	---	---	---
4.1	Definição de Números primos	P	--	
4.2	Definição de Número composto	P	--	
4.3	Identificação de números primos pelo Crivo de Eratóstenes.	P	--	
4.4	Reconhecimento de um número primo pela divisão por primos	--	A	
	TOTAL CS-4	03	01	04
5	Fatoração Completa – Decomposição em Fatores Primos (DFP)	---	---	---
5.1	Definição de fatoração	P	--	
5.2	Definição de fatoração completa (TFA)	P	--	
5.3	Cálculo dos fatores primos pela multiplicação	P	--	
5.4	Decomposição em fatores primos por divisão sucessiva	P	--	
5.5	Aplicação de fatoração no cálculo de raiz quadrada	--	A	
	TOTAL CS-5	04	01	05
6	Máximo Divisor Comum (MDC)	---	---	---
6.1	Definição de Máximo divisor comum	P	--	
6.2	Determinação do mdc pela sequência de divisores	P	--	
6.3	Determinação do mdc pela fatoração completa	P	--	
6.4	Determinação do mdc pela DFP, divisão sucessiva e simultânea	P	--	
6.5	Determinação do mdc pelo processo prático de Euclides	--	A	
6.6	Identificação de primos entre si	P	--	
	TOTAL CS-6	05	01	06
7	Mínimo múltiplo comum (MMC)	---	---	---
7.1	Definição de mmc	P	--	
7.2	Determinação do mmc pela sequência dos múltiplos	P	--	
7.3	Determinação do mmc pela DFP em separado ou fatoração completa	P	--	
7.4	Determinação do mmc pela DFP divisão sucessiva e simultânea	P	--	
7.5	Determinação do mmc pela relação com o mdc	--	A	
	TOTAL CS-7	04	01	05
	TOTAL GERAL	31	09	40

Fonte: Souza e Pataro (2012). Elaborada pela autora.

A seguir apresentamos a Tabela 44, com o resultado final da análise e a qualificação do livro de matemática, de acordo com os indicadores.

Tabela 44: LDM-15 – Resultado final quantitativo e qualitativo da presença-ausência dos conteúdos de divisibilidade do livro de Souza e Pataro (2012).

Resultado final quantitativo e qualitativo da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade – LDM-15 de Joamir Souza e Patrícia Pataro (2012)					
Conteúdos Principais			Conteúdos Secundários		Total
CP	CP _P	CP _A	CS _P	CS _A	CD _P
CP1	01	-	04	00	04
CP2	01	-	03	03	06
CP3	01	-	08	02	10
CP4	01	-	03	01	04
CP5	01	-	04	01	05
CP6	01	-	05	01	06
CP7	01	-	04	01	05
Total	07	00	31	09	40
Conceito: Bom (ausência pouco expressiva dos conteúdos de divisibilidade)					
Legenda: CD _P (Conteúdos de divisibilidade presentes); CP _P (Conteúdos principais presentes); CP _A (Conteúdos principais ausentes); CS _P (Conteúdos secundários presentes); CS _A (Conteúdos secundários ausentes).					

Após a análise realizada constatamos que os conteúdos principais de divisibilidade estão todos contemplados no LDM-15, mas observamos a ausência dos seguintes conteúdos secundários:

CP-2 Divisores: Não apresenta o método de determinação dos divisores pela fatoração completa e nem pelo processo prático de Euclides. também não apresenta o cálculo de números de divisores; **CP-3 Critérios de divisibilidade:** Não apresenta os critérios de divisibilidade por 7 e nem por 11; **CP-4 Números primos:** Não apresenta o reconhecimento de um número primo pela divisão por primos; **CP-5 Fatoração completa** – decomposição em fatores primos: Não apresenta a aplicação da fatoração no cálculo da raiz quadrada; **CP-6 Máximo divisor comum:** não apresenta a determinação do mdc pela divisão sucessiva do processo prático de Euclides; **CP-7 Mínimo múltiplo comum:** não apresenta a determinação do mmc pela relação com o mdc de dois ou mais números.

Conforme podemos observar nos resultados finais, constatamos 22,5% de conteúdos ausentes e, desse modo, pelos indicadores é classificado com o conceito “Bom” por apresentar ausência pouco expressiva dos conteúdos de divisibilidade.

6.3.3 LDM-16 – Análise do Livro “Projeto Teláris – Matemática” 6º ano de Luiz Roberto Dante (2013)

Este livro está organizado em 4 (quatro) Unidades e 9 (nove) Capítulos e inicia com a apresentação pelo autor aos alunos e nas duas páginas seguintes apresenta “Conheça seu livro de matemática” com esclarecimentos sobre as seções e os capítulos.

Os conteúdos de divisibilidade estão contemplados na Unidade 2 (dois): Potenciação e divisibilidade e Capítulo 5: “Divisores e múltiplo de números naturais”.

O capítulo de divisibilidade inicia com introdução e cada conteúdo começa por uma situação-problema e na resolução dá a ideia dos conceitos, sem apresentar de forma explícita a definição do tema matemático abordado e em cada final dos capítulos apresenta uma lista de “Exercícios” e/ou “Exercícios e problemas”.

A seguir, expomos a Imagem 17, da capa do livro, seguida da apresentação do livro pelo autor, aos alunos.

Imagem 17: Capa do livro de Luiz Roberto Dante (2013).



Fonte: Guia do livro didático – PNLD-2014: Matemática (2013, p. 74).

Apresentação

Caro(a) aluno(a)

Bem-vindo(a) a esta nova etapa de estudos e aprendizagens.

Como você já sabe, a Matemática é uma parte importante de sua vida. Ela está presente em todos os lugares e em todas as situações de seu cotidiano: na escola, no lazer, nas brincadeiras, em casa.

Escrevi este livro para você compreender as ideias matemáticas e aplicá-las em seu dia a dia. Estou certo de que fará isso de maneira prazerosa,

agradável, participativa e sem aborrecimentos. Sabe por quê? Porque ao longo deste livro você será convidado(a) a pensar, a resolver problemas e desafios, a trocar ideias com os colegas, a observar ao seu redor, a ler sobre a evolução histórica da Matemática, a trabalhar em equipe, a conhecer curiosidades, a brincar, a pesquisar, a argumentar, a redigir e a divertir-se. Gostaria muito de que aceitasse este convite com entusiasmo e dedicação, participando ativamente de todas as atividades propostas. Vamos começar?
Um abraço

O autor

A seguir apresentamos o Quadro 77 com os dados gerais do livro “Projeto Teláris: Matemática” de Luiz Roberto Dante (2013).

Quadro 77: LDM-16 – Dados gerais do livro de Luiz Roberto Dante (2013)

LDM-16	2013 – PNLD-2014		
Título	PROJETO TELÁRIS ¹¹⁵ : MATEMÁTICA 6º ano		
Autor	LUIZ ROBERTO DANTE		
Ano da publicação	2013	1ª impressão	1ª edição
Editora	Ática	São Paulo	
Quantidade de páginas do livro	304	Dimensões da página: 20 cm por 27,50 cm	
Manual do professor	112 páginas		
Distribuição do conteúdo	09 capítulos		
Unidade dedicada à divisibilidade	Unidade 2 – Capítulo 5: Divisores e múltiplos de números naturais.		(122 – 147) 26 páginas (8,5%)
Capítulo que antecede ao de divisibilidade	Capítulo 4 – Potenciação, raiz quadrada e expressões numéricas.		(106 – 121) 16 páginas
Capítulo posterior ao de divisibilidade	Capítulo 6 – Frações e porcentagens		(152 – 189) 38 páginas

Fonte: Dante (2012). Elaborado pela autora.

A seguir apresentamos o Quadro 78, com os conteúdos de divisibilidade no sumário e no interior do capítulo, a Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro (Quadro 79) e, por fim, a Tabela 45 com o resultado final da análise e qualificação do livro.

¹¹⁵ O nome do Projeto Teláris se inspira na forma latina *telarium*, que significa “tecelão”, para evocar o entrelaçamento dos saberes na construção do conhecimento (DANTE, 2012).

Quadro 78: LDM-16 – Conteúdos de divisibilidade apresentados no sumário e no interior do capítulo do livro de Luiz Roberto Dante (2013)

Conteúdos de divisibilidade no sumário do livro de Luiz Roberto Dante (2013) Unidade 2: Potenciação e divisibilidade	Conteúdos de divisibilidade no interior do Capítulo 5 – Divisores e Múltiplos de números naturais
Unidade 2 – Capítulo 5 (pp.122 – 147): Divisores e múltiplos de números naturais (p. 122) 1. Introdução (p. 122)	Divisores e múltiplos de números naturais (p. 122) 1. Introdução – Introduz o assunto com duas situações-problema (p. 122).
2. Divisibilidade (p. 123) • Múltiplo e divisor de um número natural (p. 123)	2. Divisibilidade (p. 123) • Múltiplo e divisor de um número natural – Inicia com uma situação-problema, cuja resolução se dá pela operação de divisão – Apresenta a ideia de “divisível por” e “múltiplo de” (p. 123). – Exercícios e problemas questões (de 01 a 07 p. 124);
• Critério de divisibilidade (125- 129)	• Crítérios de divisibilidade (p. 125) – Inicia o assunto com uma situação-problema; – Apresenta definição de divisibilidade. • Divisibilidade por 2 (p.125); Exercícios de nº 8 (p. 125) • Divisibilidade por 3 (p. 126), Exercício nº 9 • Divisibilidade por 5 (p. 126); Exercícios – questões de 10 a 12; • Divisibilidade por 6 e por 4 (127); • Divisibilidade por 9 (128) – Seção “Leitura”: apresenta um texto sobre “Anos bissextos” (p. 128). Exercícios de 13 a 15 (p. 129); • Divisibilidade por 10 (129) Exercícios de 16 a 19 (p. 129).
3. Divisores de um número natural (130) • Obtenção dos divisores pelo processo geométrico	3. Divisores de um número natural (130) – Inicia com uma situação problema e usa a operação de divisão para encontrar os divisores de 12. Apresenta as sequências dos divisores de 12 e 18 (p. 131). – Exercícios de 20 a 26 (p. 131). • Obtenção dos Divisores pelo processo geométrico – “pelo desenho de regiões retangulares, cuja área seja os divisores de 16”; Exercícios de 27 a 29 (p. 132).
4. Números primo (133) Crivo de Eratóstenes (134) Decomposição de um número natural em fatores primos (135)	– Apresenta a definição de números primos _ Exercícios de 30 a 34 (p. 133); – Apresenta o Crivo de Eratóstenes e o processo para identificar os primos de 2 a 100 (p. 134); Exercícios de 35 a 37; no Número 37 o autor apresenta o método de Reconhecimento de um número primo” pela divisão por primos (p. 134).

Quadro 78: continuação

Conteúdos de divisibilidade no sumário do livro de Luiz Roberto Dante (2013) Unidade 2: Potenciação e divisibilidade	Conteúdos de divisibilidade no interior do Capítulo 5 – Divisores e Múltiplos de números naturais
Decomposição de um número natural em fatores primos (135)	• Decomposição de um número natural em fatores primos. Apresenta definição de fatoração (p. 135) – Processo das fatorações sucessivas: pela multiplicação (método da árvore) (p. 135) – Apresenta a definição de fatoração completa (TFA) (p. 136). – Apresenta o processo das divisões sucessivas em fatores primos (p. 136); – Exercícios de 38 e 39 (p. 136).
• Máximo divisor comum (mdc) (p. 137)	Máximo divisor comum (mdc) (137) – Introduz o assunto com uma situação problema, e na resolução apresenta a determinação do mdc pelas sequências dos divisores (p. 137); – Apresenta a definição de mdc (p. 137).
5. Múltiplos de um número natural (p. 139) • Mínimo múltiplo comum (mmc) (p. 141) Continuação	5. Múltiplos de um número natural (p. 139) – Inicia com uma situação problema e usa a operação de multiplicação para encontrar a sequência dos múltiplos do número 3 (p. 139). Exercícios e problemas de 45 a 55 (p. 139-140); – No item 51 – Generalizações, apresenta a generalização dos múltiplos com o exemplo de múltiplos de 5 por 5.n (p. 139). • Mínimo múltiplo comum (mmc) (p. 141) – Inicia o assunto com uma situação problema e usa as sequências dos múltiplos de 4, 6 e 12 para determinar o mmc, que é a resposta do problema (p. 141). – Apresenta definição de mmc (p. 141); Exercícios e problemas de 56 a 58 (p. 141); • Cálculo mental do mmc pela tentativa com os múltiplos dos números dados (p. 142) Exercícios e problemas de 59 a 61 (p. 142); - Seção “Desafio” – apresenta dois desafios: • (p. 142). • Processo prático para a determinação do mmc pela DFP sucessiva e simultânea (143) Exercícios e problemas de 62 a 64 (p. 143).
6. Problemas envolvendo mdc e mmc (p. 144)	6. Problemas envolvendo mdc e mmc Exercícios e problemas de 65 a 70 (p. 144); Seção Raciocínio lógico (uma questão) (p. 144)
Tratamento da informação (p. 145) Outros contextos (p. 146) Revisão cumulativa (p. 147)	Tratamento da informação: • Interpretação de gráficos – questão, 71: <i>um pouco da história do salário mínimo no Brasil</i> (p. 145) • Outros contextos – questão 72: <i>Incubação de aves</i> (p. 146). • Revisão cumulativa: de 1 a 12 questões (p. 147).

Fonte: Dante (2013). Elaborado pela autora.

Após a análise do capítulo observamos algumas diferenças com relação ao livro da edição anteriormente analisada (de 2010)

- Este livro, com relação ao da edição anterior, no aspecto gráfico apresenta uma desvantagem, pois as letras e os números das páginas diminuíram de tamanho.
- Em “Divisores” na edição anterior apresenta a determinação dos divisores pela decomposição em fatores primos (fatoração completa), pelo processo prático de Euclides e também o cálculo de número (quantidade) de divisores, mas nesta edição, não apresenta nenhum desses métodos.
- Nesta edição o autor apresenta as definições de mdc e de mmc, o que não ocorreu na edição anterior;
- Na edição anterior apresenta a aplicação de decomposição em fatores primos no cálculo de raiz quadrada, mas nesta edição este conteúdo está ausente.

Os conteúdos de divisibilidade neste livro, são apresentados na seguinte ordem: 1º). Múltiplos; 2º). Divisores; 3º). Critérios de divisibilidade e Determinação dos divisores; 4º). Números primos; 5º). Fatoração – Decomposição em fatores primos; 6º). Máximo divisor comum; 7º). Múltiplos e Mínimo múltiplo comum.

A seguir apresentamos a Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade do LDM-16 (Quadro 79) e a Tabela 45, com o resultado final da análise de acordo com os indicadores.

Quadro 79: LDM-16 – Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro de Luiz Roberto Dante (2013) – PNLD-2014

Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade LDM-16 de Luiz Roberto Dante (2013) – PNLD-2014				
	CONTEÚDOS DE DIVISIBILIDADE	(P)	(A)	T.CD
1	Múltiplos	---	---	---
1.1	Definição de múltiplos de um número	--	A	
1.2	Ideia de “múltiplo de”	P	--	
1.3	Cálculos dos múltiplos (pela multiplicação)	P	--	
1.4	Sequência dos múltiplos de um número	P	--	
	TOTAL CS-1	03	01	04
2	Divisores	---	---	---
2.1	Definição de divisor de um número	--	A	
2.2	Ideia de “divisível por”	P	--	
2.3	Determinação dos divisores pela sequência (divisão ou multiplicação)	P	--	
2.4	Determinação de todos divisores pela DFP (Fatoração completa)	--	A	
2.5	Determinação de todos divisores pela DFP (Algoritmo de Euclides)	--	A	
2.6	Cálculo do Número (quantidade) de divisores	--	A	
	TOTAL CS-2	02	04	06

Quadro 79: Continuação

Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade LDM-16 de Luiz Roberto Dante (2013) – PNLD-2014				
	CONTEÚDOS DE DIVISIBILIDADE	(P)	(A)	T.CD
3	Critério de divisibilidade	---	---	---
3.1	Definição	P	--	
3.2	Divisibilidade por 2	P	--	
3.3	Divisibilidade por 3	P	--	
3.4	Divisibilidade por 4	P	--	
3.5	Divisibilidade por 5	P	--	
3.6	Divisibilidade por 6	P	--	
3.7	Divisibilidade por 7	--	A	
3.8	Divisibilidade por 9	P	--	
3.9	Divisibilidade por 10	P	--	
3.10	Divisibilidade por 11	--	A	
	TOTAL CS-3	08	02	10
4	Números primos	---	---	---
4.1	Definição de Números primos	P	--	
4.2	Definição de Número composto	--	A	
4.3	Identificação de números primos pelo Crivo de Eratóstenes.	P	--	
4.4	Reconhecimento de um número primo pela divisão por primos	P	--	
	TOTAL CS-4	03	01	04
5	Fatoração Completa – Decomposição em Fatores Primos (DFP)	---	---	---
5.1	Definição de fatoração	P	--	
5.2	Definição de fatoração completa (TFA)	P	--	
5.3	Cálculo dos fatores primos pela multiplicação	P	--	
5.4	Decomposição em fatores primos por divisão sucessiva	P	--	
5.5	Aplicação de fatoração no cálculo de raiz quadrada	--	A	
	TOTAL CS-5	04	01	05
6	Máximo Divisor Comum (MDC)	---	---	---
6.1	Definição de Máximo divisor comum	P	--	
6.2	Determinação do mdc pela sequência de divisores	P	--	
6.3	Determinação do mdc pela fatoração completa	P	--	
6.4	Determinação do mdc pela DFP, divisão sucessiva e simultânea	P	--	
6.5	Determinação do mdc pelo processo prático de Euclides	--	A	
6.6	Identificação de primos entre si	--	A	
	TOTAL CS-6	04	02	06
7	Mínimo múltiplo comum (MMC)	---	---	---
7.1	Definição de mmc	P	--	
7.2	Determinação do mmc pela sequência dos múltiplos	P	--	
7.3	Determinação do mmc pela DFP em separado ou fatoração completa	--	A	
7.4	Determinação do mmc pela DFP divisão sucessiva e simultânea	P	--	
7.5	Determinação do mmc pela relação com o mdc	--	A	
	TOTAL CS-7	03	02	05
	TOTAL GERAL	27	13	40

Fonte: Dante (2013). Elaborada pela autora.

Tabela 45: LDM-16 – Resultado final quantitativo e qualitativo da presença-ausência dos conteúdos de divisibilidade do livro de Luiz R. Dante (2013)

Resultado final quantitativo e qualitativo da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade – LDM-16 de Luiz Roberto Dante (2013)					
Conteúdos Principais			Conteúdos Secundários		Total
CP	CP _P	CP _A	CS _P	CS _A	CD _P
CP1	01	-	03	01	04
CP2	01	-	02	04	06
CP3	01	-	08	02	10
CP4	01	-	03	01	04
CP5	01	-	04	01	05
CP6	01	-	04	02	06
CP7	01	-	03	02	05
Total	07	00	27	13	40
Conceito: Regular (ausência moderadamente expressiva dos conteúdos de divisibilidade)					
Legenda: CD _P (Conteúdos de divisibilidade presentes); CP _P (Conteúdos principais presentes); CP _A (Conteúdos principais ausentes); CS _P (Conteúdos secundários presentes); CS _A (Conteúdos secundários ausentes).					

Conforme podemos observar na Ficha de análise (Quadro 79) e na Tabela 45, dos resultados finais, todos os conteúdos principais de divisibilidade estão contemplados no livro analisado, entretanto, constatamos a ausência dos seguintes conteúdos secundários: **CP-1 Múltiplo**: Não apresenta a definição; **CP-2 Divisores**: não apresenta a definição; não apresenta a determinação de todos os divisores pela DFP (Fatoração completa) e nem pelo algoritmo de Euclides; também não apresenta o cálculo do número (quantidade) de divisores; **CP-3 Critérios de divisibilidade**: Não apresenta os critérios de divisibilidade por 7 e por 11; **CP-4 Números primos**: Não apresenta a definição de números compostos; **CP-6 Máximo divisor comum**: Não apresenta a determinação do mdc pelo processo prático de Euclides e nem a definição e o mdc de números primos entre si; **CP-7 Mínimo múltiplo comum**: Não apresenta a determinação do mmc pela fatoração completa (divisão sucessiva em separado) e nem pela relação com o mdc.

Conforme análise, contamos 32,5% de conteúdos ausentes e, de acordo com os indicadores é classificado com o conceito “Regular” por apresentar ausência moderadamente expressiva dos conteúdos de divisibilidade.

6.3.4 LDM-17 – Análise do Livro “Matemática Bianchini” 6º ano de Edwaldo Bianchini (2011)

Imagem 18: Capa do LDM-17 de Edwaldo Bianchini (2011)



Fonte: Guia do livro didático – PNLD-2014: Matemática (2013, p. 31).

Este livro está dividido em 11 capítulos, iniciado com uma página de apresentação do tema a ser estudado. Os capítulos estão divididos em itens, em que são abordados tópicos do conteúdo matemático. Em cada um deles, há uma explanação acompanhada de exemplos e da seção *Exercícios Propostos*. Além disso, o livro apresenta várias seções especiais que permeiam o desenvolvimento dos conteúdos: “*Pense mais um pouco*”, com atividades e desafios; “*Para saber mais*”, que inclui atividades para articulação com outras áreas do saber; “*Agora é com você*”; “*Trabalhando a informação*”, que traz os conteúdos referentes ao campo de estatística e probabilidade. Cada capítulo termina com atividades intituladas “*Exercícios complementares*” e “*Diversificando*”. Os “*Exercícios Propostos*” apresentam respostas apenas no *Manual do Professor*.

Ao final do livro encontram-se as respostas dos exercícios das seções especiais e as seções *Sugestões de Leitura para o Aluno* e *Bibliografia*.

A seguir expomos a apresentação pelo autor aos alunos.

Apresentação

Caro estudante,
Este livro foi pensado, escrito e organizado com o objetivo de facilitar sua aprendizagem e, também, ajudá-lo a ver como a Matemática está presente em tudo o que acontece à sua volta.

Aqui você vai encontrar exemplos de situações que permitem perceber que a Matemática faz parte do seu dia a dia.

Leia com atenção as explicações teóricas, para acompanhar as aulas e resolver os exercícios.

Faça deste livro um parceiro em sua vida escolar!

O autor

Apresentamos a seguir, o Quadro 80, com os dados gerais do livro que será analisado e o Quadro 81, com os conteúdos de divisibilidade no sumário do livro e no interior do capítulo.

Quadro 80: LDM-17 – Dados gerais do Livro de Edwaldo Bianchini (2011)

LDM-17	2011 – PNLD-2014		
Título	MATEMÁTICA BIANCHINI 6ºano		
Autor	EDWALDO BIANCHINI ¹¹⁶		
Editora	Moderna	7ª Edição	Ano: 2011
Quantidade de páginas do livro	344	Dimensões da página 20,50 cm por 27,50 cm	
Distribuição dos conteúdos no livro	11 Capítulos		
Capítulo dedicado a divisibilidade	Capítulo 4 – Divisibilidade		(92 – 119) 28 Páginas (8%)
Capítulo que antecede divisibilidade	Capítulo 3 – Estudando figuras geométricas		(76 – 91) 16 Páginas
Capítulo posterior ao de divisibilidade	Capítulo 5 – Retas e ângulos		(120 – 139) 20 Páginas

Fonte: Bianchini (2011). Elaborado pela autora.

Quadro 81: LDM-17 – Conteúdos de Divisibilidade apresentados no sumário e no interior da Capítulo do Livro de Edwaldo Bianchini (2011)

Conteúdos de divisibilidade no sumário do livro de Edwaldo Bianchini (2011) Capítulo 4: Divisibilidade	Conteúdos de divisibilidade no interior do Capítulo 4 – Divisibilidade
1. Múltiplo e divisores, 92	– Inicia “Múltiplos e divisores” com uma situação-problema. Operação de multiplicação e divisão (p. 92); – Apresenta a ideia de “múltiplo de” e “divisível por” (p. 93). Exercícios de 1 a 4 questões (p. 93).
2. Os múltiplos de um número, 94	– Apresenta a definição de múltiplos; – Operação de multiplicação e sequências dos múltiplos (p. 94). Exercício propostos de 5 a 14 questões (pp. 94-95).

¹¹⁶ Edwaldo Bianchini – Licenciado em Ciências pela Universidade da Associação de Ensino de Ribeirão Preto, com habilitação em Matemática pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras do Sagrado Coração de Jesus, Bauru (SP). Professor de Matemática da rede pública de ensino do estado de São Paulo, no ensino fundamental e médio, por 25 anos (BIANCHINI, 2011).

Quadro 81: continuação

Conteúdos de divisibilidade no sumário do livro de Edwaldo Bianchini (2011) Capítulo 4: Divisibilidade	Conteúdos de divisibilidade no interior do Capítulo 4 – Divisibilidade
3. Os divisores de um número, 96	– Inicia com exemplos e a operação de divisão; apresenta a sequência de divisores de 12 (p. 96) Exercícios propostos de 15 a 22 questões (p. 97). Seção “Pense mais um pouco” apresenta os números perfeitos (p. 98). Seção “Para saber mais” sobre sequência numérica, dos números pares, dos múltiplos e divisores (p. 98). Seção “agora é com você” (p. 99).
4. Critérios de divisibilidade, 100	– Apresenta definição de divisibilidade (p. 100) • Divisibilidade por 2, por 5 (p. 100); • Divisibilidade por 10 (p. 101); Exercícios de 23 a 28 (p. 101) • Divisibilidade por 3 e por 6 (p. 102); Exercícios de 29 a 34 (p. 101) • Divisibilidade por 9 (p. 103); Exercícios de 35-36 (p. 104) • Divisibilidade por 4 (p. 104); Exercícios de 37 a 41 (p. 105) Seção “Pense mais um pouco...”
5. Números primos, 106 • Decomposição em fatores primos (DFP), 107	• Números primos (p. 107) – Definição de números primos e números composto; Exercícios de 41 a 50 (p. 106). • Decomposição em fatores primos – definição – Definição de fatoração completa (TFA). – Fatoração sucessiva pela multiplicação e DFP pela divisão sucessiva (p. 108) Exercícios de 51 a 54 (p. 108) – Apresenta uma situação-problema com sequências dos divisores e dos divisores comuns (p. 109); – Apresenta definição de mdc (p.109). Exercícios de 55 a 58 (p. 109);
6. O máximo divisor comum, 109	• Encontrando o mdc pela decomposição em fatores primos (DFP) pela divisão sucessiva em separado (Fatoração completa) (p. 110). – Em Observação apresenta definição de números primos entre si (p. 110). Exercícios de 59 a 65 (p. 111);
7. O mínimo múltiplo comum, 112	– Apresenta uma situação-problema com sequências dos múltiplos e dos múltiplos comuns (p. 112); – Apresenta definição de mmc (p.112). Exercícios de 66 a 70 (p. 112); • Encontrando o mmc pela decomposição em fatores primos (DFP) pela divisão sucessiva em separado (Fatoração completa) (p. 113). – Apresenta a determinação do mmc pela DFP divisão sucessiva e simultânea (p. 113). Exercícios de 72 a 80 (p. 115).
Trabalhando a informação, 115 Construindo um gráfico de barras, 115 Diversificando; Jogo dos 21 palitos, 119	Exercícios complementares de 81 a 102 (de divisibilidade) (p. 117).

Fonte: Bianchini (2011). Elaborado pela autora.

Os conteúdos de divisibilidade são apresentados na seguinte ordem: 1º). Múltiplos; 2º). Divisores; 3º). Critérios de divisibilidade; 4º). Números primos; 5º). Fatoração – Decomposição em fatores primos; 6º). Máximo divisor comum; 7º). Múltiplos e Mínimo múltiplo comum.

Quadro 82: LDM-17 – Ficha de Análise da presença/ausência dos Conteúdos de Divisibilidade no Livro de Edwaldo Bianchini (2011) – PNLD-2014

Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade LDM-17 de Edwaldo Bianchini (2011) – PNLD-2014				
	CONTEÚDOS DE DIVISIBILIDADE	(P)	(A)	T.CD
1	Múltiplos	---	---	---
1.1	Definição de múltiplos de um número	P	--	
1.2	Ideia de “múltiplo de”	P	--	
1.3	Cálculos dos múltiplos (pela multiplicação)	P	--	
1.4	Sequência dos múltiplos de um número	P	--	
	TOTAL CS-1	04	00	04
2	Divisores	---	---	---
2.1	Definição de divisor de um número	P	--	
2.2	Ideia de “divisível por”	P	--	
2.3	Determinação dos divisores pela sequência (divisão ou multiplicação)	P	--	
2.4	Determinação de todos divisores pela DFP (Fatoração completa)	P	--	
2.5	Determinação de todos divisores pela DFP (Algoritmo de Euclides)	--	A	
2.6	Cálculo do Número (quantidade) de divisores	--	A	
	TOTAL CS-2	03	03	06
3	Critério de divisibilidade	---	---	---
3.1	Definição	P	--	
3.2	Divisibilidade por 2	P	--	
3.3	Divisibilidade por 3	P	--	
3.4	Divisibilidade por 4	P	--	
3.5	Divisibilidade por 5	P	--	
3.6	Divisibilidade por 6	P	--	
3.7	Divisibilidade por 7	--	A	
3.8	Divisibilidade por 9	P	--	
3.9	Divisibilidade por 10	P	--	
3.10	Divisibilidade por 11	--	A	
	TOTAL CS-3	08	02	10
4	Números primos	---	---	---
4.1	Definição de Números primos	P	--	
4.2	Definição de Número composto	P	--	
4.3	Identificação de números primos pelo Crivo de Eratóstenes.	--	A	
4.4	Reconhecimento de um número primo pela divisão por primos	--	A	
	TOTAL CS-4	02	02	04
5	Fatoração completa – Decomposição em fatores primos (DFP)	---	---	---
5.1	Definição de fatoração	P	--	
5.2	Definição de fatoração completa (TFA)	P	--	
5.3	Cálculo dos fatores primos pela multiplicação	P	--	
5.4	Decomposição em fatores primos por divisão sucessiva	P	--	
5.5	Aplicação de fatoração no cálculo de raiz quadrada	--	A	

Quadro 82: Continuação

	TOTAL CS-5	04	01	05
6	Máximo Divisor Comum (MDC)	---	---	---
6.1	Definição de Máximo divisor comum	P	--	
6.2	Determinação do mdc pela sequência de divisores	P	--	
6.3	Determinação do mdc pela fatoração completa	P	--	
6.4	Determinação do mdc pela DFP, divisão sucessiva e simultânea	--	A	
6.5	Determinação do mdc pelo processo prático de Euclides	--	A	
6.6	Identificação de primos entre si	P	--	
	TOTAL CS-6	04	02	06
7	Mínimo múltiplo comum (MMC)	---	---	---
7.1	Definição de mmc	P	--	
7.2	Determinação do mmc pela sequência dos múltiplos	P	--	
7.3	Determinação do mmc pela DFP em separado ou fatoração completa	P	--	
7.4	Determinação do mmc pela DFP divisão sucessiva e simultânea	P	--	
7.5	Determinação do mmc pela relação com o mdc	--	A	
	TOTAL CS-7	04	01	05
	TOTAL GERAL	29	11	40

Fonte: Bianchini (2011). Elaborado pela autora.

Tabela 46: LDM-17 – Resultado final quantitativo e qualitativo da presença-ausência dos conteúdos de divisibilidade do livro de Edwaldo Bianchini (2011) – PNLD-2014

Resultado final quantitativo e qualitativo da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade – LDM-17 de Edwaldo Bianchini (2011)					
Conteúdos Principais			Conteúdos Secundários		Total
CP	CP _P	CP _A	CS _P	CS _A	CD _P
CP1	01	-	04	00	04
CP2	01	-	03	03	06
CP3	01	-	08	02	10
CP4	01	-	02	02	04
CP5	01	-	04	01	05
CP6	01	-	04	02	06
CP7	01	-	04	01	05
Total	07	00	29	11	40
Conceito: Regular (ausência moderadamente expressiva dos conteúdos de divisibilidade)					
Legenda: CD _P (Conteúdos de divisibilidade presentes); CP _P (Conteúdos principais presentes); CP _A (Conteúdos principais ausentes); CS _P (Conteúdos secundários presentes); CS _A (Conteúdos secundários ausentes).					

Conforme podemos observar na Ficha de análise (Quadro 82) e na Tabela 46, dos resultados finais, todos os conteúdos principais de divisibilidade estão contemplados no livro analisado, entretanto, constatou-se a ausência dos seguintes conteúdos secundários:

CP-2 Divisores: Não apresenta o método de determinação dos divisores pela fatoração completa e nem pelo processo prático de Euclides; também não apresenta o cálculo de números de divisores; **CP-3 Critérios de divisibilidade:** Não apresenta os critérios de divisibilidade por 7 e por 11; **CP-4 Números primos:** Não apresenta a identificação dos números primos por nenhum processo (nem pela divisão por primos e nem pelo Crivo de Eratóstenes); **CP-5 Fatoração completa** (decomposição em fatores primos): Não apresenta a aplicação da fatoração no cálculo da raiz quadrada; **CP-6 Máximo divisor comum:** Não apresenta a determinação do mdc divisão simultânea; e nem pelo processo prático de Euclides; **CP-7 Mínimo múltiplo comum:** Não apresenta a determinação do mmc pela relação com o mdc.

Conforme análise, contatamos 27,5% de conteúdos ausentes e, de acordo com os indicadores o livro é classificado com o conceito “Regular” por apresentar ausência moderadamente expressiva dos conteúdos de divisibilidade.

6.3.5 LDM-18 – Análise do livro “Matemática Teoria e Contexto” 6º ano de Marília Centurión & José Jakubovic” (2012)

Este livro está estruturado em 7 (sete) capítulos, que por sua vez estão organizados em itens, nos quais são explanados tópicos dos conteúdos abordados, com apoio em exemplos. Em cada item, se encontram as seguintes seções especiais: *Pense e responda*; *Pensando em casa* (para estudo após as aulas).

A seguir expomos a apresentação pelos autores aos alunos e a capa do livro (Imagem 19).

Apresentação

Você conhece gente que joga vôlei muito bem ou toca guitarra espetacularmente. Como é que esse pessoal se torna tão bom?

Em geral, é porque gosta do que faz e se dedica a isso.

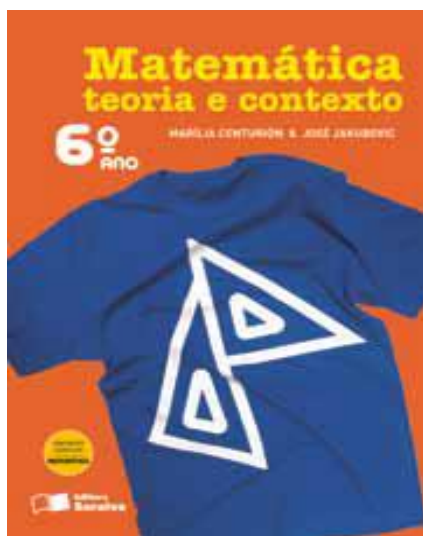
O gosto tem que vir com o prazer e a alegria; e a dedicação, com o exercício e persistência. As duas coisas se ajudam; o gosto leva à dedicação e a dedicação melhora o gosto.

Este livro foi escrito para adoçar o gosto, com desafios, surpresas e invenções, e para orientar a dedicação, organizando seu estudo.

Acrescentando a ajuda de seu professor e um pouco de gosto e dedicação (e, se faltar gosto, pondo mais dedicação), você vai se dar bem em Matemática. E vai perceber que esse conhecimento pode lhe ser útil a vida toda.

Os autores.

Imagem 19: Capa do LDM-18 de Centurión e Jakubovic (2012)



Fonte: Guia do livro didático – PNLD-2014: Matemática (2013, p. 53).

Outras seções especiais permeiam os capítulos: “Você sabia?” (Com informações complementares, muitas delas extraídas de revistas e jornais); “Desafios e surpresas” (com questões mais instigantes) e; “Ação”, na qual se espera uma participação mais ativa dos estudantes e a interação entre eles.

Algumas atividades, destacadas por um ícone, requerem a utilização da calculadora. O livro finaliza com as respostas das atividades das seções “Pense e responda”, “Pensando em casa” e “Desafios e surpresas”.

Os conteúdos de divisibilidade estão contemplados no Capítulo 3, intitulado “Múltiplos e Divisores”. Como introdução ao capítulo os autores apresentam um desenho de crianças numa roda expressando alegria (página inteira) e os demais assuntos iniciam com uma pequena introdução e/ou situação problema com resolução e/ou exemplos. As atividades são apresentadas no final de cada conteúdo de divisibilidade, nas seções: “Pense e responda”, “Pensando em casa” e “Desafios e surpresas”.

Na continuidade, apresentamos o Quadro 83 com os dados gerais do livro que será analisado: O Quadro 84, com os conteúdos de divisibilidade no sumário do livro e no interior do capítulo, a Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro (Quadro 85) e, por fim, a Tabela 47, com o resultado final da análise e qualificação do livro referente aos conteúdos de divisibilidade presentes.

Quadro 83: LDM-18 – Dados gerais do livro de Centurión & Jakubovic (2012)

LDM-18	2012 – PNLD-2014		
Título	MATEMÁTICA: TEORIA E CONTEXTO		
Autor	MARÍLIA CENTURIÓN ¹¹⁷ & JOSÉ JAKUBOVIC ¹¹⁸		
Editora	Ática	São Paulo	Ano: 2012
Quantidade de páginas do livro	271	Dimensão do livro: 20 cm por 27,50 cm	
Manual do Professor	80 páginas		
Distribuição do conteúdo:	Sete capítulos		
Capítulo dedicado a divisibilidade	Capítulo 3 – Múltiplos e divisores		(105 – 134) 30 páginas (11,1%)
Capítulo que antecede divisibilidade	Capítulo 2 – Geometria		(59 – 102) 46 Páginas
Capítulo posterior a Múltiplos e divisores	Capítulo 4 – Frações e decimais		(135 – 172) 38 Páginas

Fonte: Centurión e Jakubovic (2012). Elaborada pela autora

Quadro 84: LDM-18 – Conteúdos de divisibilidade no sumário e no interior do capítulo do livro “Matemática: Teoria e Contexto” 6º ano” (2012) – PNLD 2014

Conteúdos de divisibilidade no sumário do LDM-18 de Centurión e Jakubovic (2012) Capítulo 3: Múltiplos e divisores	Conteúdos de divisibilidade no interior do capítulo 3 – Múltiplos e divisores
Capítulo 3 (105 – 134) Múltiplos e divisores (p. 105) 1. Divisibilidade e padrões (p. 106)	1. Divisibilidade e padrões (p. 106) – Introduz o assunto com dois exemplos de situações contextualizadas (p. 106)
2. Critérios de divisibilidade (p.109) Desafios e surpresas (1, 2) Desafios e surpresas (3, 4, 5, 6)	2. Critérios de divisibilidade por 2, por 5 e por 10 (p. 107) – Apresenta definição de divisibilidade (p. 107) – Ênfase em padrões e regularidades – Divisibilidade por 2, por 5 e por 10 (p. 107). – Na seção “ Você sabia? ”, os autores apresentam o significado de “padrão” ¹¹⁹ . (p.108). – Pense e responda de 1 a 7 questões – Pensando em casa de 8 a 14 questões. 2. Critérios de divisibilidade (pp. 109 - 113) – Divisibilidade por 4 e por 8 (p. 109) – Divisibilidade por 3 e por 9 (p. 110) • Desafios e surpresas (1, 2) (p. 111)

¹¹⁷ Marília Centurión – Licenciada e bacharel em Matemática (FFCLM – São Paulo - SP). Professora e assessora de ensino de Matemática em diversas escolas. Autora de várias obras na área de Matemática (CENTURIÓN & JAKUBOVIC, 2012).

¹¹⁸ José Jakubovic – Licenciado em Matemática (FFCLM – São Paulo - SP). Foi professor e assessor de ensino de Matemática em diversas escolas. Autor de várias obras de matemática direcionadas ao Ensino Fundamental e Médio (CENTURIÓN & JAKUBOVIC, 2012).

¹¹⁹ A palavra **padrão** tem vários significados. Um deles é modelo para alguma coisa. O significado usado na Matemática é parecido com esse. Um padrão é uma característica que se repete, ou o modelo que é seguido. Por exemplo, na sequência 1, 2, 4, 8, 16, ... todos os números seguem um mesmo modelo: são potências de 2, isto é, 2^0 , 2^1 , 2^2 , 2^4 , ... (CENTURIÓN & JAKUBOVIC, 2012, p. 108)

Quadro 84: Continuação

Conteúdos de divisibilidade no sumário do LDM-18 de Centurión e Jakubovic (2012)	Conteúdos de divisibilidade no interior do capítulo 3 – Múltiplos e divisores
2. Critérios de divisibilidade (p.109) Desafios e surpresas (1, 2) Desafios e surpresas (3, 4, 5, 6)	– Divisibilidade por 6 e por 7 – os autores apresentam a seguinte orientação: “ <i>Você poderá descobrir por conta própria o critério de divisibilidade por 6 fazendo a próxima série de atividades. Já o critério de divisibilidade por 7 não é uma regra muito prática, fica mais fácil efetuar a divisão</i> ” (p. 112). – Pense e responda de 1 a 6 questões. Pensando em casa de 7 a 12 questões. • Desafios e surpresas de (3, 4, 5, 6).
3. Os números primos (p. 114)	3. Os números primos (114) • Tabela de números primos (p.115) – Apresenta definição de números primos • Como saber se um número é primo? – Processo de divisão por primos (p. 114) • Tabela de números primos (p. 115) – Apresenta a tabela de 1 a 50 números para identificar os primos usando o método do Crivo de Eratóstenes ¹²⁰ . A seção “ Você sabia? ” Apresenta o significado da palavra “primo” e uma informação importante sobre os números primos ¹²¹ (p.116). Método do Crivo de Eratóstenes (p. 115) “Pense e responda”: Questões de 1 a 5. “Pensando em casa”: questões de 6 a 11
4. Decomposição em fatores primos (p. 117) Desafios e surpresas (7, 8, 9)	4. Decomposição em fatores primos (117) – Apresenta definição de fatoraçoão (p. 118) – Apresenta definição de decomposição em fatores primos (mas não o TFA). – Apresenta o método pela operação de multiplicação (da árvore) e pela divisão sucessiva com traço vertical. – Pense e responda : de 1 a 3 questões – Pensando em casa : de 4 a 7 questões Desafios e surpresas de (7, 8, 9).
5. Múltiplos e padrões (p. 120) Pim! Pam! Pum!: ação sobre múltiplos	5. Múltiplos e padrões (p. 120) – Apresenta definição de múltiplos (p. 120) – Cálculo dos múltiplos de 3 pela operação de multiplicação (p. 120); – Apresenta sequência dos múltiplos– Pense e responda : de 1 a 3 questões – Pensando em casa : de 4 a 12 questões.
6. Mínimo múltiplo comum (mmc) (p. 124) Desafios e surpresas (11)	6. Mínimo múltiplo comum (mmc) (p. 124) – Determinação do mmc pelas sequências dos múltiplos dos números dados (p. 124) – Apresenta definição de mmc (p. 125) – Pense e responda : de 1 a 4 questões (p. 125) – Pensando em casa : de 5 a 8 questões (p. 126)
7. Cálculo prático e cálculo mental do mmc (p. 127).	• Desafios e surpresas (11) (p. 126).

¹²⁰ “Um matemático grego que viveu há mais de 2 000 anos”. O livro apresenta uma fotografia do busto de Eratóstenes com a seguinte informação abaixo: “*Eratóstenes (276 a.C. – 194 a.C.), gravura em metal do século XVIII*” (CENTURIÓN & JAKUBOVIC, 2012, p. 115).

¹²¹ A palavra **primo** significa *primeiro*. Os números primos são “os primeiros” devido à sua importância. E por que são importantes? Porque os outros podem ser escritos a partir deles, com multiplicações. Veja, então, que os números primos “formam” os outros números com a multiplicação” (CENTURIÓN & JAKUBOVIC, 2012, p. 115).

Quadro 84: Continuação

Conteúdos de divisibilidade no sumário do LDM-18 de Centurión e Jakubovic (2012)	Conteúdos de divisibilidade no interior do capítulo 3 – Múltiplos e divisores
6. Mínimo múltiplo comum (mmc) (p. 124) Desafios e surpresas (11) 7. Cálculo prático e cálculo mental do mmc (p. 127). (continuação)	7. Cálculo prático e Cálculo mental do mmc – – – Apresenta a determinação do mmc pelo produto de dois números¹²² (p. 127). – Apresenta o cálculo do mmc pela DFP de divisão sucessiva e simultânea (p. 128) – Apresenta o cálculo mental do mmc pela relação com o múltiplo dos números dados (p. 128). – Pense e responda: de 1 a 8 questões (p. 129) – Pensando em casa: de 4 a 12 questões (p. 129) questões)
8. Divisores e o máximo divisor comum (p. 130)	8. Divisores e o máximo divisor comum (p.130) – Apresenta definição de divisor de um número e a ideia de “divisor de” e “divisível por” (p. 130) • Encontrando divisores – Pela operação de divisão e na de multiplicação (p. 131) • Máximo divisor comum (p. 131) – Determinação do mdc pelas sequências dos divisores de dois números (p. 131) – Apresenta a definição do mdc (p. 131) – Pense e responda: de 1 a 5 questões. Pensando em casa: de 6 a 11 questões e “Desafios e surpresas” (11): 02 questões (p. 132).
9. Problema envolvendo múltiplo e divisores (p. 133) Desafios e surpresas (12)	9. Problemas envolvendo múltiplos e divisores – Inicia com uma situação-problema acompanhada de fotografia (p. 133). A seguir apresenta várias situações-problema nas seções: – Pense e responda: de 1 a 4 questões (p. 134) – Pensando em casa: de 5 a 09 questões Desafios e surpresas (12) (uma questão da PUC-MG) (p. 134)

Fonte: Centurión & Jakubovic (2012). Elaborado pela autora.

Os conteúdos de divisibilidade são apresentados na seguinte ordem: 1º). Critérios de divisibilidade; 2º). Números primos; 3º). Fatoração – Decomposição em fatores primos; 4º). Múltiplos; 5º). Mínimo múltiplo comum; 6º). Divisores; 7º). Máximo divisor comum.

A seguir, apresentamos a Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade do livro (Quadro 85) e a Tabela 47, com o resultado final.

¹²² Os autores apresentam um método para determinar o mmc de dois números pela relação de números primos entre si, em que o mdc é 1, mas não mencionam isso, e em vez disso, mostram com exemplos a decomposição dos números em fatores primos, apenas evidenciam que a decomposição não tem fatores comuns.

Quadro 85: LDM-18 – Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro de Marília Centurión & José Jakubovic (2012) – PNLD-2014

Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade LDM-18 de Marília Centurión & José Jakubovic (2012) – PNLD-2014				
	CONTEÚDOS DE DIVISIBILIDADE	(P)	(A)	T.CD
1	Múltiplos	---	---	---
1.1	Definição de múltiplos de um número	P	--	
1.2	Ideia de “múltiplo de”	P	--	
1.3	Cálculos dos múltiplos (pela multiplicação)	P	--	
1.4	Sequência dos múltiplos de um número	P	--	
	TOTAL CS-1	04	00	04
2	Divisores	---	---	---
2.1	Definição de divisor de um número	P	--	
2.2	Ideia de “divisível por”	P	--	
2.3	Determinação dos divisores pela sequência (divisão ou multiplicação)	P	--	
2.4	Determinação de todos divisores pela DFP (Fatoração completa)	--	P	
2.5	Determinação de todos divisores pela DFP (Algoritmo de Euclides)	--	P	
2.6	Cálculo do Número (quantidade) de divisores	--	P	
	TOTAL CS-2	03	03	06
3	Critério de divisibilidade	---	---	---
3.1	Definição	P	--	
3.2	Divisibilidade por 2	P	--	
3.3	Divisibilidade por 3	P	--	
3.4	Divisibilidade por 4	P	--	
3.5	Divisibilidade por 5	P	--	
3.6	Divisibilidade por 6	--	A	
3.7	Divisibilidade por 7	--	A	
3.8	Divisibilidade por 9	P	--	
3.9	Divisibilidade por 10	P	--	
3.10	Divisibilidade por 11	--	A	
	TOTAL CS-3	07	03	10
4	Números primos	---	---	---
4.1	Definição de Números primos	P	--	
4.2	Definição de Número composto	--	A	
4.3	Identificação de números primos pelo Crivo de Eratóstenes.	P	--	
4.4	Reconhecimento de um número primo pela divisão por primos	P	--	
	TOTAL CS-4	03	01	04
5	Fatoração Completa – Decomposição em Fatores Primos (DFP)	----	---	---
5.1	Definição de fatoração	P	--	
5.2	Definição de fatoração completa (TFA)	--	A	
5.3	Cálculo dos fatores primos pela multiplicação	P	--	
5.4	Decomposição em fatores primos por divisão sucessiva	P	--	
5.5	Aplicação de fatoração no cálculo de raiz quadrada	--	A	
	TOTAL CS-5	03	02	05
6	Máximo Divisor Comum (MDC)	---	---	---
6.1	Definição de Máximo divisor comum	P	--	
6.2	Determinação do mdc pela sequência de divisores	P	--	
6.3	Determinação do mdc pela fatoração completa	--	A	
6.4	Determinação do mdc pela DFP, divisão sucessiva e simultânea	--	A	
6.5	Determinação do mdc pelo processo prático de Euclides	--	A	
6.6	Identificação de primos entre si	--	A	

Quadro 85: Continuação

	TOTAL CS-6	02	04	06
7	Mínimo múltiplo comum (MMC)	---	---	---
7.1	Definição de mmc	P	--	
7.2	Determinação do mmc pela sequência dos múltiplos	P	--	
7.3	Determinação do mmc pela DFP em separado ou fatoração completa	--	A	
7.4	Determinação do mmc pela DFP divisão sucessiva e simultânea	P	--	
7.5	Determinação do mmc pela relação com o mdc	P	--	
	TOTAL CS-7	04	01	05
	TOTAL GERAL	26	14	40

Fonte: Centurión & Jakubovic (2012). Elaborado pela autora.

Tabela 47: LDM-18 – Resultado final quantitativo e qualitativo da presença-ausência dos conteúdos de divisibilidade do livro de Centurión & Jakubovic (2012)

Resultado final quantitativo e qualitativo da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade – LDM-18 de Marília Centurión & José Jakubovic (2012)					
Conteúdos Principais			Conteúdos Secundários		Total
CP	CP _P	CP _A	CS _P	CS _A	CD _P
CP1	01	-	04	00	04
CP2	01	-	03	03	06
CP3	01	-	07	03	10
CP4	01	-	03	01	04
CP5	01	-	03	02	05
CP6	01	-	02	04	06
CP7	01	-	04	01	05
Total	07	00	26	14	40
Conceito: Regular (ausência moderadamente expressiva dos conteúdos de divisibilidade)					
Legenda: CD _P (Conteúdos de divisibilidade presentes); CP _P (Conteúdos principais presentes); CP _A (Conteúdos principais ausentes); CS _P (Conteúdos secundários presentes); CS _A (Conteúdos secundários ausentes).					

Conforme podemos observar na Ficha de análise (Quadro 85) e na Tabela 47, dos resultados finais, todos os conteúdos principais de divisibilidade estão contemplados no livro analisado, entretanto, constatou-se a ausência dos seguintes conteúdos secundários:

CP-2 Divisores: Não apresenta a determinação de todos os divisores pela DFP (Fatoração completa) e nem pelo algoritmo de Euclides; também não apresenta o cálculo do número (quantidade) de divisores; **CP-3 Critérios de divisibilidade:** Não apresenta os critérios de divisibilidade por 6, por 7 e nem por 11; **CP-4 Números primos:** Não apresenta a definição de números compostos; **CP-5 Fatoração completa** (decomposição em fatores primos): Não apresenta a definição de fatoração completa (TFA); não apresenta a aplicação de decomposição em fatores primos no

cálculo da raiz quadrada; **CP-6 Máximo divisor comum:** Não apresenta a determinação do mdc pela DFP e fatoração completa, nem pela DFP da divisão sucessiva e simultânea e nem pelo processo prático de Euclides; não apresenta a definição e nem o mdc de números primos entre si; **CP-7 Mínimo múltiplo comum:** Não apresenta a determinação do mmc pela fatoração completa (divisão sucessiva em separado).

Desse modo, constatamos 35% de conteúdos ausentes e, de acordo com os indicadores é classificado com o conceito “Regular” por apresentar ausência moderadamente expressiva dos conteúdos de divisibilidade.

6.3.6 LDM-19 – Análise do Livro “Matemática: ideias e desafios” de Iracema Mori e Dulce Onaga (2012)

Imagem 20: Capa do LDM-19 de Iracema Mori e Dulce Onaga (2012)



Fonte: Guia do livro didático – PNLD-2014: Matemática (2013, p. 37).

O livro de Mori e Onaga (2012) “Matemática: ideias e desafios” está organizado em 11 Unidades e cada unidade em capítulos. Todas as unidades são encerradas com as seções: “Leitura+”, e “Revisão cumulativa e testes”.

Os conteúdos de divisibilidade estão contemplados na Unidade 6 (seis) e distribuídos em 4 (quatro) capítulos, conforme Quadro 87. Os capítulos estão permeados por várias seções especiais: “Explore o texto”; “Fazer e aprender”; “Exercício resolvido”; “Problema resolvido”; “Troquem ideias e experimentem”; “Troquem ideias e resolvam”; “Usando a calculadora”; “Aprender+” e “Seção+”.

A seguir expomos a apresentação do livro pelas autoras aos alunos.

Caro estudante,

“Como aprender Matemática?”

Essa é uma pergunta que você já deve ter feito a muitas pessoas e a si mesmo.

Sabemos que não existe um caminho único ou melhor para o aprendizado. Para quase tudo que se aprende ao longo da vida é preciso dedicação e persistência. E isso vale também para a Matemática.

Aprender é vivenciar e adquirir experiências, é enfrentar desafios, descobrir coisas novas, buscar conhecimento, querer. Esta coleção se propõe a auxiliá-lo para que seja bem-sucedido nesse aprendizado.

Você é nosso convidado especial nesta tarefa, que esperamos que seja prazerosa. Nesta coleção, algumas abordagens foram feitas por meio da História da Matemática e outras, a partir de situações-problema do cotidiano ou da observação de fenômenos que ocorrem na natureza. Você notará também que a Matemática é uma ciência dinâmica e em constante evolução. Diante dos desafios que esta coleção lhe propõe, você será instigado a resolvê-los e a desenvolver ideias e conceitos, ampliando seus conhecimentos de maneira estimulante e participativa. Além disso, terá a oportunidade de explorar as conexões da Matemática com a realidade e analisar aplicações em outras áreas do conhecimento.

Nosso esforço conjunto envolvendo autores, professores e alunos terá valido a pena se você desempenhar com perseverança o papel que lhe cabe na construção de seu próprio conhecimento. É isso que lhe proporcionará segurança no aprendizado da Matemática.

As autoras

Apresentamos a seguir, o Quadro 86, com os dados gerais do livro que será analisado, o Quadro 87, com os conteúdos de divisibilidade no sumário do livro e no interior dos quatro capítulos.

Quadro 86: LDM-19 – Dados gerais do livro de Iracema Mori e Dulce Onaga (2012)

LDM-19	DE 2012 (PNDL-2014)		
Titulo	MATEMÁTICA IDEIAS E DESAFIOS 6º ano		
Autor	IRACEMA MORI ¹²³ E DULCE SATIKO ONAGA ¹²⁴		
Editora	Saraiva	17ª edição	2012
Quantidade de páginas do livro	304	Dimensões da página 20,50 por 27,50	
Distribuição do conteúdo	11 Unidades e cada unidade em capítulos		
Unidade dedicada à divisibilidade	Unidade 6: Divisibilidade – Capítulos 1, 2, 3 e 4.		(109 – 136) 28 páginas 9,2%
Unidade que antecede divisibilidade	Unidade 5 – Formas geométricas plana		(95 – 108) 14 páginas
Capitulo posterior a divisibilidade	Unidade 7 – Polígonos		(137 – 150) 14 páginas

Fonte: Mori e Onaga (2012). Elaborado pela autora.

¹²³ Iracema Mori – Bacharel e Licenciada em Matemática pela USP. Professora e assessora de Matemática (MORI E ONAGA, 2012)..

¹²⁴ Dulce Satiko Onaga – Licenciada em Matemática pela USP. Professora e assessora de Matemática. Membro do Centro de Educação Matemática.

Quadro 87: LDM-19 – Conteúdos de divisibilidade apresentados no sumário e no interior dos capítulos do livro de Mori e Onaga (2012)

Conteúdos de divisibilidade no sumário do LDM-19 de Mori e Onaga (2012) Unidade 6 – Divisibilidade	Conteúdos de divisibilidade no interior dos capítulos 1, 2, 3 e 4.
Unidade 6 – Divisibilidade (p. 109) Capítulo 1. Sequências numéricas e padrões	1. Sequências numéricas e padrões (p. 110): – Introdução a partir de explicações com ênfase nas regularidades ou padrões (p. 110). – Apresenta a “ideia de “múltiplo de” e a sequência dos primeiros múltiplos. – Apresenta seção “Explore o texto” com seis questões (p. 111).
Capítulo 2 – Divisibilidade (p. 113) Divisibilidade por 2 (p. 115) Divisibilidade por 3 (p. 116) Divisibilidade por 9 (p. 117) Divisor de um número natural (p.117) Divisibilidade por 5 (p. 118) Divisibilidade por 10 (p. 119) Divisibilidade por 4 (p. 121) Divisibilidade por 6 (p. 122)	– Introduz o assunto com situações-problema. Seção “Fazer e aprender” questões de 9 a 11; (p. 113) – Seção “Troquem ideias e resolvam” com 04 questões *p. 114) e “Seção +” (p. 114). • Critério de divisibilidade por 2 (p. 115); • Critério de divisibilidade por 3 (p. 116); • Critério de divisibilidade por 9 (p. 117). ► Divisor de um número natural (p. 117) – Apresenta a ideia de “divisível por”, “divisor de” por meio de exemplos de cálculos com a operação de divisão (p. 117). – Seção “Troquem ideias e resolvam” com 03 questões (p. 117). – Seção “Fazer e aprender” questões de 12 a 20 (p. 118); • Critério de divisibilidade por 5 (p. 118); • Critério de divisibilidade por 10 (p. 119); – Seção “Fazer e aprender” questões de 21 a 23 (p. 120); Seção “Aprender +” questões de 24 a 31 (p. 120); – Apresenta “Seção +” (p. 121). • Critério de divisibilidade por 4 (p. 121); • Critério de divisibilidade por 6 (p. 122); – Seção “Fazer e aprender” questões de 32-33 e seção “Aprender +” questões de 34 a 42 (pp. 122-123); “Seção +” a “Divisibilidade por 7” (p. 123).
Capítulo 3 – Números primos e a decomposição de números (p. 124)	– Apresenta definição de números primos e de números compostos (p. 124); – Seção “Usando a calculadora” – Como reconhecer um número primo” pela divisão por primos, (p. 124) – Seção “Fazer e aprender” questões de 43 a 49 (pp. 125-126); – “Usando a calculadora” – Reconhecimento de números primos no intervalo de 1 a 100 pelo Crivo de Eratóstenes (p. 126).

Quadro 87: Continuação

Conteúdos de divisibilidade no sumário do LDM-19 de Mori e Onaga (2012)	Conteúdos de divisibilidade no interior dos capítulos 1, 2, 3 e 4.
• Decomposição em fatores primos (DFP) (p. 127) - Outra forma de fatorar completamente um número (p. 128) - Fatores, múltiplos e divisores de um número (p. 128).	► Decomposição em fatores primos, (p. 127) – Apresenta a fatoração pela operação de multiplicação (método da árvore) (p. 127) – Definição de DFP completa (TFA) (p. 127) – Seção “Fazer e aprender” questões de 50 a 54 (p. 128);
A decomposição de um número em fatores primos e a raiz quadrada (p. 130) • Divisores comuns e o máximo divisor comum (p. 131)	• Outra forma de fatorar completamente um número – pela divisão sucessiva em fatores primos (p. 128) • Fatores, múltiplos e divisores de um número, – pela fatoração completa identifica divisores e múltiplos e, seção “Fazer e aprender” questões de 55 a 60 (p. 129). – Seção “Troquem ideias e resolvam” apresenta uma situação-problema de múltiplos (p. 129). • A decomposição de um número em fatores primos e raiz quadrada – Aplicação da DFP no cálculo de raiz quadrada (p. 130) – Seção “Fazer e aprender” questões de 61-62 e “Seção +” (p. 130); • Divisores comuns e o máximo divisor comum – apresenta a sequência dos divisores de 36 e 54 e seus divisores comuns e a determinação do mdc (p. 131) – Definição do mdc (p. 131) – Apresenta o mdc pela fatoração completa (p. 131). – Seção “Fazer e aprender” questões de 63 a 65 (p. 131);
Capítulo 4 – Múltiplos comuns e o m.m.c. (p. 132) Decomposição simultânea em fatores primos e o m.m.c. (p. 133) Leitura + (p. 135) Revisão cumulativa e testes (p. 135).	– Apresenta situação-problema e a determinação do mmc pelos divisores comuns e pela fatoração completa (p. 132) – Apresenta a definição de mmc (p. 133) – Seção “Fazer e aprender” questões de 66 a 67 (p. 133). • Decomposição simultânea em fatores primos e o mmc (p. 133) – Seção “Fazer e aprender” questões de 68-69; - Seção “Aprender +”: Questões de 70 a 74; “Seção +” (p. 134); – Seção “Leitura +” Apresenta o crivo de Eratóstenes para identificar os números primos de 2 a 50 números (p. 135) Revisão cumulativa e testes, questões de 1 a 13 (pp. 135-136).

Fonte: Mori e Onaga (2001). Elaborado pela autora.

A ordem dos conteúdos de divisibilidade apresentada no livro está da seguinte forma: 1º). Múltiplos 2º). Divisores; 3º). Critérios de divisibilidade; 4º). Números primos; 5º). Decomposição em fatores primos; 6º). Máximo divisor comum e; 7º). Mínimo múltiplo comum.

Na continuidade, apresentamos a Ficha de análise (Quadro 88) com os dados da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro analisado e a Tabela 48, com o resultado final.

Quadro 88: LDM-19 – Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro de Iracema Mori e Dulce Onaga (2012) – PNLD-2014.

Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade LDM-19 de Iracema Mori e Dulce Onaga (2012) – PNLD-2014				
	CONTEÚDOS DE DIVISIBILIDADE	(P)	(A)	T.CD
1	Múltiplos	---	---	---
1.1	Definição de múltiplos de um número	--	A	
1.2	Ideia de “múltiplo de”	P	--	
1.3	Cálculos dos múltiplos (pela multiplicação)	P	--	
1.4	Sequência dos múltiplos de um número	P	--	
	TOTAL CS-1	03	01	04
2	Divisores	---	---	---
2.1	Definição de divisor de um número	--	A	
2.2	Ideia de “divisível por”	P	--	
2.3	Determinação dos divisores pela sequência (divisão ou multiplicação)	P	--	
2.4	Determinação de todos divisores pela DFP (Fatoração completa)	P	--	
2.5	Determinação de todos divisores pela DFP (Algoritmo de Euclides)	--	A	
2.6	Cálculo do Número (quantidade) de divisores	--	A	
	TOTAL CS-2	03	03	06
3	Critério de divisibilidade	---	---	---
3.1	Definição	P	--	
3.2	Divisibilidade por 2	P	--	
3.3	Divisibilidade por 3	P	--	
3.4	Divisibilidade por 4	P	--	
3.5	Divisibilidade por 5	P	--	
3.6	Divisibilidade por 6	P	--	
3.7	Divisibilidade por 7	P	--	
3.8	Divisibilidade por 9	P	--	
3.9	Divisibilidade por 10	P	--	
3.10	Divisibilidade por 11	--	A	
	TOTAL CS-3	09	01	10
4	Números primos	---	---	---
4.1	Definição de Números primos	P	--	
4.2	Definição de Número composto	P	--	
4.3	Identificação de números primos pelo Crivo de Eratóstenes.	P	--	
4.4	Reconhecimento de um número primo pela divisão por primos	P	--	
	TOTAL CS-4	04	00	04
5	Fatoração Completa – Decomposição em Fatores Primos (DFP)	---	---	---
5.1	Definição de fatoração	--	A	
5.2	Definição de fatoração completa (TFA)	P	--	
5.3	Cálculo dos fatores primos pela multiplicação	P	--	
5.4	Decomposição em fatores primos por divisão sucessiva	P	--	
5.5	Aplicação de fatoração no cálculo de raiz quadrada	P	--	
	TOTAL CS-5	04	01	05

Quadro 88: Continuação

Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade LDM-19 de Iracema Mori e Dulce Onaga (2012) – PNLD-2014				
	CONTEÚDOS DE DIVISIBILIDADE	(P)	(A)	T.CD
6	Máximo Divisor Comum (MDC)	---	---	---
6.1	Definição de Máximo divisor comum	P	--	
6.2	Determinação do mdc pela sequência de divisores	P	--	
6.3	Determinação do mdc pela fatoração completa	P	--	
6.4	Determinação do mdc pela DFP, divisão sucessiva e simultânea	--	P	
6.5	Determinação do mdc pelo processo prático de Euclides	--	P	
6.6	Identificação de primos entre si	--	P	
	TOTAL CS-6	03	03	06
7	Mínimo múltiplo comum (MMC)	---	---	---
7.1	Definição de mmc	P	--	
7.2	Determinação do mmc pela sequência dos múltiplos	P	--	
7.3	Determinação do mmc pela DFP em separado ou fatoração completa	P	--	
7.4	Determinação do mmc pela DFP divisão sucessiva e simultânea	P	--	
7.5	Determinação do mmc pela relação com o mdc	--	A	
	TOTAL CS-7	04	01	05
	TOTAL GERAL	30	10	40

Fonte: Mori e Onaga (2001). Elaborada pela autora.

Tabela 48: LDM-19 – Resultado final quantitativo e qualitativo da presença-ausência dos conteúdos de divisibilidade do livro de Mori e Onaga (2012) – PNLD-2014

Resultado final quantitativo e qualitativo da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade – LDM-19 de Iracema Mori e Dulce Onaga (2012)					
Conteúdos Principais			Conteúdos Secundários		Total
CP	CP _P	CP _A	CS _P	CS _A	CD _P
CP1	01	-	03	01	04
CP2	01	-	03	03	06
CP3	01	-	09	01	10
CP4	01	-	04	00	04
CP5	01	-	04	01	05
CP6	01	-	03	03	06
CP7	01	-	04	01	05
Total	07	00	30	10	40
Conceito: Regular (ausência moderadamente expressiva dos conteúdos de divisibilidade)					
Legenda: CD _P (Conteúdos de divisibilidade presentes); CP _P (Conteúdos principais presentes); CP _A (Conteúdos principais ausentes); CS _P (Conteúdos secundários presentes); CS _A (Conteúdos secundários ausentes).					

Conforme podemos observar na Ficha de análise (Quadro 88) e na Tabela 48, dos resultados finais, todos os conteúdos principais de divisibilidade estão

contemplados no livro analisado, entretanto, constatamos a ausência dos seguintes conteúdos secundários:

CP-1 Múltiplos: Não apresenta definição de múltiplo; **CP-2 Divisores:** Não apresenta a determinação de todos os divisores pelo algoritmo de Euclides e nem o método de determinação dos números (quantidade) de divisores; **CP-3 Critérios de divisibilidade:** Não o critério de divisibilidade por 11; **CP-5 Fatoração completa – Decomposição em fatores primos:** Não apresenta a definição de fatorar; **CP-6 MDC:** não apresenta a determinação pela decomposição em fatores primos sucessiva e simultânea e nem pelo processo prático de Euclides, não apresenta a definição e nem o mdc de números primos entre si; **CP-6 Mínimo múltiplo comum:** Não apresenta a determinação do mmc pela relação com o mdc.

Desse modo, constatamos 25% de conteúdos ausentes e, de acordo com os indicadores é classificado com o conceito “Regular” por apresentar ausência moderadamente expressiva dos conteúdos de divisibilidade.

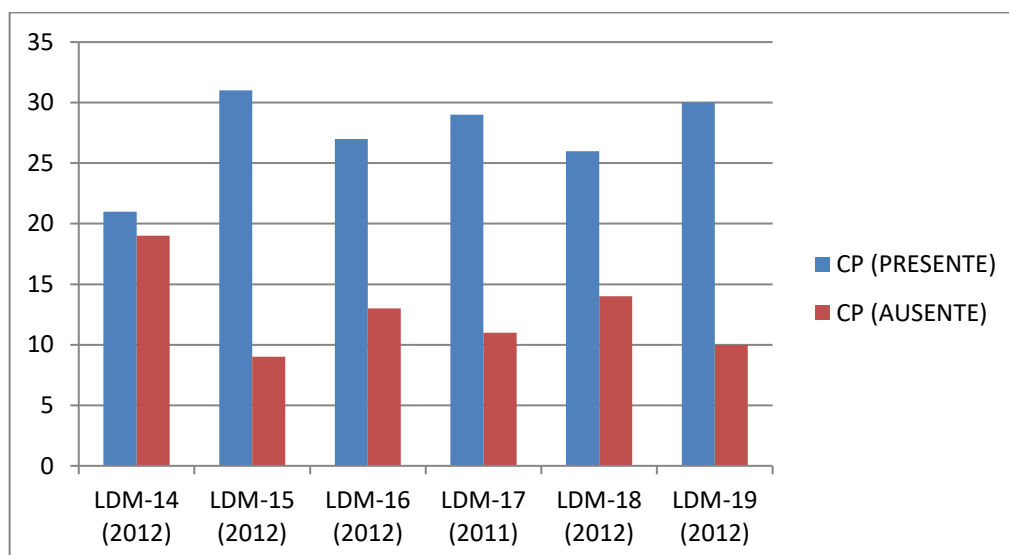
6.3.7 Considerações Finais da Análise da Fase 2 (parte 2)

Analisamos seis livros didáticos de matemática dentre os livros distribuídos pelo PNLD-2014, conforme a seguir: **LDM-14** de Álvaro Andrini e Maria José Vasconcelos (2012); **LDM-15** de Joamir Souza e Patrícia Pataro (2012); **LDM-16** de Luiz Roberto Dante (2012); **LDM-17** de Edwaldo Bianchini (2011); **LDM-18** de Marília Centurión e José Jakubovic (2012) e **LDM-19** de Iracema Mori e Dulce Onaga (2012).

Conforme análise realizada nos seis livros acima mencionados, as ausências dos conteúdos de divisibilidade estão variando de no mínimo 9 (nove) e máximo 19 conteúdos secundários do total de 40 conteúdos de divisibilidade relacionados. Sendo que apenas um livro (LDM-14) apresenta 47,5% de ausência dos conteúdos de divisibilidade, sendo classificado com “ausência expressiva” dos conteúdos de divisibilidade e, somente um dos livros (LDM-15) apresenta o menor índice de ausência dos conteúdos, sendo classificado com “ausência pouco expressiva”, os quatro livros (LDM-16, LDM-17, LDM-18 e LDM-19) são classificados com “ausência moderadamente expressiva” dos conteúdos de divisibilidade.

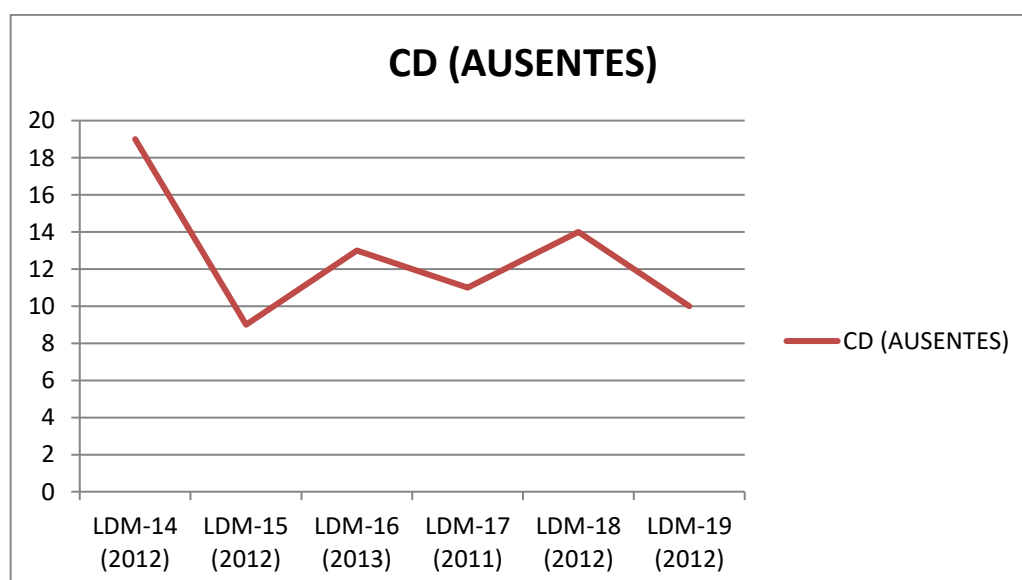
A seguir apresentamos o Gráfico 6, com os dados finais da presença-ausência dos conteúdos de divisibilidade nos livros analisados da Fase 2 (Parte 2).

Gráfico 6: Resultado quantitativo da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade nos livros analisados da fase 2 (Parte 2)



A seguir apresentamos o Gráfico 7 que retrata a ausência dos seis livros didáticos de matemática do 6º ano do PNLD-2014.

Gráfico 7: Retrata a ausência dos conteúdos de divisibilidade nos seis livros didáticos de matemática do 6º ano analisados da fase 2 (PNLD-2014)



6.4 PNLD-2017 – ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA DO SEXTO ANO – DO ENSINO FUNDAMENTAL – ANOS FINAIS (FASE 3)

Selecionamos oito livros da relação dos dez mais escolhidos das coleções de matemática do PNLD-2017 para o Ensino Fundamental dos Anos finais para averiguar a presença dos conteúdos de divisibilidade. Dos dez livros mais escolhidos excluimos os do 8º e 10º lugar porque não encontramos exemplares disponíveis, pois nenhuma das escolas de Boa Vista escolheu estes livros.

A seguir, na Tabela 49, apresentamos a relação dos livros de matemática do 6º ano selecionados para a análise, os quais estão identificados por cores similares aos de suas capas.

Tabela 49: Livros didáticos de matemática do 6º ano do PNLD-2017 (triênio: 2017-2018-2019) selecionados para a análise

Lugar	LDM	Título e autores	Unidade/ Capítulo	Título do capítulo
1º	20	Praticando matemática Álvaro Andrini	Unidade 6	Múltiplos e divisores
2º	21	Vontade de saber matemática Joamir Souza e Patrícia Moreno Pataro	Capítulo 5	Múltiplos e divisores
3º	22	Matemática – compreensão e prática Ênio Silveira	Capítulo 5	Múltiplos e divisores
4º	23	Projeto Teláris – Matemática Luiz Roberto Dante	Capítulo 5	Divisores e múltiplos de números naturais
5º	24	Matemática - Bianchini Edwaldo Bianchini	Capítulo 4	Divisibilidade
6º	25	Projeto Araribá – Matemática Editora Moderna (organização)	Parte 3 Unidades: 7 e 8	Múltiplos e divisores Unidades 7: Divisibilidade Unidade 8: MMC E MDC
7º	26	Convergências matemática Eduardo Chavante	Unidade 2 Capítulo 6	Múltiplos e divisores de números naturais
9º	27	Descobrimos e aplicando a matemática Alceu dos Santos Mazzeiro e Paulo Antônio Fonseca Machado	Capítulo 5	Múltiplos de números naturais Divisores de números naturais

Fonte: Portal FNDE. Elaborada pela autora

Nas próximas seções apresentaremos a análise de cada um dos oito livros de matemática do 6º ano selecionados do PNDL-2017.

6.4.1 LDM-20 – Análise do livro “Praticando Matemática” de Andrini e Vasconcelos (2015)

O livro está organizado em 14 unidades, subdivididas em itens, nas quais são desenvolvidos os conteúdos matemáticos, seguidos de exemplos e de exercícios propostos. Cada unidade é finalizada pelas seções: *Revisando e Autoavaliação*, com testes sobre o conteúdo estudado. Há, ainda, algumas seções que permeiam as unidades, como: *Desafios*; *Vale a pena ler*, que apresentam textos referentes à história da Matemática ou de ampliação do conteúdo, e *Seção Livre*, com curiosidades, situações do cotidiano ou questões interdisciplinares. No final do livro encontram-se sugestões de livros e sites para o estudante, referências bibliográficas, moldes e malhas para as atividades; e respostas de atividades propostas nas unidades. A seguir, a capa do livro analisado e apresentação pelo autor aos alunos.

Imagem 21: Capa do LDM-20 de Andrini e Vasconcelos (2015)



Fonte: Guia do livro didático de matemática – PNLD-2107 (MEC, 2016, p. 57).

APRESENTAÇÃO

Prezado aluno,

Você já deve ter perguntando a si mesmo, ou a seu professor:
“Para que eu devo estudar Matemática?”

Há três respostas possíveis:

1. A Matemática permite que você conheça melhor a realidade.
2. A Matemática pode ajudar você a organizar raciocínios.
3. A Matemática pode ajudar você a fazer descobertas.

Este livro e as orientações de seu professor constituem um ponto de partida.
O caminho para o conhecimento é você quem faz.

Os autores.

Apresentamos a seguir o Quadro 89, com os dados gerais do livro que será analisado.

Quadro 89: LDM-20 – Dados do Livro de Andrini e Vasconcelos (2015)

LDM-20	PNLD-2017 – Triênio: 2017-2018-2019	
Titulo	PRATICANDO MATEMÁTICA EDIÇÃO RENOVADA	
Autores	ÁLVARO ANDRINI ¹²⁵ e MARIA JOSÉ VASCONCELOS ¹²⁶	
Editora	Do Brasil	Edição: 4ª Ano: 2015
Quantidade de páginas do livro	288	Dimensões da página: 20,50 cm por 27,50 cm
Manual do professor	(289-400) 112 páginas	
Distribuição do conteúdo:	14 Unidades	
Unidade que antecede a divisibilidade:	5. Potenciação e raiz quadrada de números naturais	(49-90) 42 páginas
Unidade dedicada à divisibilidade:	Unidade 6: Múltiplos e divisores	(91-112) 22 páginas (7,6%)
Unidade posterior à divisibilidade	7: Dados, tabelas e gráficos de barra:	(113-122) 09 páginas

Fonte: Andrini e Vasconcelos (2015). Elaborado pela autora.

Quadro 90: LDM-20 – Conteúdos de divisibilidade no sumário e no interior da unidade do livro “Praticando Matemática” 6º ano” (2015) – PNLD 2016

Conteúdos de divisibilidade no sumário do livro de Andrini e Vasconcelos (2015) Unidade 6 – Múltiplos e Divisores	Conteúdos de divisibilidade no interior da Unidade 6 – Múltiplos e Divisores
Unidade 6 – Múltiplos e divisores (p. 91) 1. Sequência dos múltiplos de um número (p. 91)	1. Sequência dos múltiplos de um número (p. 91) – Inicia o assunto com uma situação-problema e na resolução apresenta a sequência dos múltiplos de 7 (p. 91); – Cálculo dos múltiplos pela operação de multiplicação (p. 91). • Como saber se um número é múltiplo de outro? – Pela operação de divisão (p. 92) • ideia de “múltiplo de” e “divisível por” (p. 92).
2. Fatores ou divisores de um número natural (p. 93)	2. Fatores ou divisores de um número natural – Ideia de “múltiplo de” e “divisor de” a partir de exemplos (p. 93).

¹²⁵ Álvaro Andrini – Licenciado em Matemática. Pós-graduado em Álgebra Linear e Equações Diferenciais. Foi professor efetivo de Matemática da rede estadual durante trinta anos. Autor de diversos livros didáticos (ANDRINI e VASCONCELOS, 2015).

¹²⁶ Maria José Vasconcelos – Licenciada em Matemática. Coordenadora de Matemática em escola da rede particular. Coautora de coleção de Matemática para o Ensino Médio (ANDRINI e VASCONCELOS, 2015).

Quadro 90: Continuação

Conteúdos de divisibilidade no sumário do livro de Andrini e Vasconcelos (2015) Unidade 6 – Múltiplos e Divisores	Conteúdos de divisibilidade no interior da Unidade 6 – Múltiplos e Divisores
2. Fatores ou divisores de um número natural (Continuação)	– Cálculos dos divisores ou fatores pela operação de multiplicação (p. 93) • Atividade “Interagindo” (dez questões) (p.93) • Exercícios de 1 a 6 (36 questões) (p. 94).
3. Critérios de divisibilidade – Economizando cálculos (p. 95)	3. Critérios de divisibilidade – Economizando cálculos (p. 95) • Divisibilidade por 2, 5 e 10. – Atividades “Refletindo” (de 1 a 5): 07 questões • Divisibilidade por 4 e por 8. – Atividade “Refletindo”: Uma questão • Divisibilidade por 3 e 9. – Atividades “Refletindo” (de 1 a 2): 03 questões • Divisibilidade por 6. – Atividades “Refletindo” (de 1 a 2): 02 questões – Atividade “Interagindo”: Uma questão. – Atividade “Interagindo” (1 a 6) 09 questões. – Exercícios de 7 a 11: 15 questões (p. 98).
4. Números primos (p. 93)	4. Números primos (p. 99) – Definição completa dos Números primos: – Apresenta a sequência dos números primos até 30 (p. 99) – Apresenta um texto “Quer saber mais sobre os números primos?” (p. 99) • Decomposição em fatores primos – Apresenta a definição de fatoração em fatores primos e o cálculo dos fatores primos de um número pela multiplicação (p. 100). – Pela “<i>forma fatorada prima</i>” determina os divisores do número 30 (p. 100). – DFP pela divisão sucessiva com traço vertical (p. 101). – Atividade “Interagindo” (de 1 a 6): 09 questões (p. 101); – Exercícios de 12 a 22 (54 questões) (p. 102).
5. Quando os múltiplos se encontram (p. 103)	5. Quando os múltiplos se encontram (p. 103) – Apresenta uma situação-problema. Na resolução apresenta a sequência dos múltiplos de 9 e 12, os múltiplos comuns e o mmc desses números (p. 103). – Mínimo múltiplo comum pela sequência dos múltiplos da resolução do problema (p. 103). – Cálculo do mmc pela DFP pela divisão sucessiva e simultânea (p. 103). – Atividade “Refletindo”: 06 questões (p. 104); – Exercício de 23 a 30 (20 questões) (p. 104).

Quadro 90: continuação

Conteúdos de divisibilidade no sumário do livro de Andrini e Vasconcelos (2015) Unidade 6 – Múltiplos e Divisores	Conteúdos de divisibilidade no interior da Unidade 6 – Múltiplos e Divisores
6. Divisores comuns e o mdc (p. 106)	6. Divisores comuns e o mdc (p. 106) – Apresenta uma situação-problema. Apresenta as sequências dos divisores de 135, 105 e 90, os divisores comuns e o mdc dos números 135, 105 e 90 (p. 106). – Cálculo do mdc pela DFP pela divisão sucessiva em separado dos números dados e fatoração completa (p. 106). – Exercício de 31 a 36 (16 questões) (p. 107).
(Final da Unidade)	• Revisando: questões de 37 a 46 (p. 109); • Desafios: questões de 47 a 50 (p. 110); • Seção livre: questões de 51 a 55 (p. 111); • Autoavaliação: questões de 56 a 64 (p. 112)

Fonte: Andrini e Vasconcelos (2015). Elaborado pela autora

A seguir apresentamos a Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade do livro analisado (Quadro 91) e a Tabela 50, com o resultado final da análise e qualificação do livro referente aos conteúdos de divisibilidade presentes.

Quadro 91: LDM-20 – Ficha de Análise da presença/ausência dos Conteúdos de Divisibilidade no Livro de Andrini e Vasconcelos (2015) PNLD-2017

Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade LDM-20 de Andrini e Vasconcelos (2015) PNLD-2017				
	CONTEÚDOS DE DIVISIBILIDADE	(P)	(A)	T.CD
1	Múltiplos	---	---	---
1.1	Definição de múltiplos de um número	--	A	
1.2	Ideia de “múltiplo de”	P	--	
1.3	Cálculos dos múltiplos (pela multiplicação)	P	--	
1.4	Sequência dos múltiplos de um número	P	--	
	TOTAL CS-1	03	01	04
2	Divisores	---	---	---
2.1	Definição de divisor de um número	--	A	
2.2	Ideia de “divisível por”	P	--	
2.3	Determinação dos divisores pela sequência (divisão ou multiplicação)	P	--	
2.4	Determinação de todos divisores pela DFP (Fatoração completa)	P	--	
2.5	Determinação de todos divisores pela DFP (Algoritmo de Euclides)	--	A	
2.6	Cálculo do Número (quantidade) de divisores	--	A	
	TOTAL CS-2	03	03	06

Quadro 91: Continuação

Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade LDM-20 de Andrini e Vasconcelos (2015) PNLD-2017				
	CONTEÚDOS DE DIVISIBILIDADE	(P)	(A)	T.CD
3e	Critério de divisibilidade	---	---	---
3.1	Definição	--	A	
3.2	Divisibilidade por 2	P	--	
3.3	Divisibilidade por 3	P	--	
3.4	Divisibilidade por 4	P	--	
3.5	Divisibilidade por 5	P	--	
3.6	Divisibilidade por 6	P	--	
3.7	Divisibilidade por 7	--	A	
3.8	Divisibilidade por 9	P	--	
3.9	Divisibilidade por 10	P	--	
3.10	Divisibilidade por 11	--	A	
	TOTAL CS-3	07	03	10
4	Números primos	---	---	---
4.1	Definição de Números primos	P	--	
4.2	Definição de Número composto	--	A	
4.3	Identificação de números primos pelo Crivo de Eratóstenes.	--	A	
4.4	Reconhecimento de um número primo pela divisão por primos	--	A	
	TOTAL CS-4	01	03	04
5	Fatoração completa – Decomposição em Fatores Primos (DFP)	---	---	---
5.1	Definição de fatoração	P		
5.2	Definição de fatoração completa (TFA)	--	A	
5.3	Cálculo dos fatores primos pela multiplicação	P	--	
5.4	Decomposição em fatores primos por divisão sucessiva	P	--	
5.5	Aplicação de fatoração no cálculo de raiz quadrada	--	A	
	TOTAL CS-5	03	02	05
6	Máximo Divisor Comum (MDC)	---	---	---
6.1	Definição de Máximo divisor comum	--	A	
6.2	Determinação do mdc pela sequência de divisores	P	--	
6.3	Determinação do mdc pela fatoração completa	P	--	
6.4	Determinação do mdc pela DFP, divisão sucessiva e simultânea	--	A	
6.5	Determinação do mdc pelo processo prático de Euclides	--	A	
6.6	Identificação de primos entre si	P	--	
	TOTAL CS-6	03	03	06
7	Mínimo múltiplo comum (MMC)	---	---	---
7.1	Definição de mmc	--	A	
7.2	Determinação do mmc pela sequência dos múltiplos	P	--	
7.3	Determinação do mmc pela DFP em separado ou fatoração completa	--	A	
7.4	Determinação do mmc pela DFP divisão sucessiva e simultânea	P	--	
7.5	Determinação do mmc pela relação com o mdc	--	A	
	TOTAL CS-7	02	03	05
	TOTAL GERAL	22	18	40

Fonte: Andrini e Vasconcelos (2015). Elaborada pela autora.

Tabela 50: LDM-20 – Resultado final quantitativo e qualitativo da presença-ausência dos conteúdos de divisibilidade do livro de Andrini e Vasconcelos (2015)

Resultado final quantitativo e qualitativo da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade – LDM-20 de Andrini e Vasconcelos (2015)					
Conteúdos Principais			Conteúdos Secundários		Total
CP	CP _P	CP _A	CS _P	CS _A	CD _P
CP1	01	-	03	01	04
CP2	01	-	03	03	06
CP3	01	-	07	03	10
CP4	01	-	01	03	04
CP5	01	-	03	02	05
CP6	01	-	03	03	06
CP7	01	-	02	03	05
Total	07	00	22	18	40
Conceito: Fraco (ausência expressiva dos conteúdos de divisibilidade)					
Legenda: CD _P (Conteúdos de divisibilidade presentes); CP _P (Conteúdos principais presentes); CP _A (Conteúdos principais ausentes); CS _P (Conteúdos secundários presentes); CS _A (Conteúdos secundários ausentes).					

O livro “Praticando Matemática” de Andrini e Vasconcelos desta edição está classificado em primeiro lugar como o livro mais escolhido pelos professores brasileiros. E também, foi o mais escolhido (em 1º lugar) pelos professores das escolas estaduais do Ensino Fundamental Anos Finais da Capital Boa Vista (RR) para o PNLD-2017, conforme dados publicados pelo FNDE (2017).

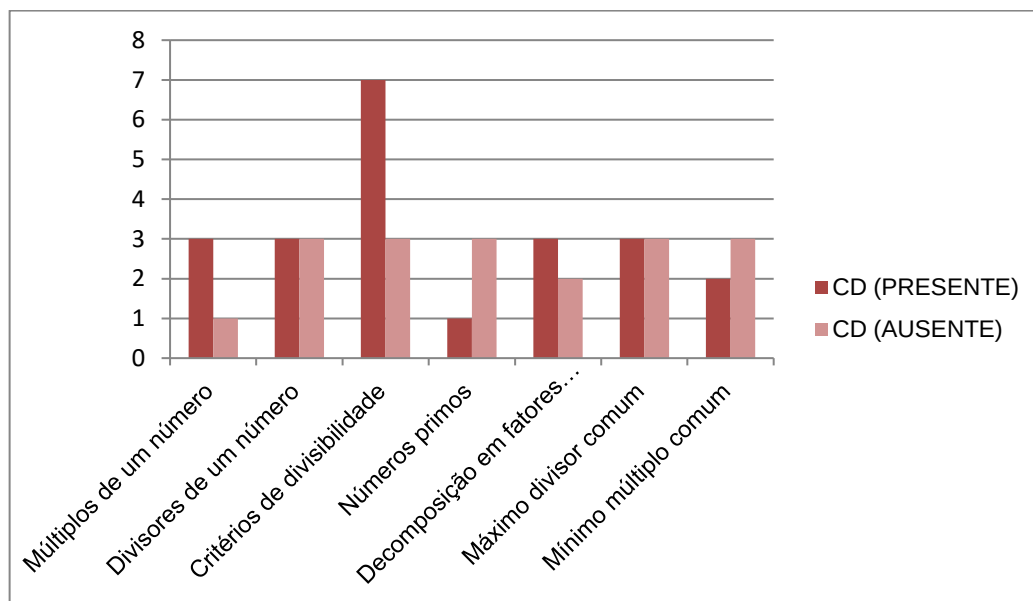
Entretanto, o resultado da análise realizada, conforme podemos observar nos dados apresentados, todos os conteúdos principais de divisibilidade estão contemplados mas, constatamos a ausência dos seguintes conteúdos secundários:

CP-1 Múltiplo: não apresenta a definição; **CP-2 Divisores:** não apresenta a definição; não apresenta o cálculo para encontrar todos os divisores pelo processo prático de Euclides, tampouco o cálculo de números de divisores; **CP-3 Critérios de divisibilidade:** não apresenta a definição e nem os critérios de divisibilidade por 7 e por 11; **CP-4 Números primos:** não apresenta a definição dos números compostos. Não apresenta nenhum método para o reconhecimento dos números primos; **CP-5 Fatoração – decomposição em fatores primos:** não apresenta a definição de fatoração completa (TFA). Não apresenta a aplicação da fatoração no cálculo da raiz quadrada; **CP-6 Máximo divisor comum:** não apresenta a definição de mdc. Não apresenta a determinação do mdc pela divisão sucessiva e simultânea de dois ou mais

números; **CP-7 Mínimo múltiplo comum:** não apresenta a definição de mmc; não apresenta a determinação do mmc pela relação com o mdc;

Desse modo, constatamos 45% de conteúdos de divisibilidade ausentes. Assim, pelos indicadores é classificado com o conceito “Fraco” por apresentar ausência expressiva dos conteúdos de divisibilidade.

Gráfico 8: LDM-20 – Resultado final da análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade do livro de Andrini e Vasconcelos (2015)



6.4.2 LDM-21 – Análise do livro “Vontade de Saber Matemática” de Joamir Souza e Patrícia Pataro (2015)

Imagem 22: Capa do LDM-21 de Joamir Souza e Patrícia Pataro (2015)



Fonte: Guia do livro didático de matemática – PNLD-2017 (MEC, 2016, p.129).

A seguir, expomos a apresentação dos autores aos alunos e o Quadro 92, com os dados gerais do livro que será analisado.

Apresentação

Provavelmente você já reparou nos códigos de barras das embalagens de produtos, utilizou uma balança ou observou algum gráfico na televisão ou utilizou um computador. Esses são apenas alguns exemplos de situações nas quais a Matemática está presente. Ela está relacionada a diversas áreas do conhecimento e é uma ferramenta indispensável em nosso dia a dia. Compreender a Matemática e suas ideias nos auxilia a entender o mundo à nossa volta e a nos tornar cidadãos e cidadãs críticos e participantes na sociedade.

Este livro foi elaborado para que você possa, de maneira prazerosa, aplicar a Matemática em seu cotidiano. Para isso, procuramos abordar situações interessantes e atuais, nas quais você poderá usar a criatividade, explorar o raciocínio matemático, conversar com os colegas sobre procedimentos, levantar hipóteses e tomar decisões.

Contudo, a sua dedicação é fundamental. É importante que você faça sugestões, dê opinião, empenhe-se na resolução de situações desafiadoras, tornando-se participativo em sala de aula.

Enfim, esperamos que você, aluno ou aluna, desenvolva suas habilidades matemáticas e, com as orientações do professor, utilize este livro com entusiasmo e dedicação.

Os autores.

Quadro 92: LDM-21 – Dados Gerais do Livro de Souza e Pataro (2015)

LDM-21	DE 2015 – PNLD-2017		
Título	VONTADE DE SABER MATEMÁTICA 6º		
Autores	JOAMIR ROBERTO DE SOUZA ¹²⁷ E PATRÍCIA ROSANA MORENO PATARO ¹²⁸		
Editora	FTD	2ª edição	Ano: 2012
Quantidade de páginas do livro	352	Dimensões da página 20,50 por 27,50 cm	
Orientações para o professor	De 1 a 96 paginas		
Distribuição do conteúdo no livro	Em 14 Capítulos		
Capítulo dedicado à divisibilidade	Capítulo 5 – Múltiplo e divisores	(100 – 123) 24 páginas 6,5%	
Capítulo anterior ao de divisibilidade	Capítulo 4 – Potências e raízes	(84 – 99) 16 páginas	
Capítulo posterior ao de divisibilidade	Capítulo 6 – Frações	(124 – 159) 36 páginas	

Fonte: Souza e Pataro (2012). Elaborado pela autora.

¹²⁷ Joamir Roberto de Souza – Professor graduado em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). Especialista em Estatística pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). Professor de Matemática da rede pública de ensino (SOUZA E PATARO, 2012).

¹²⁸ Patrícia Rosana Moreno Pataro – Professora graduada em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). Especialista em Estatística pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). Professora de Matemática em escolas da rede particular de ensino (SOUZA E PATARO, 2012).

Este livro está organizado em 12 capítulos, que se iniciam com a apresentação de temas e com algumas questões referentes a um contexto determinado.

Nos capítulos, os conteúdos são organizados em itens e sua abordagem inclui exemplos dos conceitos estudados e propostas de atividades. No final de cada capítulo, são feitas revisões de conteúdos e apresentadas listas de questões do Enem. Ao final do livro encontram-se as seções: “*Acessando tecnologia*”, “*Ampliando seus conhecimentos*”, “*Respostas e Bibliografia*”.

Os conteúdos de divisibilidade estão contemplados no capítulo 5 e conforme o sumário, estão distribuídos em três itens: Múltiplos de um número natural; Divisores de um número natural; Números primos e números compostos.

A seguir, no Quadro 93, apresentamos os conteúdos de divisibilidade conforme estão postos no sumário e no interior do capítulo.

Quadro 93: LDM-21 – Conteúdos de Divisibilidade no sumário e no interior do capítulo do livro “Vontade de Saber Matemática” 6º ano” (2015) – PNLD-2017

Conteúdos de divisibilidade no sumário do livro de Joamir Souza e Patrícia Pataro (2015)	Conteúdos de divisibilidade no interior da Capítulo 5 – Múltiplos e Divisores
Capítulo 5 – Múltiplos e divisores (p. 104)	– Introdução com um texto sobre o Calendário gregoriano (p. 105)
Múltiplos de um número natural (p. 106)	• Múltiplo de um número natural (p. 106) – Apresenta definição de múltiplo e exemplos com a operação de multiplicação e de divisão (p. 106). • Mínimo múltiplo comum (mmc) (p. 106) – Apresenta a determinação do mmc pelas sequências dos múltiplos de 3 e 5. – Apresenta a definição de mmc (p. 107) • Atividades de 1 a 11 (Desafio) (p. 107).
Divisores de um número natural (p. 109)	• Divisores de um número natural (p. 109) – Apresenta uma situação-problema com o cálculo de divisores do número 8 e definição. • Atividades de 12 a 19 (Desafio 20) (pp. 110 – 111). • Crítérios de divisibilidade (p.112) – Apresenta definição de divisibilidade – Divisibilidade por 2 e por 3 (p.112) – Divisibilidade por 4, por 5 e por 6 (p. 113) – Divisibilidade por 10 (p. 114). • Máximo divisor comum (p.114) – Apresenta a determinação do mdc pelas sequências dos divisores dos números 18 e 24 (p. 114)

Quadro 93: Continuação

Conteúdos de divisibilidade no sumário do livro de Joamir Souza e Patrícia Pataro (2015)	Conteúdos de divisibilidade no interior da Capítulo 5 – Múltiplos e Divisores
	– Apresenta definição de mdc. – Apresenta uma situação-problema como exemplo de aplicação do mdc para a resolução (p. 114) – Atividades, cálculo mental e desafios, de 21 a 27 (Desafio) (p. 115).
Números primos e números compostos (p. 116)	– Inicia o assunto apresentando os divisores dos números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12 (p. 116). – Apresenta a definição dos números primos e dos números compostos (p. 116). • Crivo de Eratóstenes – apresenta um pequeno texto de introdução ao método do Crivo de Eratóstenes para identificação dos números primos de 1 a 70 números (p. 116). • Decomposição em fatores primos (p. 117) – Apresenta três formas de decomposição pela multiplicação (p. 117).
Números primos e números compostos (p. 116) (Continuação)	– Apresenta a definição de fatoração e de fatoração completa (TFA) (p. 117); – Apresenta a decomposição em fatores primos pela divisão sucessiva (p. 118). • Cálculo do mmc pela DFP (p. 118) – Apresenta a determinação do mmc pela decomposição em fatores primos pela divisão sucessiva e simultânea (p. 118); – Atividades, cálculo mental e desafios, de 29 a 44 (pp. 118–119). Nº 45: “Contexto” texto sobre o Sistema Solar (p. 120).
Números primos e números compostos (p. 116)	• Cálculo do mdc pela decomposição em fatores primos (p. 121) – Apresenta a determinação do mdc pela decomposição em fatores primos pela divisão sucessiva e separada (fatoração completa) (p. 121); – Apresenta a determinação do mdc pela decomposição em fatores primos pela divisão sucessiva e simultânea (p. 121); – Apresenta definição e identificação dos números primos entre si (p. 117) – Atividades, cálculo mental e desafios, de 46 a 54 (p. 121).
Refletindo sobre o capítulo (p. 123)	• Refletindo sobre o capítulo – Apresenta de 1 a 9 questões discursivas (p. 123) – Revisão de 55 a 65 (p. 124 – 125); - ENEM E OBMEP de 66 a 70 (p. 125)

Fonte: Souza e Pataro (2015). Elaborado pela autora.

Conforme podemos observar no Quadro 93, acima, os conteúdos de divisibilidade são introduzidos a partir de textos explicativos, situações-problema e exemplos. Os autores apresentam em cada final de conteúdo de divisibilidade os exercícios denominados: “Atividades, Cálculo mental e desafios” e, no final do capítulo 5 “Múltiplos e divisores”, apresentam as seções: tais como: “Refletindo sobre o capítulo”; Revisão e ENEM e OBMEP”.

Os conteúdos de divisibilidade são apresentados na seguinte ordem: 1º). Múltiplos de um número natural; 2º). Mínimo múltiplo comum; 3º). Divisores de um número natural 4º). Critérios de divisibilidade; 5º). Máximo divisor comum; 6º). Números primos; 7º). Fatoração – Decomposição em fatores primos e em seguida os cálculos de determinação do máximo divisor comum e do mínimo múltiplo comum.

Dando continuidade à análise apresentamos a Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro (Quadro 94) e, por fim, a Tabela 51 com o resultado final da análise e a qualificação do livro de acordo com os indicadores.

Quadro 94: LDM-21 – Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade do livro de Joamir Souza e Patrícia Pataro (2015) – PNLD-2017

Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade LDM-21 de Joamir Souza e Patrícia Pataro (2015) – PNLD-2017				
	CONTEÚDOS DE DIVISIBILIDADE	(P)	(A)	T.CD
1	Múltiplos	---	---	---
1.1	Definição de múltiplos de um número	P	--	
1.2	Ideia de “múltiplo de”	P	--	
1.3	Cálculos dos múltiplos (pela multiplicação)	P	--	
1.4	Sequência dos múltiplos de um número	P	--	
	TOTAL CS-1	04	00	04
2	Divisores	---	---	---
2.1	Definição de divisor de um número	P	--	
2.2	Ideia de “divisível por”	P	--	
2.3	Determinação dos divisores pela sequência (divisão ou multiplicação)	P	--	
2.4	Determinação de todos divisores pela DFP (Fatoração completa)	--	A	
2.5	Determinação de todos divisores pela DFP (Algoritmo de Euclides)	--	A	
2.6	Cálculo do Número (quantidade) de divisores	--	A	
	TOTAL CS-2	03	03	06
3	Critério de divisibilidade	---	---	---
3.1	Definição	P	--	
3.2	Divisibilidade por 2	P	--	
3.3	Divisibilidade por 3	P	--	
3.4	Divisibilidade por 4	P	--	
3.5	Divisibilidade por 5	P	--	

Quadro 94: Continuação

Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade LDM-21 de Joamir Souza e Patrícia Pataro (2015) – PNLD-2017				
	CONTEÚDOS DE DIVISIBILIDADE	(P)	(A)	T.CD
3.6	Divisibilidade por 6	P	--	
3.7	Divisibilidade por 7	--	A	
3.8	Divisibilidade por 9	P	--	
3.9	Divisibilidade por 10	P	--	
3.10	Divisibilidade por 11	--	A	
	TOTAL CS-3	08	02	10
4	Números primos	---	---	---
4.1	Definição de Números primos	P	--	
4.2	Definição de Número composto	P	--	
4.3	Identificação de números primos pelo Crivo de Eratóstenes.	P	--	
4.4	Reconhecimento de um número primo pela divisão por primos	--	A	
	TOTAL CS-4	03	01	04
5	Fatoração completa – Decomposição em Fatores Primos (DFP)	---	---	---
5.1	Definição de fatoração	--	A	
5.2	Definição de fatoração completa (TFA)	P	--	
5.3	Cálculo dos fatores primos pela multiplicação	P	--	
5.4	Decomposição em fatores primos por divisão sucessiva	P	--	
5.5	Aplicação de fatoração no cálculo de raiz quadrada	--	A	
	TOTAL CS-5	03	02	05
6	Máximo Divisor Comum (MDC)	---	---	---
6.1	Definição de Máximo divisor comum	P	--	
6.2	Determinação do mdc pela sequência de divisores	P	--	
6.3	Determinação do mdc pela fatoração completa	P	--	
6.4	Determinação do mdc pela DFP, divisão sucessiva e simultânea	P	--	
6.5	Determinação do mdc pelo processo prático de Euclides	--	A	
6.6	Identificação de primos entre si	P	--	
	TOTAL CS-6	05	01	06
7	Mínimo múltiplo comum (MMC)	---	---	---
7.1	Definição de mmc	P	--	
7.2	Determinação do mmc pela sequência dos múltiplos	P	--	
7.3	Determinação do mmc pela DFP em separado ou fatoração completa	--	A	
7.4	Determinação do mmc pela DFP divisão sucessiva e simultânea	P	--	
7.5	Determinação do mmc pela relação com o mdc	--	A	
	TOTAL CS-7	03	02	05
	TOTAL GERAL	29	11	40

Fonte: Souza e Pataro (2015). Elaborada pela autora.

A seguir apresentamos a Tabela 51, com os dados do resultado da análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade e a qualificação segundo os indicadores.

Tabela 51: LDM-21 – Resultado final quantitativo e qualitativo da presença-ausência dos conteúdos de divisibilidade do livro de Souza e Pataro (2015)

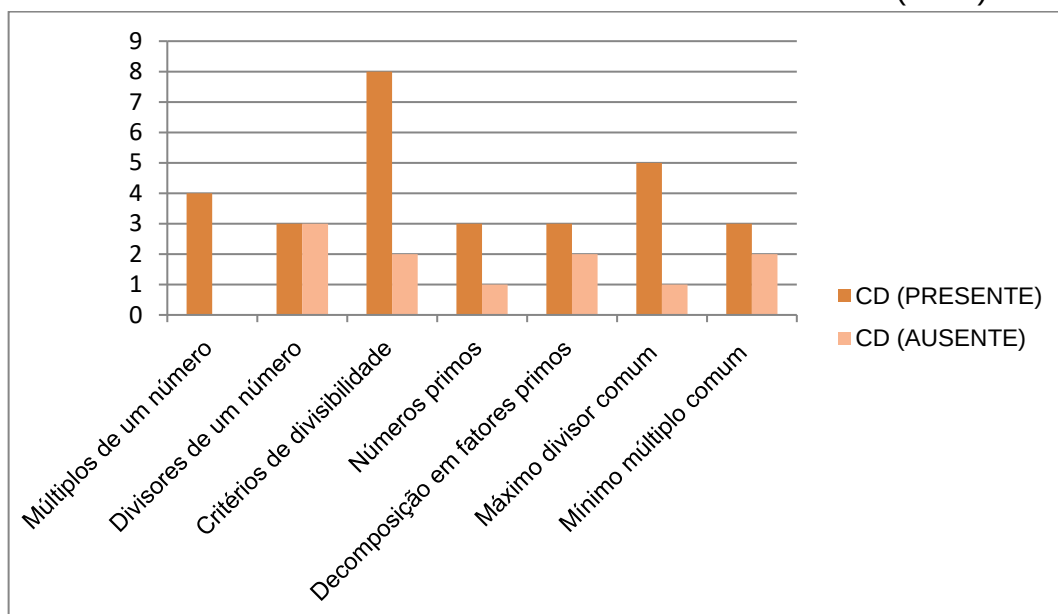
Resultado final quantitativo e qualitativo da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade – LDM-21 de Joamir Souza e Patrícia Pataro (2015)					
Conteúdos Principais			Conteúdos Secundários		Total
CP	CP _P	CP _A	CS _P	CS _A	CD _P
CP1	01	-	04	00	04
CP2	01	-	03	03	06
CP3	01	-	08	02	10
CP4	01	-	03	01	04
CP5	01	-	03	02	05
CP6	01	-	05	01	06
CP7	01	-	03	02	05
Total	07	00	29	11	40
Conceito: Regular (ausência moderadamente expressiva dos conteúdos de divisibilidade)					
Legenda: CD _P (Conteúdos de divisibilidade presentes); CP _P (Conteúdos principais presentes); CP _A (Conteúdos principais ausentes); CS _P (Conteúdos secundários presentes); CS _A (Conteúdos secundários ausentes).					

Conforme podemos observar na Ficha de Análise (Quadro 94) e na Tabela 51, os conteúdos principais de divisibilidade estão todos contemplados, mas observamos a ausência dos seguintes conteúdos secundários:

CP-2 Divisores: não apresenta o método de determinação dos divisores pela fatoração completa e nem pelo processo prático de Euclides. também não apresenta o cálculo de números de divisores; **CP-3 Critérios de divisibilidade:** não apresenta os critérios de divisibilidade por 7 e nem por 11; **CP-4 Números primos:** não apresenta o reconhecimento de um número primo pela divisão por primos; **CP-5 Fatoração completa** (decomposição em fatores primos): não apresenta a aplicação da fatoração no cálculo da raiz quadrada; **CP-6 Máximo divisor comum:** não apresenta a determinação do mdc pela divisão sucessiva do processo prático de Euclides; **CP-7 Mínimo múltiplo comum:** não apresenta a determinação do mmc pela decomposição em fatores primos em separado (Fatoração completa) e nem pela relação com o mdc de dois ou mais números.

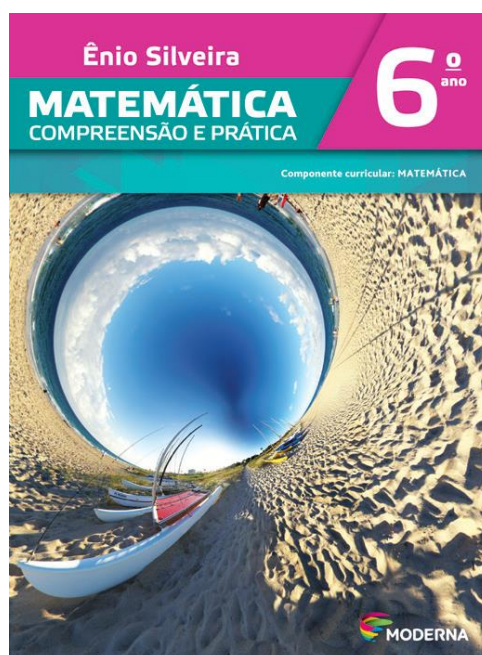
Conforme podemos observar nos resultados finais, constatamos 27,5% de conteúdos ausentes e, desse modo, pelos indicadores é classificado com o conceito “Regular” por apresentar ausência moderadamente expressiva dos conteúdos de divisibilidade.

GRÁFICO 9 - LDM-21: Resultado Final da análise da presença/ausência dos Conteúdos de Divisibilidade do Livro de Souza e Pataro (2015)



6.4.3 LDM-22 –Análise do livro de “Matemática: compreensão e prática” de Ênio Silveira (2015)

Imagem 23: Capa do LDM-22 de Ênio Silveira (2015)



Fonte: Guia do livro didático de matemática do PNLD-2017 (MEC, 2016, p. 78)

A seguir expomos a apresentação do livro pelo autor aos alunos.

APRESENTAÇÃO

Caro aluno,

Ideias, por mais brilhantes e elaboradas que sejam, só adquirem um sentido maior quando encontram aplicação no dia a dia.

A Matemática jamais deve ser vista como problema, mas sim como solução. Ela nos conduz por caminhos aparentemente tortuosos ou inacessíveis, abrindo atalhos, encurtando distâncias e superando obstáculos cotidianos ou científicos.

Com as situações apresentadas neste livro, você adquirirá conhecimentos que ajudarão no desenvolvimento da sua formação escolar, pessoal e profissional. Em cada página estudada, tarefa resolvida ou atividade solucionada, você perceberá que a Matemática é uma ferramenta poderosa que pode te ajudar a resolver muitos problemas.

O autor

Este livro está organizado em 12 capítulos, todos iniciados por duas páginas de abertura compostas de imagens e textos explicativos “*é hora de observar e discutir*”. No desenvolvimento dos conceitos e procedimentos, apresenta as seguintes seções: “*Trocando ideias*”; “*Um pouco de história*”; “*Lendo e aprendendo*” e “*Atividades*” – seção dividida em duas partes: “*Revisitando*”, com atividades de revisão e autoavaliação e “*Aplicando*”, em que se explora o conteúdo por meio de atividades com diferentes níveis de dificuldade, incluindo “*Desafios*” e questões do Enem.

Apresentamos a seguir o Quadro 95, com os dados gerais do livro a ser analisado e, logo após o Quadro 96, com os conteúdos de divisibilidade no sumário e no interior do capítulo.

Quadro 95: LDM- 22 – Dados gerais do livro de Ênio Silveira (2015)

LDM- 22	De 2015 – PNLD-2017		
Título	MATEMÁTICA COMPREENSÃO E PRÁTICA 6º		
Autor	ÊNIO SILVEIRA ¹²⁹		
Editora	Moderna	3ª edição, São Paulo	2015
Quantidade de páginas do livro	296	Dimensões da página 20,50 por 27,50	
Manual do professor	297 – 352		
Distribuição do conteúdo do livro:	Em 12 capítulos.		
Capítulo dedicado a divisibilidade	Capítulo 5: Múltiplos e divisores	98 – 123 26 páginas (8,8%)	
Capítulo que antecede divisibilidade	Capítulo 4: Figuras geométricas espaciais	80 – 97 17 páginas	
Capítulo posterior ao de divisibilidade	Capítulo 6: Frações	124 – 160 37 páginas	

Fonte: Silveira (2015). Elaborado pela autora

¹²⁹ Ênio Silveira – Engenheiro mecânico pela Universidade Federal do Ceará. Engenheiro eletricitista pela Universidade de Fortaleza. Diretor de escola particular. Autor de obras didáticas de Matemática (SILVEIRA, 2015).

Quadro 96: LDM-22 – Conteúdos de divisibilidade no sumário e no interior do capítulo do livro “Matemática: compreensão e prática” 6º ano (2015) – PNLD-2017

Conteúdos de divisibilidade no sumário do livro de Ênio Silveira (2015). Capítulo 5:	Conteúdos de divisibilidade interior do Capítulo 5: Múltiplos e divisores
1. Múltiplos de um número natural (p. 98)	– Abre o capítulo com imagens de um laboratório em duas páginas e o texto “É hora de observar e discutir” (pp. 98-99). – Apresenta “Trocando ideias” – com definição de múltiplo e divisor do dicionário (p. 100) 1. Múltiplos de um número natural – Apresenta uma tabela com a operação de multiplicação e a sequência dos múltiplos de 7, 9 e 23. Dá ênfase a “padrão” (p. 101). – Apresenta definição de múltiplo (P. 101) • Atividades com questões de 1 a 6 (p. 102).
2. Divisores de um número natural (p. 103)	2. Divisores de um número natural – introduz o assunto com uma situação-problema, e os divisores de 6 pela operação de divisão (p. 103). • “Lendo e aprendendo” – apresenta os números perfeitos (p. 104). • Atividades com questões de 1 a 9 (p. 105).
3. Critérios de divisibilidade (p. 106)	3. Critérios de divisibilidade – apresenta definição (p. 106) • Divisibilidade por 2 e por 3 (p. 106) • Divisibilidade por 4 (p. 107); • “Lendo e aprendendo” – apresenta texto sobre anos bissextos (p. 108). • Divisibilidade por 5 e por 6 (p. 108); • Divisibilidade por 9 e 10 (p. 109); • Atividades com questões de 1 a 14 (p. 110).
4. Número 1, Números primos, números compostos (p. 111)	4. Número 1, números primos e números compostos – apresenta os divisores dos números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 e a definição de números primos e também de números compostos (p. 111) – “Observações” (p. 112): <i>a palavra primo significa “primeiro”. Os números primos são “os primeiros”, pois outros números podem ser escritos a partir deles por meio de multiplicações.</i> • “Um pouco de história” – Números primos e compostos, com fotografias de Euclides e de Eratóstenes (p. 112). • Reconhecimento de um número primo – pela divisão por primos e pelo Crivo de Eratóstenes no intervalo de 1 a 50 (p. 113). • “Um pouco de história” – Eratóstenes (p. 114). • Atividades com questões de 1 a 6 (p. 114).
5. Decomposição em fatores primos (p. 115)	5. Decomposição em fatores primos – apresenta definição de fatoração e o cálculo por meio de multiplicação, bem como pela divisão sucessiva com traço vertical e a fatoração completa (p. 115) • Atividades com questões de 1 a 4 (p. 116).

Quadro 96: continuação

Conteúdos de divisibilidade no sumário do livro de Ênio Silveira (2015). Capítulo 5.	Conteúdos de divisibilidade interior do Capítulo 5: Múltiplos e divisores
6. Máximo divisor comum (mdc) (p. 116)	6. Máximo divisor comum (mdc) – apresenta uma situação-problema e a determinação do mdc pela DFP divisão sucessiva em separado e a fatoração completa (p. 117) • Atividades com questões de 1 a 9 (p. 118).
7. Mínimo múltiplo comum (mmc) (p. 119)	7. Mínimo múltiplo comum (mmc) apresenta uma situação-problema e a determinação do mmc pela DFP divisão sucessiva em separado e pela DFP divisão sucessiva e simultânea (pp. 119-120). • Atividades com questões de 1 a 10 (p. 121).
Trabalhando os conhecimentos adquiridos, 122	• Trabalhando os conhecimentos adquiridos – atividades com questões de 1 a 15 e Desafio (pp. 122-123).

Fonte: Silveira (2015). Elaborado pela autora.

Como podemos observar no Quadro 96, acima, os conteúdos de divisibilidade são apresentados na seguinte ordem: 1º). Múltiplos; 2º). Divisores; 3º). Critérios de divisibilidade; 4º). Números primos; 5º). Fatoração – Decomposição em fatores primos; 6º). Máximo divisor comum; 7º). Mínimo múltiplo comum. Este livro, apresenta a mesma ordem sugerida pela autora, como referência de organização dos conteúdos de divisibilidade.

Apresentamos a seguir, a Ficha de análise com os dados da presença e ausência dos conteúdos de divisibilidade do livro analisado (Quadro 97).

Quadro 97: LDM-22 – Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade do livro de Ênio Silveira (2015) – PNLD-2017

Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade LDM-22 de Ênio Silveira (2015) – PNLD-2017				
	CONTEÚDOS DE DIVISIBILIDADE	(P)	(A)	T.CD
1	Múltiplos	---	---	---
1.1	Definição de múltiplos de um número	P	--	
1.2	Ideia de “múltiplo de”	P	--	
1.3	Cálculos dos múltiplos (pela multiplicação)	P	--	
1.4	Sequência dos múltiplos de um número	P	--	
	TOTAL CS-1	04	00	04
2	Divisores	---	---	---
2.1	Definição de divisor de um número	P	--	
2.2	Ideia de “divisível por”	P	--	
2.3	Determinação dos divisores pela sequência (divisão ou multiplicação)	P	--	
2.4	Determinação de todos divisores pela DFP (Fatoração completa)	--	A	
2.5	Determinação de todos divisores pela DFP (Algoritmo de Euclides)	--	A	
2.6	Cálculo do Número (quantidade) de divisores	--	A	
	TOTAL CS-2	03	03	06

Quadro 97: Continuação

Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade LDM-22 de Ênio Silveira (2015) – PNLD-2017				
	CONTEÚDOS DE DIVISIBILIDADE	(P)	(A)	T.CD
3	Critério de divisibilidade	---	---	---
3.1	Definição	P	--	
3.2	Divisibilidade por 2	P	--	
3.3	Divisibilidade por 3	P	--	
3.4	Divisibilidade por 4	P	--	
3.5	Divisibilidade por 5	P	--	
3.6	Divisibilidade por 6	P	--	
3.7	Divisibilidade por 7	--	A	
3.8	Divisibilidade por 9	P	--	
3.9	Divisibilidade por 10	P	--	
3.10	Divisibilidade por 11	--	A	
	TOTAL CS-3	08	02	10
4	Números primos	---	---	---
4.1	Definição de Números primos	P	--	
4.2	Definição de Número composto	P	--	
4.3	Identificação de números primos pelo Crivo de Eratóstenes.	P	--	
4.4	Reconhecimento de um número primo pela divisão por primos	P	--	
	TOTAL CS-4	04	00	04
5	Fatoração completa – Decomposição em Fatores Primos (DFP)	---	---	---
5.1	Definição de fatoração	P	--	
5.2	Definição de fatoração completa (TFA)	--	A	
5.3	Cálculo dos fatores primos pela multiplicação	P	--	
5.4	Decomposição em fatores primos por divisão sucessiva	P	--	
5.5	Aplicação de fatoração no cálculo de raiz quadrada	--	A	
	TOTAL CS-5	03	02	05
6	Máximo Divisor Comum (MDC)	---	---	---
6.1	Definição de Máximo divisor comum	--	A	
6.2	Determinação do mdc pela sequência de divisores	P	--	
6.3	Determinação do mdc pela fatoração completa	P	--	
6.4	Determinação do mdc pela DFP, divisão sucessiva e simultânea	--	A	
6.5	Determinação do mdc pelo processo prático de Euclides	--	A	
6.6	Identificação de primos entre si	--	A	
	TOTAL CS-6	02	04	06
7	Mínimo múltiplo comum (MMC)	---	---	---
7.1	Definição de mmc	--	A	
7.2	Determinação do mmc pela sequência dos múltiplos	P	--	
7.3	Determinação do mmc pela DFP em separado ou fatoração completa	P	--	
7.4	Determinação do mmc pela DFP divisão sucessiva e simultânea	P	--	
7.5	Determinação do mmc pela relação com o mdc	--	A	
	TOTAL CS-7	03	02	05
	TOTAL GERAL	27	13	40

Fonte: Silveira (2015). Elaborada pela autora.

Apresentamos a seguir a Tabela 52 com os dados quantitativo e qualitativo do resultado final da análise da presença/ausência do livro analisado.

Tabela 52: LDM-22 – Resultado final quantitativo e qualitativo da presença-ausência dos conteúdos de divisibilidade do livro de Ênio Silveira (2015) – PNLD-2017

Resultado final quantitativo e qualitativo da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade – LDM-22 de Ênio Silveira (2015)					
Conteúdos Principais			Conteúdos Secundários		Total
CP	CP _P	CP _A	CS _P	CS _A	CD _P
CP1	01	-	04	00	04
CP2	01	-	03	03	06
CP3	01	-	08	02	10
CP4	01	-	04	00	04
CP5	01	-	03	02	05
CP6	01	-	02	04	06
CP7	01	-	03	02	05
Total	07	00	27	13	40
Conceito: Regular (ausência moderadamente expressiva dos conteúdos de divisibilidade)					
Legenda: CD _P (Conteúdos de divisibilidade presentes); CP _P (Conteúdos principais presentes); CP _A (Conteúdos principais ausentes); CS _P (Conteúdos secundários presentes); CS _A (Conteúdos secundários ausentes).					

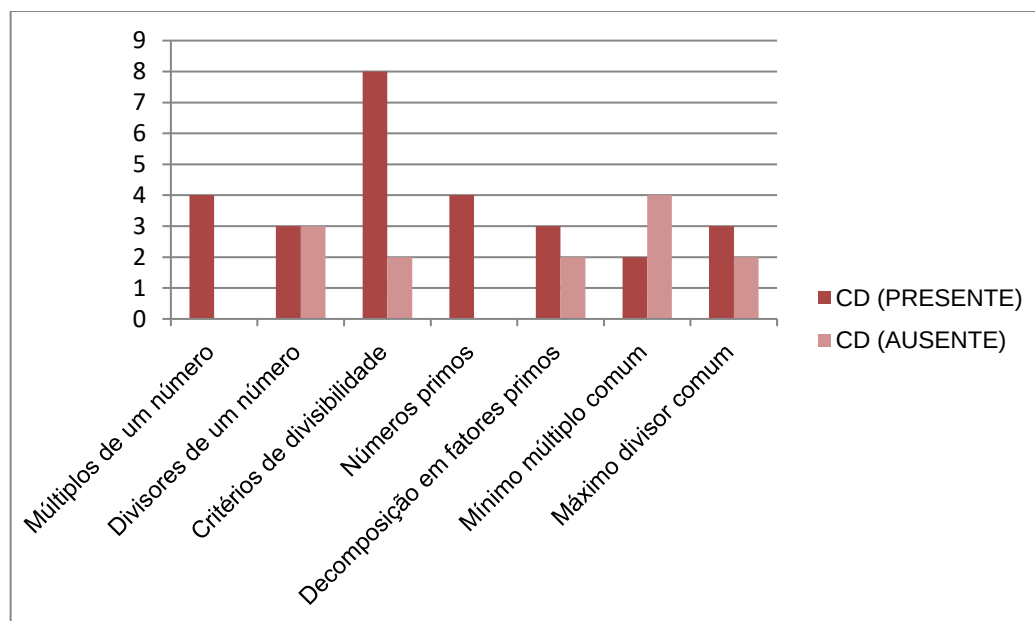
Conforme podemos observar na Ficha de análise e na Tabela 52, todos os conteúdos principais de divisibilidade estão contemplados no livro analisado, entretanto, constatamos a ausência dos seguintes conteúdos secundários:

CP-2 Divisores: Não apresenta a determinação de todos os divisores pela DFP (Fatoração completa) e nem pelo algoritmo de Euclides; também não apresenta o cálculo do número (quantidade) de divisores; **CP-3 Critérios de divisibilidade:** Não apresenta os critérios de divisibilidade por 7 e nem por 11; **CP-5 Fatoração – decomposição em fatores primos:** Não apresenta a definição da fatoração completa (TFA); e nem a aplicação da fatoração no cálculo da raiz quadrada; **CP-6 Máximo divisor comum:** Não apresenta a definição de mdc; não apresenta a determinação do mdc pela decomposição em fatores primos, divisão sucessiva e simultânea e nem pelo processo prático de Euclides; não apresenta a definição e o mdc de números primos entre si; **CP-7 Mínimo múltiplo comum:** Não apresenta a definição de mmc; não apresenta a determinação do mmc pela relação com o mdc.

Conforme análise, contamos 32,5% de conteúdos ausentes e, de acordo com os indicadores é classificado com o conceito “Regular” por apresentar ausência moderadamente expressiva dos conteúdos de divisibilidade.

Apresentamos o Gráfico 10, com uma visão geral da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro “Matemática: compreensão e prática” do 6º ano.

Gráfico 10: LDM-22 – Presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade do livro de Ênio Silveira (2015)



6.4.4 LDM-23 – Análise do Livro “Projeto Teláris – Matemática” – 6º ano de Luiz Roberto Dante (2016)

Imagem 24: Capa do LDM-23 de Luiz Roberto Dante (2016).



Fonte: Guia do livro didático de matemática do PNLD-2017 (MEC, 2016, p. 85)

A seguir, expomos a apresentação do livro pelo autor aos alunos.

Apresentação

Caro(a) aluno(a)

Bem-vindo(a) a esta nova etapa de estudos e aprendizagens.

Como você sabe, a Matemática é uma parte importante de sua vida. Ela está presente em todos os lugares e em todas as situações de seu cotidiano na escola, no lazer, nas brincadeiras, em casa.

Escrevi este livro para você compreender as ideias matemáticas e aplicá-las em seu dia a dia. Estou certo de que fará isso de maneira prazerosa, agradável, participativa e sem aborrecimentos. Sabe por que? Porque ao longo deste livro você será convidado(a) a pensar, a resolver problemas e desafios, a trocar ideias com os colegas, a observar ao seu redor, a ler a evolução histórica da Matemática, a trabalhar em equipe, a conhecer curiosidades, a brincar, a pesquisar, a argumentar, a redigir e a divertir-se.

Gostaria muito de que aceitasse este convite com entusiasmo e dedicação, participando ativamente de todas as atividades propostas.

Vamos começar?

Um abraço

O autor

Este livro, na primeira página, apresenta explicação sobre o nome do livro, a bibliografia do autor e o título do livro. Está organizado em 4 (quatro) Unidades e 9 (nove) Capítulos. Em duas páginas tem “Conheça seu livro de matemática” com esclarecimentos sobre as unidades, capítulos e seções. As unidades e os capítulos apresentam, na abertura, uma ou mais imagens e um pequeno texto de introdução. Os capítulos do livro apresentam várias seções especiais, tais como: “*Exercícios e problemas*”; “*Desafios* (atividade instigantes)”; “*Bate-papo* (atividades orais)”; “*Você sabia?*” (Curiosidades sobre o assunto abordado); “*Explorar e descobrir*”; “*Curiosidade Matemática*”; “*Leitura e Raciocínio lógico*”.

Os conteúdos de divisibilidade estão contemplados na Unidade 2 – “Potenciação e divisibilidade” e no Capítulo 5: “*Divisores e múltiplo de números naturais*”. Este capítulo inicia com introdução e cada conteúdo de divisibilidade inicia com uma ou mais situações-problema e exemplos. No final de cada conteúdo de divisibilidade apresenta atividade em “exercícios e problemas” e “desafios”.

Apresentamos a seguir, o Quadro 98 com os dados gerais do livro e o Quadro 99, com os conteúdos de divisibilidade mencionados no sumários e como estão organizados e distribuídos no interior do capítulo.

Quadro 98: LDM-23 – Dados Gerais do Livro de Luiz Roberto Dante (2016)

LDM-23	2016 – PNLD-2017 (Triênio:2017-2018-2019)	
Título	PROJETO TELÁRIS¹³⁰: MATEMÁTICA 6º ano	
Autor	LUIZ ROBERTO DANTE¹³¹	
Ano da publicação	2016	2ª edição
Editora	Ática	São Paulo
Quantidade de páginas do livro	313	Dimensões do livro: 20,50 cm por 27,50 cm
Manual do professor	(313 a 424) 112 páginas	
Distribuição dos conteúdos no livro	04 Unidade e 09 capítulos	
Unidade dedicada à divisibilidade	Unidade 2 – Capítulo 5: Divisores e múltiplos de números naturais.	(126 – 151) 26 páginas (8,3%)
Capítulo anterior ao de divisibilidade	Capítulo 4 – Potenciação, raiz quadrada e expressões numéricas.	(108 a 125) 18 páginas
Capítulo posterior ao de divisibilidade	Capítulo 6 – Frações e porcentagens	(156 – 176) 21 páginas

Fonte: Dante (2016). Elaborado pela autora.

Quadro 99: LDM-23 – Conteúdos de Divisibilidade Apresentados no Sumário e no Interior da Capítulo do Livro de Luiz Roberto Dante (2016)

Conteúdos de divisibilidade no sumário do livro de Luiz Roberto Dante (2016) Unidade 2: Potenciação e divisibilidade	Conteúdos de divisibilidade no interior do Capítulo 5 – Divisores e Múltiplos de números naturais
Capítulo 5 (pp. 126 – 148): Divisores e múltiplos de números naturais 1. Introdução (126)	1. Introdução – Introduz o assunto com duas situações-problema – “as ideias de múltiplo e de divisor podem ajudar a resolver situações do nosso cotidiano (p. 126).
2. Múltiplos de um número natural (p. 127)	2. Múltiplos de um número natural (p. 127) – Inicia com uma situação e usa a operação de multiplicação para encontrar a sequência dos múltiplos do número 3 e também de 4 (p. 127). Exercícios e problemas (questões de 01 a 08) – No item 5 – Generalizações , apresenta a generalização dos múltiplos com o exemplo de múltiplos de 5 por 5.n (p. 127). Desafio “Quadrado mágico” (p. 128).

¹³⁰ O nome do Projeto Teláris se inspira na forma latina *telarium*, que significa “tecelão”, para evocar o entrelaçamento dos saberes na construção do conhecimento (DANTE, 2016).

¹³¹ Luiz Roberto Dante – Livre-docente em Educação Matemática pela Unesp – Rio Claro, SP. Doutor em Psicologia da Educação: Ensino da Matemática pela PUC – São Paulo. Mestre em Matemática pela USP. Pesquisador em Ensino e Apresentação da Matemática pela Unesp – Rio Claro, SP. Ex-professor da rede estadual do Ensino Fundamental e Médio de São Paulo. Autor de vários livros, entre os quais: Formulação e resolução de problemas de Matemática: teoria e prática; Didática da Matemática na pré-escola; Projeto Ápis: Natureza e Sociedade, Linguagem e Matemática (Educação Infantil – 3 volumes); Projeto Ápis (1º ao 5º ano); Projeto Vaaz Matemática (Ensino Médio – volume único); Projeto Múltiplo – Matemática: (Ensino Médio – 3 volumes) (DANTE, 2016).

Quadro 99: Continuação

Conteúdos de divisibilidade no sumário do livro de Luiz Roberto Dante (2016) Unidade 2: Potenciação e divisibilidade	Conteúdos de divisibilidade no interior do Capítulo 5 – Divisores e Múltiplos de números naturais
3. Divisores de um número natural (p. 129 a 131)	3. Divisores de um número natural – Inicia com uma situação problema e usa a operação de divisão para encontrar os divisores de 12. Apresenta as sequências dos divisores de 12 e 18 (p. 129). Seção “Explorar e descobrir” – apresenta o “processo geométrico dos divisores” pelo uso de malha quadriculada (p. 130). Exercícios e problemas – Questões de 09 a 17 (p. 131).
4. Múltiplo e divisor de um número natural (p. 132) • Crítérios de divisibilidade (133 - 137) • Jogos (p. 138)	4. Múltiplo e divisor de um número natural – Pela operação de divisão apresenta a ideia de “divisível por”, “divisor de” e “múltiplo de” (p. 132). Exercícios e problemas (questões de 18 a 21) • Crítérios de divisibilidade (pp. 133 - 137) – Inicia o assunto com uma situação-problema; – Apresenta definição de critérios de divisibilidade (p. 133); • Divisibilidade por 2 Exercício nº 22 (12 questões) (p. 133); • Divisibilidade por 3. Exercício nº 23 (06 questões) (p. 134); • Divisibilidade por 4 “Leitura”: anos bissextos (questões de 1 a 3) (p. 135); • Divisibilidade por 5, por 6, e por 9 (p. 136), “Explorar e descobrir” (03 questões) • Divisibilidade por 10 (p. 137), “Explorar e descobrir” (03 questões) Exercícios (questões de 24 a 33). Seção jogos – Quanto resta? Apresenta um jogo envolvendo divisão e divisibilidade (p. 138).
5. Números primo (139 a 142) • Crivo de Eratóstenes (p. 140) • Decomposição de um número natural em fatores primos (141)	5. Números primo – inicia com “Explorar e descobrir” (03 questões) (p. 139) – Apresenta a definição de número primo (p. 139); apresenta os divisores dos números 21, 3, 24 e 7 (p. 139); Exercícios – questões de 34 a 38 (21 questões). Na questão 37 apresenta “Você sabia?” A Conjectura de <i>Christian Goldbach</i> (1690-1764) “<i>que todo número par maior do que 2 é igual à soma de dois números primos</i>” (p. 139); • Crivo de Eratóstenes – Apresenta fotografia de Eratóstenes e em “Explorar e descobrir” o processo de identificar os números primos de 2 a 20 pelo Crivo de Eratóstenes (p. 140). Exercícios – questões de 39 a 41 (p. 140). • Decomposição de um número natural em fatores primos – apresenta exemplos a partir da operação de multiplicação (p. 141); – Apresenta a definição de fatorar (p. 141).

Quadro 99: Continuação

Conteúdos de divisibilidade no sumário do livro de Luiz Roberto Dante (2016) Unidade 2: Potenciação e divisibilidade	Conteúdos de divisibilidade no interior do Capítulo 5 – Divisores e Múltiplos de números naturais
• Decomposição de um número natural em fatores primos (141) – Continuação.	• Processo das fatorações sucessivas – pela multiplicação (método da árvore) (p. 142); – Apresenta a definição de fatoração completa (TFA) (p. 142). – Processo das divisões sucessivas: Pela divisão sucessiva em fatores primos com o traço vertical (p. 136); Exercícios (questões de 42-43) (p. 142) – Apresenta em “Você sabia?” O significado da palavra primo (p. 142).
6. Máximo divisor comum (mdc) (p. 143)	Máximo divisor comum (mdc) – Introduz o assunto com uma situação problema, e na resolução apresenta a determina o mdc pelas sequências dos divisores (p. 143); – Apresenta a definição de mdc (p. 143); – Expõe a representação dos divisores comuns: “dc (12, 30)” e, pelo Diagrama de Venn (p. 143) Exercícios e problemas – Questões de 44-45 (p. 143); • Processo prático para determinar o mdc. – Apresenta a DFP pela divisão sucessiva e separada (fatoração completa) e também pela divisão sucessiva e simultânea (p. 144). Exercícios – questões de 46 a 48 (p. 144).
7. Mínimo múltiplo comum (mmc) (p. 145)	7. Mínimo múltiplo comum (mmc) – Inicia o assunto com uma situação problema e usa as sequências dos múltiplos de 4 e 6 para determinar o mmc, que é a resposta do problema (p. 145). – Apresenta definição de mmc (p. 145); Exercícios e problemas – Questões de 49 a 51 (p. 145); • Cálculo mental do mmc (p. 146) – “Jorge está calculando mentalmente o mmc de alguns números. Veja: o mmc(8, 10) – apresenta a regra “se a divisão de $10 : 8$ não é exata, tenta-se o dobro do maior pelo menor ($20 : 8$) e se não é exata, tenta-se o triplo: $30 : 8$ e ainda não é exata, tenta-se o quádruplo: $40 : 8$ é exata. Então, o mmc (8, 10) = 40. Você descobriu o que ele fez?” (p. 146). Exercícios e problemas – Questões de 52 a 54. “Desafio” (p. 146). • Processo prático para a determinação do mmc – pela DFP sucessiva e simultânea (147) Exercícios e problemas – Questões de 55 a 57 (p. 147).
8. Problemas envolvendo mdc e mmc (p. 148)	Exercícios e problemas – Questões de 58 a 63 (p. 148); Seção Raciocínio lógico (uma questão) (p. 148).

Quadro 99: Continuação

Conteúdos de divisibilidade no sumário do livro de Luiz Roberto Dante (2016) Unidade 2: Potenciação e divisibilidade	Conteúdos de divisibilidade no interior do Capítulo 5 – Divisores e Múltiplos de números naturais
Tratamento da informação (p. 145) Outros contextos (p. 146) Revisão cumulativa (p. 147)	Tratamento da informação: Interpretação de gráficos – questão, 64: um pouco da história do salário mínimo no Brasil – apresenta tabela e gráficos (p. 149). • Outros contextos – Questão 65: Incubação de aves apresenta quatro fotografias de Arara-azul, Coruja-buraqueira, Papagaio-verdadeiro e Pinguim imperador (p. 150). • Revisão cumulativa: questões de 1 a 12 de divisibilidade (p. 151).

Fonte: Dante (2016). Elaborado pela autora.

A apresentação dos conteúdos de divisibilidade nesta edição para a edição do PNLD-2014 apresenta pouquíssimas diferenças, praticamente quanto à apresentação dos conteúdos no interior dos capítulos, mas as situações problemas, os exercícios são praticamente os mesmos e a ordem dos conteúdos também.

Os conteúdos de divisibilidade neste livro são apresentados na seguinte ordem: 1º). Múltiplos; 2º). Divisores; 3º). Critérios de divisibilidade e Determinação dos divisores; 4º). Números primos; 5º). Fatoração – Decomposição em fatores primos; 6º). Máximo divisor comum; 7º). Múltiplos e Mínimo múltiplo comum.

Quadro 100: LDM-23 – Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade do livro de Luiz Roberto Dante (2016) – PNLD-2017

Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade LDM-23 de Luiz Roberto Dante (2015) – PNLD-2017				
	CONTEÚDOS DE DIVISIBILIDADE	(P)	(A)	T.CD
1	Múltiplos	---	---	---
1.1	Definição de múltiplos de um número	--	A	
1.2	Ideia de “múltiplo de”	P	--	
1.3	Cálculos dos múltiplos (pela multiplicação)	P	--	
1.4	Sequência dos múltiplos de um número	P	--	
	TOTAL CS-1	03	01	04
2	Divisores	---	---	---
2.1	Definição de divisor de um número	--	A	
2.2	Ideia de “divisível por”	P	--	
2.3	Determinação dos divisores pela sequência (divisão ou multiplicação)	P	--	
2.4	Determinação de todos divisores pela DFP (Fatoração completa)	--	A	
2.5	Determinação de todos divisores pela DFP (Algoritmo de Euclides)	--	A	
2.6	Cálculo do Número (quantidade) de divisores	--	A	
	TOTAL CS-2	02	04	06

Quadro 100: Continuação

Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade LDM-23 de Luiz Roberto Dante (2015) – PNLD-2017				
	CONTEÚDOS DE DIVISIBILIDADE	(P)	(A)	T.CD
3	Critério de divisibilidade	---	---	---
3.1	Definição	P	--	
3.2	Divisibilidade por 2	P	--	
3.3	Divisibilidade por 3	P	--	
3.4	Divisibilidade por 4	P	--	
3.5	Divisibilidade por 5	P	--	
3.6	Divisibilidade por 6	P	--	
3.7	Divisibilidade por 7	--	A	
3.8	Divisibilidade por 9	P	--	
3.9	Divisibilidade por 10	P	--	
3.10	Divisibilidade por 11	--	A	
	TOTAL CS-3	08	02	10
4	Números primos	---	---	---
4.1	Definição de Números primos	P	--	
4.2	Definição de Número composto	--	A	
4.3	Identificação de números primos pelo Crivo de Eratóstenes.	P	--	
4.4	Reconhecimento de um número primo pela divisão por primos	P	--	
	TOTAL CS-4	03	01	04
5	Fatoração completa – Decomposição em Fatores Primos (DFP)	---	---	---
5.1	Definição de fatoração	P	--	
5.2	Definição de fatoração completa (TFA)	P	--	
5.3	Cálculo dos fatores primos pela multiplicação	P	--	
5.4	Decomposição em fatores primos por divisão sucessiva	P	--	
5.5	Aplicação de fatoração no cálculo de raiz quadrada	--	A	
	TOTAL CS-5	04	01	05
6	Máximo Divisor Comum (MDC)	---	---	---
6.1	Definição de Máximo divisor comum	P	--	
6.2	Determinação do mdc pela sequência de divisores	P	--	
6.3	Determinação do mdc pela fatoração completa	P	--	
6.4	Determinação do mdc pela DFP, divisão sucessiva e simultânea	P	--	
6.5	Determinação do mdc pelo processo prático de Euclides	--	A	
6.6	Identificação de primos entre si	--	A	
	TOTAL CS-6	04	02	06
7	Mínimo múltiplo comum (MMC)	---	---	---
7.1	Definição de mmc	P	--	
7.2	Determinação do mmc pela sequência dos múltiplos	P	--	
7.3	Determinação do mmc pela DFP em separado ou fatoração completa	--	A	
7.4	Determinação do mmc pela DFP divisão sucessiva e simultânea	P	--	
7.5	Determinação do mmc pela relação com o mdc	--	A	
	TOTAL CS-7	03	02	05
	TOTAL GERAL	27	13	40

Fonte: Dante (2016). Elaborada pela autora.

Apresentamos a seguir a Tabela 53 com os dados quantitativo e qualitativo do resultado final da análise da presença/ausência do livro analisado.

Tabela 53:LDM-23 – Resultado final quantitativo e qualitativo da presença-ausência dos conteúdos de divisibilidade do livro de Luiz Roberto Dante (2016) – PNLD-2017

Resultado final quantitativo e qualitativo da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade – LDM-23 de Luiz Roberto Dante (2015)					
Conteúdos Principais			Conteúdos Secundários		Total
CP	CP _P	CP _A	CS _P	CS _A	CD _P
CP1	01	-	03	01	04
CP2	01	-	02	04	06
CP3	01	-	08	02	10
CP4	01	-	03	01	04
CP5	01	-	04	01	05
CP6	01	-	04	02	06
CP7	01	-	03	02	05
Total	07	00	27	13	40
Conceito: Regular (ausência moderadamente expressiva dos conteúdos de divisibilidade)					
Legenda: CD _P (Conteúdos de divisibilidade presentes); CP _P (Conteúdos principais presentes); CP _A (Conteúdos principais ausentes); CS _P (Conteúdos secundários presentes); CS _A (Conteúdos secundários ausentes).					

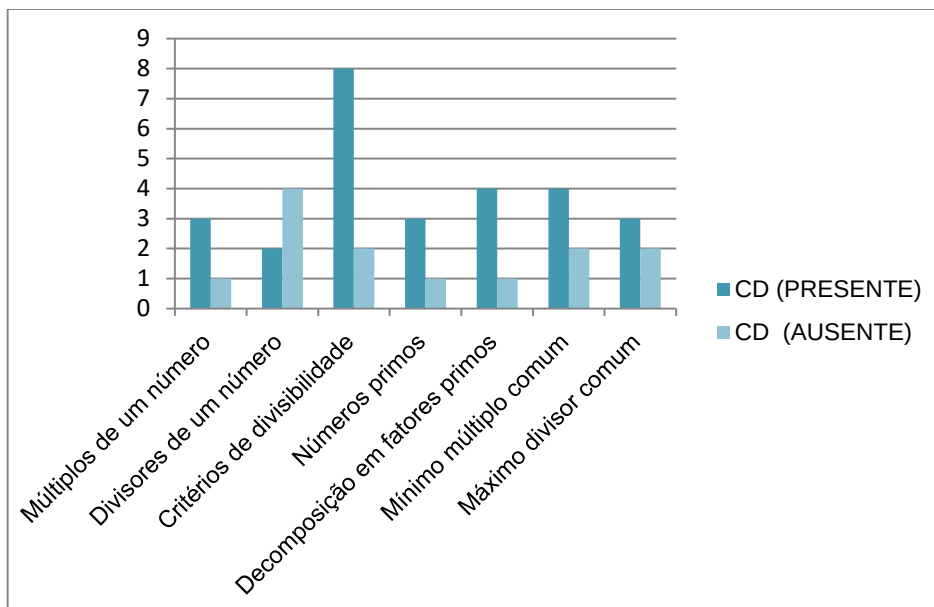
Conforme podemos observar na Ficha de análise (Quadro 100) e na Tabela 53, dos resultados finais, todos os conteúdos principais de divisibilidade estão contemplados no livro analisado, entretanto, constatamos a ausência dos seguintes conteúdos secundários:

CP-1 Múltiplo: não apresenta a definição; **CP-2 Divisores:** Não apresenta a definição; não apresenta a determinação de todos os divisores pela DFP (Fatoração completa) e nem pelo algoritmo de Euclides; também não apresenta o cálculo do número (quantidade) de divisores; **CP-3 Critérios de divisibilidade:** Não apresenta os critérios de divisibilidade por 7 e por 11; **CP-4 Números primos:** Não apresenta a definição de números compostos; **CP-6 Máximo divisor comum:** Não apresenta a determinação do mdc pelo processo prático de Euclides e nem a definição e o mdc de números primos entre si; **CP-7 Mínimo múltiplo comum:** Não apresenta a determinação do mmc pela fatoração completa (divisão sucessiva em separado) e nem pela relação com o mdc.

Conforme análise, contamos 32,5% de conteúdos ausentes e, de acordo com os indicadores é classificado com o conceito “Regular” por apresentar ausência moderadamente expressiva dos conteúdos de divisibilidade.

A seguir apresentamos o Gráfico 10, com o resultado final da quantidade de conteúdos de divisibilidade presentes e ausentes no livro analisado.

Gráfico 11: LDM-23 – Presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade do livro de Luiz Roberto Dante (2016)



6.4.5 LDM-24 – Análise do livro “Matemática Bianchini” 6º ano de Edwaldo Bianchini (2015)

Imagem 25: Capa do LDM-24 de Edwaldo Bianchini (2015)



Fonte: Guia do livro didático de matemática (PNLD, 2016, p. 107).

Este livro está dividido em 11 capítulos. Após a apresentação pelo autor aos alunos, vem a seção “Conheça seu livro”, em duas páginas, com ilustrações e orientações de como usar o livro. Em cada capítulo o assunto é introduzido por meio de vários recursos, tais como: situações-problema do dia a dia, imagens do cotidiano e textos com história da Matemática. Os capítulos estão divididos em itens, em que são abordados tópicos do conteúdo matemático. Em cada um deles, há uma explanação acompanhada de exemplos e da seção *Exercícios Propostos*.

Além disso, o livro apresenta várias seções especiais que permeiam o desenvolvimento dos conteúdos: “*Pense mais um pouco*”, com atividades e desafios; “*Para saber mais*”, que inclui atividades para articulação com outras áreas do saber; “*Agora é com você*”; “*Trabalhando a informação*”, que traz os conteúdos referentes ao campo de estatística e probabilidade. Cada capítulo termina com atividades intituladas “*Exercícios complementares*” e “*Diversificando*”. No final do livro do aluno encontram-se as seguintes seções: “Respostas” das atividades de todos os capítulos; “Lista de siglas”; “Sugestões de leitura para o aluno” e “Bibliografia”.

A seguir expomos a apresentação pelo autor aos alunos.

Apresentação

Caro estudante,
Este livro foi feito especialmente para você.
Ele foi pensado, escrito e organizado com o objetivo de facilitar sua aprendizagem e, também, ajudá-lo a ver como a Matemática está presente em tudo o que acontece à sua volta.
Aqui você vai encontrar exemplos de situações que permitem perceber que a Matemática faz parte do seu dia a dia.
Leia com atenção as explicações teóricas, para acompanhar as aulas e resolver os exercícios.
Faça deste livro um parceiro em sua vida escolar!

O autor

Os conteúdos de divisibilidade estão contemplados no Capítulo 4, intitulado “Divisibilidade” e, no final de cada assunto apresenta os “Exercícios propostos”.

Apresentamos a seguir o Quadro 101, com os dados gerais do livro, o Quadro 102, com os conteúdos de divisibilidade no sumário do livro e no interior do capítulo, a Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro (Quadro 103) e, por fim, a Tabela 54 com o resultado final da análise e a qualificação do livro.

Quadro 101: LDM-24 – Dados gerais do livro de Edwaldo Bianchini (2015)

LDM-24	2015 – PNLD-2017		
Titulo	MATEMÁTICA BIANCHINI 6ºano		
Autor	EDWALDO BIANCHINI ¹³²		
Editora	Moderna	8ª Edição	Ano: 2015
Quantidade de páginas do livro	344	Dimensões da página 20,50 cm por 27,50 cm	
Distribuição do conteúdo no livro	11 Capítulos		
Capítulo dedicado à divisibilidade	Capítulo 4 – Divisibilidade		(92 – 119) 28 Páginas (8,1%)
Capítulo que antecede ao de divisibilidade	Capítulo 3 – Estudando figuras geométricas		(76 – 91) 16 Páginas
Capítulo posterior ao de divisibilidade	Capítulo 5 – Retas e ângulos		(120 – 139) 20 Páginas

Fonte: Bianchini (2015). Elaborado pela autora.

Quadro 102: LDM-24 – Conteúdos de divisibilidade apresentados no sumário e no interior da capítulo do livro de Edwaldo Bianchini (2015)

Conteúdos de divisibilidade no sumário do livro de Edwaldo Bianchini (2015) Capítulo 4: Divisibilidade	Conteúdos de divisibilidade no interior do Capítulo 4 – Divisibilidade
1. Múltiplos e divisores, (p. 92)	– Inicia “ Múltiplos e divisores ” com uma situação-problema. Operação de multiplicação e divisão (p. 92); – Apresenta a definição de múltiplo e divisor (p. 93) – Exercícios propostos: questões de 1 a 4 (p. 93).
► Os múltiplos de um número (p. 94)	• Os múltiplos de um número – pela operação de multiplicação do número 7 e apresenta exemplos de sequências dos múltiplos de 8, 15 e 22 (p. 94). Exercício propostos: questões de 5 a 14 (pp. 94-95).
► Os divisores de um número (p. 96)	• Os divisores de um número – Inicia com dois exemplos usando a operação de divisão; apresenta a sequência de divisores de 12 (p. 96) – Exercício propostos: questões de 15 a 22 (p. 97). Seção “Pense mais um pouco” apresenta os números perfeitos (p. 98); Seção “Para saber mais” sobre sequência numérica, dos números pares, dos múltiplos e divisores (p. 98); Seção “Agora é com você” questões de 1-4 (p. 99).
2. Critérios de divisibilidade (p.100)	– Apresenta definição de critérios de divisibilidade e divisibilidade por 2, por 5 (p. 100); • Divisibilidade por 10 e Exercícios propostos: questões de 22 a 27 (p. 101)

¹³² Edwaldo Bianchini – Licenciado em Ciências pela Universidade da Associação de Ensino de Ribeirão Preto, com habilitação em Matemática pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras do Sagrado Coração de Jesus, Bauru (SP). Professor de Matemática da rede pública de ensino do estado de São Paulo, no ensino fundamental e médio, por 25 anos (BIANCHINI, 2011).

Quadro 102: Continuação

Conteúdos de divisibilidade no sumário do livro de Edwaldo Bianchini (2015) Capítulo 4: Divisibilidade	Conteúdos de divisibilidade no interior do Capítulo 4 – Divisibilidade
2. Critérios de divisibilidade (p.100) – Continuação	• Divisibilidade por 3 e por 6 (p. 102); Exercícios propostos: questões de 28 a 32 e, • Divisibilidade por 9 (p. 103); Exercícios propostos: questões de 33-34 e, • Divisibilidade por 4 (p. 104); Exercícios propostos: Questões de 35 a 38 e, Seção “Pense mais um pouco...” (p. 105).
3. Números primos (p. 106) ► Decomposição em fatores primos (p. 107)	3. Números primos (p. 106) – Definição de números primos e números composto; Exercícios propostos: Questões de 39 a 47 (pp. 106-107); Seção “Pense mais um pouco” (p. 107). • Decomposição em fatores primos – apresenta exemplos de fatoraçaõ pela multiplicação (método da árvore) (p. 107) – Definição de decomposição em fatores primos e de fatoraçaõ completa (TFA) (p. 108); – Decomposição em fatores primos pela divisãõ sucessiva com traço vertical (p. 108) Exercícios propostos: questões de 48 a 51 (p. 108).
4. O máximo divisor comum (mdc) (p.109)	4. O máximo divisor comum – Apresenta uma situação-problema com seqüências dos divisores e dos divisores comuns de 96, 108 e 132. Apresenta definição de mdc e exercícios propostos: questões de 52 a 55 (p. 109); • Encontrando o mdc pela decomposição em fatores primos (DFP) pela divisãõ sucessiva em separado (Fatoraçaõ completa) (p. 110). – Em Observação apresenta definição de números primos entre si (p. 110). Exercícios propostos: questões de 56 a 61 (p. 111).
7. O mínimo múltiplo comum (mmc) (p.112)	– Apresenta uma situação-problema com seqüências dos múltiplos e dos múltiplos comuns dos números 12 e 18 (p. 112); – Apresenta definição de mmc (p.112). Exercícios propostos: questões de 62 a 66 (pp. 112-113); • Encontrando o mmc pela decomposição em fatores primos (DFP) pela divisãõ sucessiva em separado (Fatoraçaõ completa) e pela DFP divisãõ sucessiva e simultânea (p. 113). Exercícios propostos: questões de 67 a 75 (pp. 114-115).
Trabalhando a informação – Construindo um gráfico de barras (p. 115) Diversificando (p. 119).	– Seção “Agora quem trabalha é você” (duas questões). Exercícios complementares de 1 a 22 (de divisibilidade) (pp. 117-118). – Diversificando – Jogo “Corrida dos números primos” (p. 119).

Fonte: Bianchini (2011). Elaborado pela autora.

Os conteúdos de divisibilidade são apresentados na seguinte ordem: 1º). Múltiplos; 2º). Divisores; 3º). Critérios de divisibilidade; 4º). Números primos; 5º). Fatoração – Decomposição em fatores primos; 6º). Máximo divisor comum; 7º). Múltiplos e Mínimo múltiplo comum.

Quadro 103: LDM-24 - Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro de Edwaldo Bianchini (2015) – PNLD-2017

Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade LDM-24 de Edwaldo Bianchini (2015) – PNLD-2017				
	CONTEÚDOS DE DIVISIBILIDADE	(P)	(A)	T.CD
1	Múltiplos	---	---	---
1.1	Definição de múltiplos de um número	P	--	
1.2	Ideia de “múltiplo de”	P	--	
1.3	Cálculos dos múltiplos (pela multiplicação)	P	--	
1.4	Sequência dos múltiplos de um número	P	--	
	TOTAL CS-1	04	00	04
2	Divisores	---	---	---
2.1	Definição de divisor de um número	P	--	
2.2	Ideia de “divisível por”	P	--	
2.3	Determinação dos divisores pela sequência (divisão ou multiplicação)	P	--	
2.4	Determinação de todos divisores pela DFP (Fatoração completa)	--	A	
2.5	Determinação de todos divisores pela DFP (Algoritmo de Euclides)	--	A	
2.6	Cálculo do Número (quantidade) de divisores	--	A	
	TOTAL CS-2	03	03	06
3	Critério de divisibilidade	---	---	---
3.1	Definição	P	--	
3.2	Divisibilidade por 2	P	--	
3.3	Divisibilidade por 3	P	--	
3.4	Divisibilidade por 4	P	--	
3.5	Divisibilidade por 5	P	--	
3.6	Divisibilidade por 6	P	--	
3.7	Divisibilidade por 7	--	A	
3.8	Divisibilidade por 9	P	--	
3.9	Divisibilidade por 10	P	--	
3.10	Divisibilidade por 11	--	A	
	TOTAL CS-3	08	02	10
4	Números primos	---	---	---
4.1	Definição de Números primos	P	--	
4.2	Definição de Número composto	P	--	
4.3	Identificação de números primos pelo Crivo de Eratóstenes.	--	A	
4.4	Reconhecimento de um número primo pela divisão por primos	--	A	
	TOTAL CS-4	02	02	04
5	Fatoração completa – Decomposição em Fatores Primos (DFP)	---	---	---
5.1	Definição de fatoração	P	--	
5.2	Definição de fatoração completa (TFA)	P	--	
5.3	Cálculo dos fatores primos pela multiplicação	P	--	
5.4	Decomposição em fatores primos por divisão sucessiva	P	--	
5.5	Aplicação de fatoração no cálculo de raiz quadrada	--	A	

Quadro 103: continuação

	TOTAL CS-5	04	01	05
6	Máximo Divisor Comum (MDC)	---	---	---
6.1	Definição de Máximo divisor comum	P	--	
6.2	Determinação do mdc pela sequência de divisores	P	--	
6.3	Determinação do mdc pela fatoração completa	P	--	
6.4	Determinação do mdc pela DFP, divisão sucessiva e simultânea	--	A	
6.5	Determinação do mdc pelo processo prático de Euclides	--	A	
6.6	Identificação de primos entre si	P	--	
	TOTAL CS-6	04	02	06
7	Mínimo múltiplo comum (MMC)	---	---	---
7.1	Definição de mmc	P	--	
7.2	Determinação do mmc pela sequência dos múltiplos	P	--	
7.3	Determinação do mmc pela DFP em separado ou fatoração completa	P	--	
7.4	Determinação do mmc pela DFP divisão sucessiva e simultânea	P	--	
7.5	Determinação do mmc pela relação com o mdc	--	A	
	TOTAL CS-7	04	01	05
	TOTAL GERAL	29	11	40

Fonte: Bianchini (2015). Elaborada pela autora.

Tabela 54: LDM-24 – Resultado final quantitativo e qualitativo da presença-ausência dos conteúdos de divisibilidade do livro de Edwaldo Bianchini (2015) – PNLD-2017

Resultado final quantitativo e qualitativo da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade –LDM-24 de Edwaldo Bianchini (2015)					
Conteúdos Principais			Conteúdos Secundários		Total
CP	CP _P	CP _A	CS _P	CS _A	CD _P
CP1	01	-	04	00	04
CP2	01	-	03	03	06
CP3	01	-	08	02	10
CP4	01	-	02	02	04
CP5	01	-	04	01	05
CP6	01	-	04	02	06
CP7	01	-	04	01	05
Total	07	00	29	11	40
Conceito: Regular (ausência moderadamente expressiva dos conteúdos de divisibilidade)					
Legenda: CD _P (Conteúdos de divisibilidade presentes); CP _P (Conteúdos principais presentes); CP _A (Conteúdos principais ausentes); CS _P (Conteúdos secundários presentes); CS _A (Conteúdos secundários ausentes).					

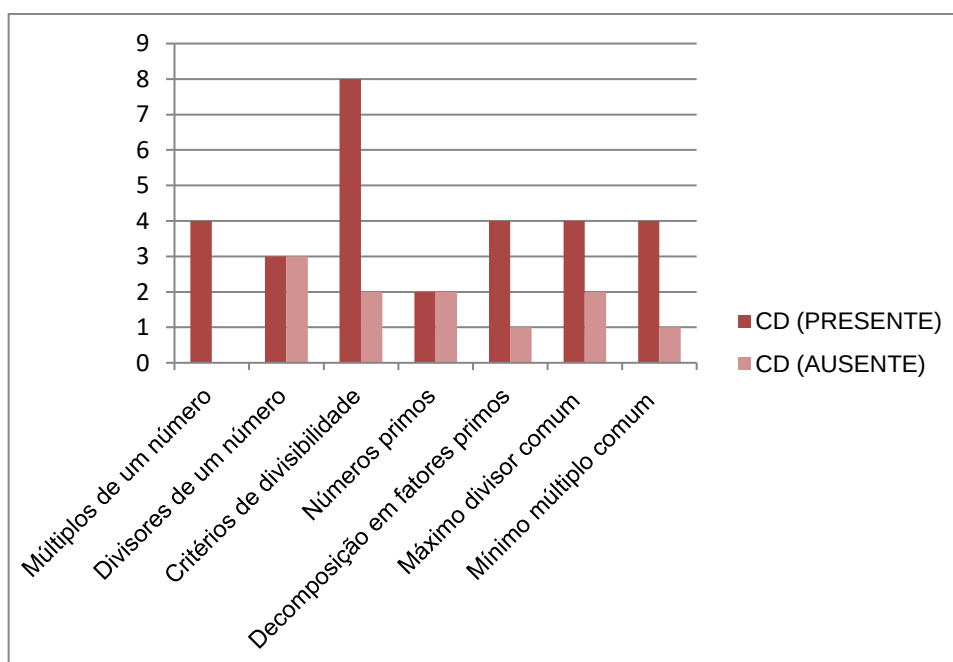
Conforme podemos observar na Ficha de análise (Quadro 103) e na Tabela 54, dos resultados finais, todos os conteúdos principais de divisibilidade estão contemplados no livro analisado, entretanto, constatamos a ausência dos seguintes conteúdos secundários:

CP-2 Divisores: Não apresenta o método de determinação dos divisores pela fatoração completa e nem pelo processo prático de Euclides; também não apresenta o cálculo de números de divisores; **CP-3 Critérios de divisibilidade:** Não apresenta os critérios de divisibilidade por 7 e por 11; **CP-4 Números primos:** Não apresenta a identificação dos números primos por nenhum processo (nem pela divisão por primos e nem pelo Crivo de Eratóstenes); **CP-5 Fatoração completa** (decomposição em fatores primos): Não apresenta a aplicação da fatoração no cálculo da raiz quadrada; **CP-6 Máximo divisor comum:** Não apresenta a determinação do mdc pela divisão sucessiva e simultânea e nem pelo processo prático de Euclides; **CP-7 Mínimo múltiplo comum:** Não apresenta a determinação do mmc pela relação com o mdc.

Conforme análise, contatamos 27,5% de conteúdos ausentes e, de acordo com os indicadores é classificado com o conceito “Regular” por apresentar ausência moderadamente expressiva dos conteúdos de divisibilidade.

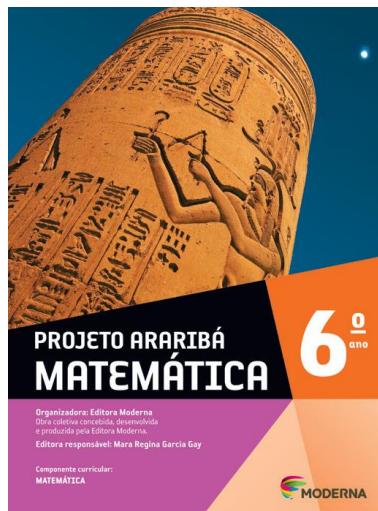
A seguir apresentamos o Gráfico 12 com o resultado final da análise mostrando a realidade da presença e ausências dos conteúdos de divisibilidade no livro analisado.

Gráfico 12: LDM-24 – Presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no Livro de Edwaldo Bianchini (2015)



6.4.6 LDM-25 –Projeto Araribá: Matemática 6º ano (2014)

Imagem 26: Capa do LDM-25 Projeto Araribá: Matemática 6º ano (2014)



Fonte: Guia do livro didático de matemática – PNLD-2017 (MEC, 2016, p. 92).

Expomos a seguir a apresentação do livro aos alunos.

APRESENTAÇÃO

Este livro foi elaborado para você.

Queremos que você estude Matemática de forma dinâmica e agradável. Nosso objetivo é ajudá-lo a descobrir que conhecer os números, as formas, as medidas e outros assuntos abordados pela Matemática. Pode ser uma aventura muito interessante, que contribuirá para que você amplie seus conhecimentos, sua visão de mundo e sua participação na sociedade.

Procure fazer todas as atividades e explorar tudo o que este livro tem a oferecer. Aproveite também a diversidade de informações distribuídas ao longo das seções.

Certamente, você encontrará desafios e obstáculos. Enfrente-os com garra, pois, ao superá-los, perceberá que o saber proporciona grande satisfação pessoal e oportunidades para ampliar sua atuação no mundo.

Bom estudo!

Este livro está configurado em 18 unidades que são distribuídas em 6 partes, conforme a seguir: Parte 1: Números naturais; Parte 2: Figuras geométrica e simetria; Parte 3: Múltiplos e divisores; Frações e porcentagem; Parte 4: Números decimais e operações; Parte 5: Ângulos, polígonos e círculos; Parte 6: Medidas e geometria.

O livro traz a apresentação aos alunos na segunda folha e logo em seguida, em duas páginas “Conheça o seu livro” apresenta orientações de como usá-lo e com ilustrações sobre as seções contidas no livro. O conteúdo é apresentado de forma

clara e organizada, com muitas ilustrações e várias seções, tais como: “Trabalhando a informação”; “Atividades integradas”; “Compreendendo o texto”; Educação financeira; “Resolver problemas”; “Trabalho em equipe”; “Para finalizar: organizar suas ideias” e “Para finalizar: para conhecer mais”. Além disso, o livro propõe atividades diversificadas, agrupadas em dois blocos: “Vamos fazer” e “Vamos aplicar”. Há ainda as atividades “Desafio”, “Calculadora” e “Cálculo mental”. O livro finaliza com “Anexos” que trazem planificações de figuras geométricas, “Respostas” às atividades e “Bibliografia”.

A seguir apresentamos o Quadro 104 com os dados gerais do livro que será analisado, o Quadro 105, com os conteúdos de divisibilidade no índice do livro e no interior do capítulo, a Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro (Quadro 106) e, por fim, a Tabela 55 com os dados do resultado final da análise e a qualificação do livro.

Quadro 104: LDM-25 – Dados gerais do livro de Projeto Araribá: Matemática (2014)

LDM-25	DE 2014 – PNLD-2017		
Titulo	PROJETO ARARIBÁ: MATEMÁTICA 6º ano		
Autor	EDITORA MODERNA (Org.) ¹³³ – Mara Regina Garcia Gay ¹³⁴ (Editora responsável)		
Editora	Moderna	4ª edição	2014
Quantidade de páginas do livro	351	Dimensões da página 20,50 por 27,50	
Manual do professor	151 páginas		
Distribuição do conteúdo no livro	São 6 (seis) partes e cada parte em unidades – são 18 unidades.		
Unidade dedicada à divisibilidade	Parte 3 – Múltiplos e divisores, Frações e porcentagem: Unidades 7: Divisibilidade; Unidade 8: Mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum		122 – 144 23 páginas 6,6%
Unidade anterior ao de divisibilidade	Unidades 6 – Simetria		88 – 119 32 páginas
Capitulo posterior ao de divisibilidade	Unidade 9 – Frações		145 – 177 33 páginas

Fonte: Projeto Araribá (2014). Elaborado pela autora.

Os conteúdos de divisibilidade estão contemplados na Parte 3, nas Unidades 7 (sete): Divisibilidade e 8 (oito): Mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum. A

¹³³ Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

¹³⁴ Mara Regina Garcia Gay – Bacharel e licenciada em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Professora de Matemática em escolas públicas e particulares de São Paulo por 17 anos. Editora (MODERNA, 2014).

Parte 3, inicia com uma fotografia que abrange duas páginas e um texto com informação sobre “O Bondinho do Pão de Açúcar” tendo por fundo a vista aérea da cidade do Rio de Janeiro com o bondinho entre o Morro da Urca e o Pão de Açúcar. Em seguida apresenta-se “Para começar...” com cinco questões.

Os conteúdos de divisibilidade iniciam com explicações, situações-problema seguidas de exemplos, regras e finalizam com questões nas seções “Vamos aplicar” e/ou “vamos fazer” e no final de cada unidade com “Atividades integradas”.

Quadro 105: LDM-25 – Conteúdos de divisibilidade apresentados no sumário e no interior das unidades do livro Projeto Araribá: Matemática 6º ano (2014)

Conteúdos de divisibilidade no sumário do LDM-25 Projeto Araribá: Matemática (2014) Unidade 7 e 8	Conteúdos de divisibilidade no interior do sumário do livro Projeto Araribá: Matemática (2014) – Unidade 7 e 8
Parte 3 – Múltiplos e divisores – Unidade 7: Divisibilidade (pp.122 – 133)	
1. Divisibilidade (p. 122)	– Introduz “Divisibilidade” com uma situação-problema, apresenta cálculos pela operação de divisão (p. 123) – Apresenta definição de “divisível por” e “múltiplo de” (p. 123). “Vamos fazer” (02 questões) (pp. 123-124).
2. Critérios de divisibilidade (p.124) • Critério de divisibilidade por 2 (p. 124) • Critério de divisibilidade por 3 (p. 124) • Critério de divisibilidade por 5 (p. 125) • Critério de divisibilidade por 10 (p. 125)	• Critério de divisibilidade por 2 e por 3, (p. 124) • Critério de divisibilidade por 5 e por 10 (p. 125) – “Vamos fazer” de 1 a 3 questões (pp. 126-127) – Apresenta em “Vamos fazer” os critérios de divisibilidade por 4 (p. 126); – Critérios de divisibilidade por 6 e por 9 (p. 127) – “Vamos aplicar”: questões de 1 a 6 (pp. 127-128).
3. Múltiplos de um número natural (p.128)	– Apresenta uma situação-problema, na resolução a sequência dos múltiplos do número 4, pela operação de multiplicação (p 128).
4. Divisores de um número natural (p. 129)	– Apresenta uma situação-problema, na resolução a sequência dos divisores do número 18 (p. 129). – “Vamos aplicar”: questões de 1 a 7 (p. 130).
Trabalhando com a informação – Contagem de possibilidades (p. 131) Atividades integradas (p. 133)	• Trabalhando com a informação – Contagem de possibilidades; cálculo de possibilidades pelo método da árvore (p.131). – “Atividades” com questões de 1 a 6 (p. 132). • Atividades integradas: questões de 1 a 8 (p. 133).

Quadro 105: continuação

Conteúdos de divisibilidade no sumário do LDM-25 Projeto Araribá: Matemática (2014) Unidade 7 e 8	Conteúdos de divisibilidade no interior do sumário do livro Projeto Araribá: Matemática (2014) – Unidade 7 e 8
Unidade 8: Mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum (pp. 134 – 155)	
1. Números primos, 134 • Reconhecimento de um número primo, 135	1. Números primos – Apresenta os divisores do número 32 e a definição de números primos (p. 134); – Apresenta o método do Crivo de Eratóstenes para identificar os números primos entre 1 a 50 números (p.134) – Apresenta definição de números compostos (p. 135). • Reconhecimento de um número primo pela divisão por primos (p. 135) “Vamos aplicar” de 1 a 6 questões (p. 136).
2. Decomposição em fatores primos, 136	– Apresenta a fatoração pela operação de multiplicação de quaisquer fatores (p. 136). – “Vamos fazer” de 1-2 questões – apresenta a decomposição em fatores primos pelo processo das fatorações sucessivas e também pelo processo das divisões sucessivas com traço vertical (p. 137). “Vamos aplicar” de 1 a 9 questões (p. 138).
3. Máximo divisor comum (mdc), 139	– Apresenta o mdc de dois números por uma situação-problema, pelas sequências dos divisores, e no exemplo a determinação do mdc pela divisão sucessiva e simultânea (p. 139). Em “Observação” a definição de números primos entre si (p. 139).
4. Mínimo múltiplo comum (mmc), 140	– Apresenta o mmc de dois números por uma situação-problema, pelas sequências dos múltiplos, e no exemplo a determinação do mmc pela divisão sucessiva e simultânea (p. 140). “Vamos fazer” – três situações-problema de mdc e mmc (p. 141). “Vamos aplicar” de 1 a 14 (pp. 142-143) com exercícios e situações-problema de mdc e mmc.
Atividades integradas, 144	• Atividades integradas de 1 a 5 situações-problema de mdc e mmc (p. 144).

Fonte: Projeto Araribá: Matemática (2014)

Os conteúdos de divisibilidade são apresentados no livro na seguinte ordem: (1º). Critérios de divisibilidade; (2º). Múltiplos; (3º). Divisores; (4º). Números primos; (5º). Decomposição em fatores primos; (6º). Máximo divisor comum e; (7º). Mínimo múltiplo comum.

Quadro 106: LDM-25 – Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade do livro do Projeto Araribá (2014) – PNLD-2017

Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade LDM-25 do Projeto Araribá: Matemática (2014) – PNLD-2017				
	CONTEÚDOS DE DIVISIBILIDADE	(P)	(A)	T.CD
1	Múltiplos	---	---	---
1.1	Definição de múltiplos de um número	P	--	
1.2	Ideia de “múltiplo de”	P	--	
1.3	Cálculos dos múltiplos (pela multiplicação)	P	--	
1.4	Sequência dos múltiplos de um número	P	--	
	TOTAL CS-1	04	00	04
2	Divisores	---	---	---
2.1	Definição de divisor de um número	P	--	
2.2	Ideia de “divisível por”	P	--	
2.3	Determinação dos divisores pela sequência (divisão ou multiplicação)	P	--	
2.4	Determinação de todos divisores pela DFP (Fatoração completa)	--	A	
2.5	Determinação de todos divisores pela DFP (Algoritmo de Euclides)	--	A	
2.6	Cálculo do Número (quantidade) de divisores	--	A	
	TOTAL CS-2	03	03	06
3	Critério de divisibilidade	---	---	---
3.1	Definição	P	--	
3.2	Divisibilidade por 2	P	--	
3.3	Divisibilidade por 3	P	--	
3.4	Divisibilidade por 4	P	--	
3.5	Divisibilidade por 5	P	--	
3.6	Divisibilidade por 6	P	--	
3.7	Divisibilidade por 7	--	A	
3.8	Divisibilidade por 9	P	--	
3.9	Divisibilidade por 10	P	--	
3.10	Divisibilidade por 11	--	A	
	TOTAL CS-3	08	02	10
4	Números primos	---	---	---
4.1	Definição de Números primos	P	--	
4.2	Definição de Número composto	P	--	
4.3	Identificação de números primos pelo Crivo de Eratóstenes.	P	--	
4.4	Reconhecimento de um número primo pela divisão por primos	P	--	
	TOTAL CS-4	04	00	04
5	Fatoração completa – Decomposição em Fatores Primos (DFP)	---	---	---
5.1	Definição de fatoração	--	A	
5.2	Definição de fatoração completa (TFA)	--	A	
5.3	Cálculo dos fatores primos pela multiplicação	P	--	
5.4	Decomposição em fatores primos por divisão sucessiva	P	--	
5.5	Aplicação de fatoração no cálculo de raiz quadrada	--	A	
	TOTAL CS-5	02	03	05
6	Máximo Divisor Comum (MDC)	---	---	---
6.1	Definição de Máximo divisor comum	--	A	
6.2	Determinação do mdc pela sequência de divisores	P	--	
6.3	Determinação do mdc pela fatoração completa	--	A	
6.4	Determinação do mdc pela DFP, divisão sucessiva e simultânea	P	--	
6.5	Determinação do mdc pelo processo prático de Euclides	--	A	
6.6	Identificação de primos entre si	P	--	

Quadro 106: Continuação

	TOTAL CS-6	03	03	06
7	Mínimo múltiplo comum (MMC)	---	---	---
7.1	Definição de mmc	--	A	
7.2	Determinação do mmc pela sequência dos múltiplos	P	--	
7.3	Determinação do mmc pela DFP em separado ou fatoração completa	--	A	
7.4	Determinação do mmc pela DFP divisão sucessiva e simultânea	P	--	
7.5	Determinação do mmc pela relação com o mdc	--	A	
	TOTAL CS-7	02	03	05
	TOTAL GERAL	26	14	40

Fonte: Editora Moderna (2015). Elaborado pela autora.

Tabela 55: LDM-25 – Resultado final quantitativo e qualitativo da presença-ausência dos conteúdos de divisibilidade do livro Projeto Araribá: Matemática (2014)

Resultado final quantitativo e qualitativo da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade – LDM-25 de Projeto Araribá: Matemática (2014)					
Conteúdos Principais			Conteúdos Secundários		Total
CP	CP _P	CP _A	CS _P	CS _A	CD _P
CP1	01	-	04	00	04
CP2	01	-	03	03	06
CP3	01	-	08	02	10
CP4	01	-	04	00	04
CP5	01	-	02	03	05
CP6	01	-	03	03	06
CP7	01	-	02	03	05
Total	07	00	26	14	40
Conceito: Regular (ausência moderadamente expressiva dos conteúdos de divisibilidade)					
Legenda: CD _P (Conteúdos de divisibilidade presentes); CP _P (Conteúdos principais presentes); CP _A (Conteúdos principais ausentes); CS _P (Conteúdos secundários presentes); CS _A (Conteúdos secundários ausentes).					

Conforme podemos observar na Ficha de análise (Quadro 106) e na Tabela 55, dos resultados finais, todos os conteúdos principais de divisibilidade estão contemplados no livro analisado, entretanto, constatamos a ausência dos seguintes conteúdos secundários:

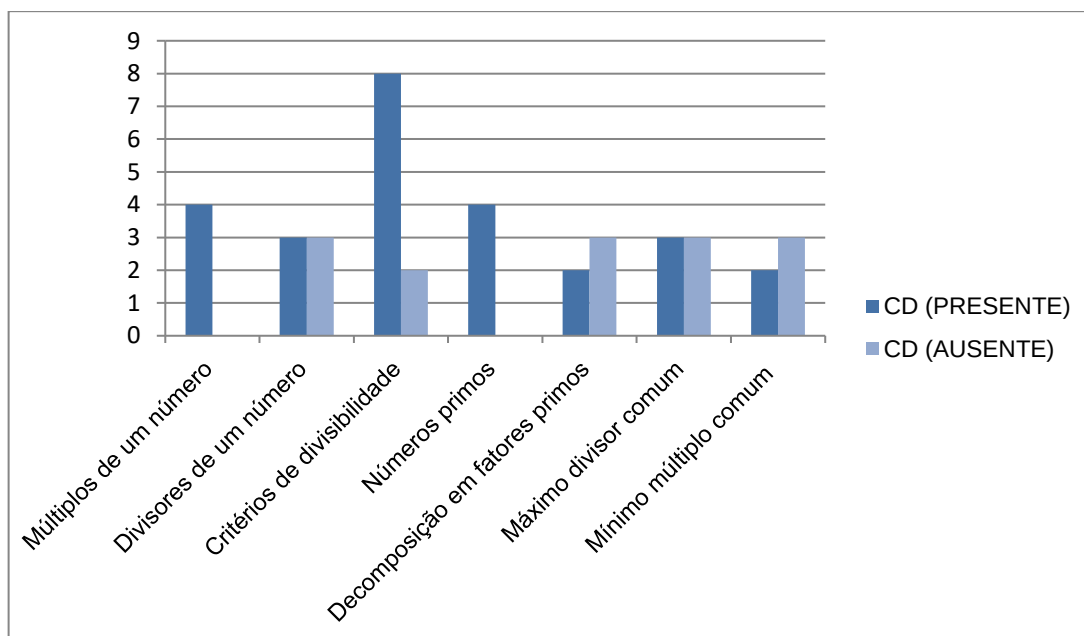
CP-2 Divisores: não apresenta a determinação de todos os divisores de um número pela fatoração completa e nem pelo processo prático de Euclides, tampouco o cálculo de números de divisores; **CP-3 Critérios de divisibilidade:** Não apresenta os critérios de divisibilidade por 7 e por 11; **CP-5 Fatoração – decomposição em fatores primos:** Não apresenta a definição de fatoração e nem da fatoração completa (TFA); também não apresenta a aplicação da fatoração no cálculo da raiz quadrada;

CP-6 Máximo divisor comum: Não apresenta a definição de mdc e nem apresenta a determinação do mdc pela divisão sucessiva e separado (fatoração completa) e nem pelo processo prático de Euclides; **CP-7 Mínimo múltiplo comum:** Não apresenta a definição de mmc; não apresenta a determinação do mmc pela divisão sucessiva e separado (fatoração completa) e nem a determinação do mmc pela relação com o mdc.

Conforme análise, contatamos 35% de conteúdos ausentes e, de acordo com os indicadores, o livro é classificado com o conceito “Regular” por apresentar ausência moderadamente expressiva dos conteúdos de divisibilidade.

A seguir apresentamos o Gráfico 12 com o resultado final da análise mostrando a realidade da presença e ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro analisado.

gráfico 13: LDM-25 – Presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro “Projeto Araribá: Matemática” (2014)



6.4.7 LDM-26: Análise do Livro ‘Convergências Matemática’ 6º ano de Eduardo Chavante (2015)

Este livro está estruturado em quatro unidades, subdivididas em 13 capítulos e, nestes são abordados os tópicos de conteúdo, entremeados por atividades. As

quatro unidades não estão identificadas, somente os capítulos têm títulos. Fazem parte da Unidade 1 os seguintes capítulos: 1, 2, 3 e 4; Unidade 2 contém os capítulos 5, 6 e 7; Unidade 3: têm os capítulos 8, 9 e 10 e, a Unidade 4, contempla os capítulos 11, 12 e 13. Após a apresentação pelo autor aos alunos, em duas páginas, há a seção “Conheça seu livro” onde o autor apresenta orientações com ilustrações de como o aluno deve utilizar o livro.

Ao longo do livro de matemática do 6º ano, encontram-se várias seções especiais tais como: “*Ampliando fronteiras*”, com textos e atividades baseados em contextos diversos; “*Valores em ação*”, expõe textos e atividades que envolvem temas socioambientais; “*Verificando sua rota*”; “*Ação e construção*”, com atividades em que os conteúdos da Matemática se relacionam aos de outras áreas do conhecimento. Ao final do livro, encontramos as seguintes seções: *Ferramentas*, com orientações sobre o uso de recursos didáticos; *Gabarito*, contém as respostas para a maioria das atividades propostas; *Leitura e pesquisa*, apresenta algumas sugestões de livros e de sites relacionados à Matemática, *Siglas e Referências Bibliográficas*.

Expomos a seguir a capa do livro e a apresentação pelo autor aos alunos.

Imagem 27: Capa do LDM-26 de Eduardo Chavante (2015)



Fonte: Guia do livro didático de matemática (PNLD, 2016, p. 122).

Seja bem-vindo!

Querido(a) aluno(a),

Este livro foi preparado com dedicação para que você amplie o seu conhecimento a respeito da Matemática, utilizando-a cada vez mais em seu cotidiano de maneira consciente.

Sem um leitor, este livro é apenas um apanhado de letras, números e símbolos, mas, em suas mãos, ele se torna uma poderosa ferramenta, capaz

de ampliar seus conhecimentos a respeito do mundo no qual estamos inseridos.

Você vai encontrar nas diversas seções deste livro textos e atividades que relacionam a Matemática com as diversas áreas do conhecimento, além de situações em que seu conhecimento matemático será posto à prova. Esta obra apresenta também assuntos matemáticos direcionados à sua formação de cidadão(ã). Fornecendo para isso oportunidades para a reflexão de atitudes que podemos, e devemos desenvolver para vivermos melhor em uma sociedade dinâmica e em plena transformação.

Bons estudos!

O autor.

Os conteúdos de divisibilidade estão contemplados na Unidade 2, Capítulo 6 – “Múltiplos e divisores de números naturais – são abordados por meio de explanação teórica seguidas de exemplos e, somente no final dos conteúdos são apresentadas as atividades.

A seguir apresentamos o Quadro 107, com os dados gerais do livro que será analisado.

Quadro 107: LDM-26 – Dados gerais do livro de Eduardo Chavante (2015)

LDM-26	2015 – PNLD-2017		
Titulo	CONVERGÊNCIA: MATEMÁTICA, 6º ano		
Autor	EDUARDO CHAVANTE ¹³⁵		
Ano da publicação	2015	1ª impressão	1ª edição
Editora	SM	São Paulo	
Quantidade de páginas do livro	320	Dimensões da página: 20,5 cm por 27,50 cm	
Manual do professor	128 páginas		
Distribuição do conteúdo	04 Unidades e 13 capítulos		
Unidade dedicada à divisibilidade	Unidade 2 – Capítulo 6: Múltiplos e divisores de números naturais.		(122 – 147) 26 páginas (8%)
Capítulo que antecede ao de divisibilidade	Capítulo 4 – Potenciação, raiz quadrada e expressões numéricas.		(106 – 121) 16 páginas
Capítulo posterior ao de divisibilidade	Capítulo 6 – Frações e porcentagens		(152 – 189) 38 páginas

Fonte: Chavante (2015). Elaborado pela autora.

Apresentamos a seguir o Quadro 108, com os conteúdos de divisibilidade no sumário do livro e no interior do capítulo.

¹³⁵ Eduardo Chavante – Licenciado em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica do Paraná (PUC-PR). Professor da rede pública no Ensino Fundamental e Ensino Médio do Paraná. Atuou como professor na rede particular no Ensino Fundamental do Paraná (CHAVANTE, 2015).

Quadro 108:LDM-26 – Conteúdos de divisibilidade apresentados no sumário e no interior do capítulo do livro de Eduardo Chavante (2015)

Conteúdos de divisibilidade no sumário do livro de Eduardo Chavante (2015) Unidade 2 – Capítulo 6	Distribuição dos conteúdos no interior do Capítulo 6: Múltiplos e divisores de números naturais
Unidade 2 – Capítulo 6: Múltiplos e divisores de números naturais	Introduz o assunto com três situações-problema a partir de “A que horas passam juntos?”; “Decompondo números”; <i>Desafio do “pim”</i> (p. 111).
Múltiplos e divisores (p.112)	Múltiplos (p. 111) – Apresenta uma situação-problema, cálculo dos múltiplos pela multiplicação. Mínimo múltiplo comum (p. 113) – Apresenta a definição de mmc (p. 113). Divisores (p. 113) – Apresenta uma situação-problema e os divisores a partir do cálculo pela divisão. (p. 113). Máximo divisor comum (mdc) (p. 115) – Apresenta a definição de mdc (p. 115). • Atividades com questões de 1 a 17 (pp. 116-117).
Valores em ação: perigos da automedicação (p. 119)	• Valores em ação – Texto sobre “Perigos da automedicação” e duas questões (p. 119)
CrITÉRIOS de divisibilidade (p. 120)	CrITÉRIOS de divisibilidade – apresenta definição (p. 120); – Divisibilidade por 2, por 3 e 9 (p. 120); – Divisibilidade por 4, por 5, por 10 e por 6 (p. 121).
Reconhecendo números primos (p. 122)	Reconhecendo números primos (p. 122) – Apresenta definição de números primos – Apresenta o Crivo de Eratóstenes para identificar primos de 1 a 50 números (p. 122) • Decompondo números naturais (p. 123) – Apresenta definição de números compostos (p. 123) e decomposição em fatores primos (p. 123); • Cálculo do mínimo múltiplo comum pela DFP divisão sucessiva e simultânea (p. 123) • Atividades – questões de 18 a 27. – Na questão 20 apresenta a definição e cálculo do mdc de primos entre si (p. 124); – Na questão 21 apresenta o algoritmo de Euclides para calcular todos os divisores de um número (p. 125); – Na questão 22 apresenta a determinação do mdc pela DFP sucessiva e simultânea. Seção “Vamos lembrar” apresenta questões de 28 a 46.

Fonte: Chavante (2015). Elaborado pela autora

Apresentamos a Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro (Quadro 109), seguida da Tabela 56 com o resultado final da análise e a qualificação do livro referente aos conteúdos presentes.

Quadro 109: LDM-26 – Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro de Eduardo Chavante (2015) – PNLD-2017

Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade LDM-26 de Eduardo Chavante (2015) – PNLD-2017				
	CONTEÚDOS DE DIVISIBILIDADE	(P)	(A)	T.CD
1	Múltiplos	---	---	---
1.1	Definição de múltiplos de um número	--	A	
1.2	Ideia de “múltiplo de”	P	--	
1.3	Cálculos dos múltiplos (pela multiplicação)	P	--	
1.4	Sequência dos múltiplos de um número	P	--	
	TOTAL CS-1	03	01	04
2	Divisores	---	---	---
2.1	Definição de divisor de um número	--	A	
2.2	Ideia de “divisível por”	P	--	
2.3	Determinação dos divisores pela sequência (divisão ou multiplicação)	P	--	
2.4	Determinação de todos divisores pela DFP (Fatoração completa)	--	A	
2.5	Determinação de todos divisores pela DFP (Algoritmo de Euclides)	P	--	
2.6	Cálculo do Número (quantidade) de divisores	--	A	
	TOTAL CS-2	03	03	06
3	Critério de divisibilidade	---	---	---
3.1	Definição	P	--	
3.2	Divisibilidade por 2	P	--	
3.3	Divisibilidade por 3	P	--	
3.4	Divisibilidade por 4	P	--	
3.5	Divisibilidade por 5	P	--	
3.6	Divisibilidade por 6	P	--	
3.7	Divisibilidade por 7	--	A	
3.8	Divisibilidade por 9	P	--	
3.9	Divisibilidade por 10	P	--	
3.10	Divisibilidade por 11	--	A	
	TOTAL CS-3	08	02	10
4	Números primos	---	---	---
4.1	Definição de Números primos	P	--	
4.2	Definição de Número composto	P	--	
4.3	Identificação de números primos pelo Crivo de Eratóstenes.	P	--	
4.4	Reconhecimento de um número primo pela divisão por primos	P	--	
	TOTAL CS-4	04	00	04
5	Fatoração completa – Decomposição em Fatores Primos (DFP)	---	---	---
5.1	Definição de fatoração	--	A	
5.2	Definição de fatoração completa (TFA)	P	--	
5.3	Cálculo dos fatores primos pela multiplicação	P	--	
5.4	Decomposição em fatores primos por divisão sucessiva	P	--	
5.5	Aplicação de fatoração no cálculo de raiz quadrada	--	A	
	TOTAL CS-5	03	02	05

Quadro 109: Continuação

Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade LDM-26 de Eduardo Chavante (2015) – PNLD-2017				
	CONTEÚDOS DE DIVISIBILIDADE	(P)	(A)	T.CD
6	Máximo Divisor Comum (MDC)	---	---	---
6.1	Definição de Máximo divisor comum	P	--	
6.2	Determinação do mdc pela sequência de divisores	P	--	
6.3	Determinação do mdc pela fatoração completa	--	A	
6.4	Determinação do mdc pela DFP, divisão sucessiva e simultânea	P	--	
6.5	Determinação do mdc pelo processo prático de Euclides	--	A	
6.6	Identificação de primos entre si	P	--	
	TOTAL CS-6	04	02	06
7	Mínimo múltiplo comum (MMC)	---	---	---
7.1	Definição de mmc	P	--	
7.2	Determinação do mmc pela sequência dos múltiplos	P	--	
7.3	Determinação do mmc pela DFP em separado ou fatoração completa	--	A	
7.4	Determinação do mmc pela DFP divisão sucessiva e simultânea	P	--	
7.5	Determinação do mmc pela relação com o mdc	--	A	
	TOTAL CS-7	03	02	05
	TOTAL GERAL	28	12	40

Fonte: Chavante (2015). Elaborada pela autora.

Tabela 56: LDM-26 – Resultado final quantitativo e qualitativo da presença-ausência dos conteúdos de divisibilidade do livro de Eduardo Chavante (2015)

Resultado final quantitativo e qualitativo da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade – LDM-26 de Eduardo Chavante (2015)					
Conteúdos Principais			Conteúdos Secundários		Total
CP	CP _P	CP _A	CS _P	CS _A	CD _P
CP1	01	-	03	01	04
CP2	01	-	03	03	06
CP3	01	-	08	02	10
CP4	01	-	04	00	04
CP5	01	-	03	02	05
CP6	01	-	04	02	06
CP7	01	-	03	02	05
Total	07	00	28	12	40
Conceito: Regular (ausência moderadamente expressiva dos conteúdos de divisibilidade)					
Legenda: CD _P (Conteúdos de divisibilidade presentes); CP _P (Conteúdos principais presentes); CP _A (Conteúdos principais ausentes); CS _P (Conteúdos secundários presentes); CS _A (Conteúdos secundários ausentes).					

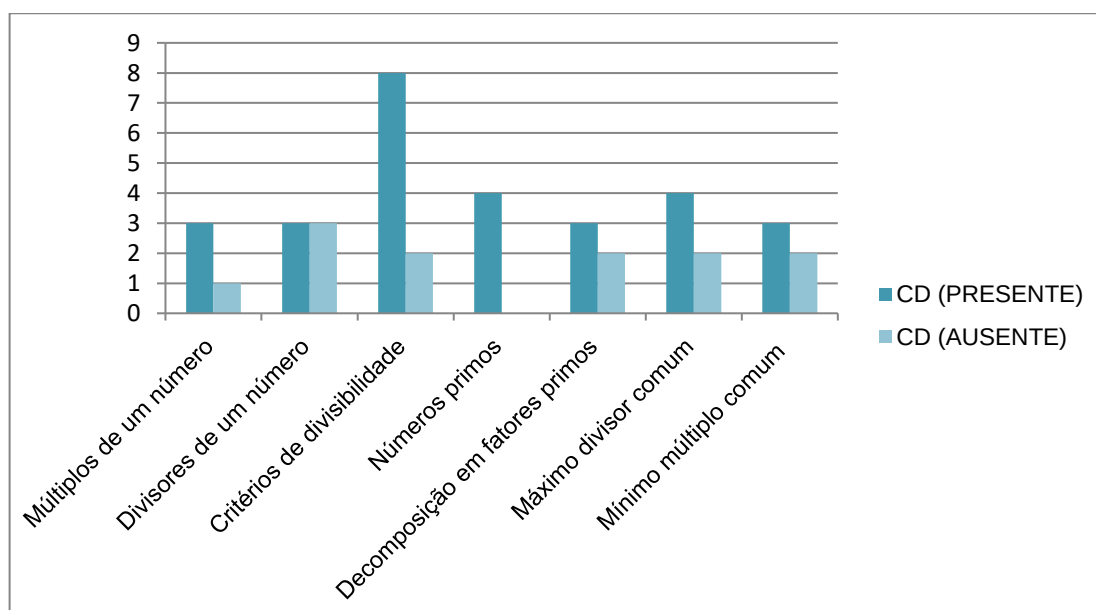
Conforme podemos observar na Ficha de análise (Quadro 119) e na Tabela 56, todos os conteúdos principais de divisibilidade estão contemplados no livro analisado, entretanto, constatou-se a ausência dos seguintes conteúdos secundários:

CP-1 Múltiplo: Não apresenta a definição; **CP-2 Divisores:** Não apresenta a definição; não apresenta a determinação de todos os divisores pela DFP (Fatoração completa) e também não apresenta o cálculo do número (quantidade) de divisores; **CP-3 Critérios de divisibilidade:** Não apresenta os critérios de divisibilidade por 7 e por 11; **CP-5 Decomposição em fatores primos:** Não apresenta a definição de fatoração e nem a aplicação no cálculo da raiz quadrada de um número; **CP-6 Máximo divisor comum:** Não apresenta a determinação do mdc pela decomposição em fatores primos em separado (fatoração completa) e nem pelo processo prático de Euclides; **CP-7 Mínimo múltiplo comum:** Não apresenta a determinação do mmc pela fatoração completa (divisão sucessiva em separado) e nem pela relação com o mdc.

Conforme análise, contamos 30% de conteúdos ausentes e, de acordo com os indicadores, o livro é classificado com o conceito “Regular” por apresentar ausência moderadamente expressiva dos conteúdos de divisibilidade.

A seguir apresentamos o Gráfico 13 com o resultado final da análise mostrando a realidade da presença e ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro analisado.

Gráfico 14: LDM-26 – Presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro de Eduardo Chavante (2015) – PNLD-2017



6.4.8 LDM-27 – Análise do livro “Descobrindo e Aplicando a Matemática” 6º ano de Alceu dos Santos Mazzeiro e Paulo Antônio Fonseca Machado (2015)

Imagem 28: Capa do LDM-27 de Mazzeiro e Machado (2015)



Fonte: Guia do livro didático de matemática (PNLD, 2016, p. 64).

A seguir expomos a apresentação pelos autores aos alunos.

Estudante,

Este livro foi elaborado para que você converse bastante na aula de Matemática. Calma, não estamos dizendo para você perturbar o ambiente. Nada disso. A conversa a que nos referimos tem a ver com os exercícios e atividade aqui propostas, que vão estimular você a participar da aula o tempo todo, sozinho ou em grupo.

De que maneira? Fácil: respondendo perguntas, resolvendo e inventando problemas ligados ao dia a dia, montando e desmontando objetos, fazendo contas com a calculadora, interpretando ou fazendo gráficos, desenhando figuras ou interpretando desenhos de figuras, discutindo como resolver ou inventar problemas, descobrindo propriedades dos números e das figuras. Sobretudo, aplicando suas descobertas em problemas da vida prática e em situações relacionadas com as outras matérias que você estuda.

Você verá como a aula de matemática se torna agradável com a participação de todos.

Use este livro com carinho, pois ele será utilizado no próximo ano por outro aluno. Lembre-se de que não deve desenhar nem escrever nele, nem mesmo seu nome.

Uma última recomendação: crie o hábito de, assim que chegar em casa, fazer os exercícios marcados pela professora ou pelo professor. Principalmente por dois motivos: o primeiro, porque ainda estão em sua memória os assuntos estudados em aula, e o segundo porque, ao deixar para depois, imprevistos podem impedi-lo de resolver os exercícios. E esses são muito importantes para o complemento de sua aprendizagem.

Um abraço.
Os autores

Este livro apresenta uma abordagem diferenciada dos demais livros analisados por apresentar os conteúdos na forma de atividades, com questões e/ou situações-problema, entremeadas com alguns exemplos, de modo que se possa trabalhar estratégias para o desenvolvimento de conceitos dos diversos campos da matemática escolar. Os conteúdos matemáticos estão distribuídos em 9 (nove) capítulos, conforme a seguir: Capítulo 1 – Figuras, números e gráficos; Capítulo 2 – Figuras, números e medidas; Capítulo 3 – Números naturais e o dia a dia; Capítulo 4 – Medidas, frações e decimais; Capítulo 5 – Números, figuras e o dia a dia; Capítulo 6 – Medidas e o dia a dia; Capítulo 7 – Figuras, números e proporcionalidade; Capítulo 8 – Revendo e aprendendo mais; Capítulo 9 – Atividade complementares.

Apresentamos na continuidade da análise, o Quadro 120, com os dados gerais do livro que será analisado, o Quadro 121, com os conteúdos de divisibilidade no sumário do livro e no interior do capítulo.

Quadro 110: LDM-27 – Dados gerais do livro de Mazzeiro e Machado (2015)

LDM-27	2015 – PNLD-2017		
Título	DESCOBRINDO E APLICANDO A MATEMÁTICA 6º ano		
Autores	ALCEU DOS SANTOS MAZZIEIRO ¹³⁶ PAULO ANTÔNIO FONSECA MACHADO ¹³⁷		
Ano da publicação	2015	1ª impressão	1ª edição
Editora	Ática	São Paulo	
Quantidade de páginas do livro	334	Dimensões da página: 20 cm por 27,50 cm	
Manual do professor	112 páginas		
Distribuição do conteúdo	09 capítulos		
Unidade dedicada à divisibilidade	Unidade 2 – Capítulo 5: Divisores e múltiplos de números naturais.		(122 – 147) 26 páginas (8,5%)
Capítulo que antecede ao de divisibilidade	Capítulo 4 – Potenciação, raiz quadrada e expressões numéricas.		(106 – 121) 16 páginas
Capítulo posterior ao de divisibilidade	Capítulo 6 – Frações e porcentagens		(152 – 189) 38 páginas

Fonte: Mazzeiro e Machado (2015). Elaborado pela autora.

¹³⁶ Alceu dos Santos Mazzeiro – Bacharel. Licenciado e especialista em Matemática pela UFMG. Atuou como: chefe dos Departamentos de Matemática do Centro Pedagógico, do Colégio Universitário e do Instituto de Ciências exatas da UFMG; coordenador da área de Matemática do projeto Inovação Curricular e Capacitação de Docentes do Ensino Fundamental da Secretaria Estadual de Educação do Estado de Minas Gerais; coordenador da área de Matemática do Projeto de Correção do Fluxo Escolar para o ensino Fundamental da Secretaria Estadual de Ensino do Estado da Bahia; e membro da equipe de consultores do Projeto de Capacitação de Professores de Ensino Médio da Rede Estadual de Ensino de Minas Gerais.

¹³⁷ Paulo Antônio Fonseca Machado – Bacharel e mestre em Matemática pela UFMG, doutor em Matemática pela Unicamp/UFBA. Atualmente é professor associado do Departamento de Matemática do Instituto de Ciências Exatas da UFMG, do qual foi chefe em vários mandatos.

Neste livro, as três primeiras folhas contêm orientações aos estudantes e aos pais sobre como usar o livro do aluno. Os capítulos são divididos em algumas seções temáticas tais como: “*Explorando o que você já sabe*”; “*Aprendendo em sala de aula*”; “*Aprendendo em casa*”; “*Explorando o que você aprendeu*” e ‘*aprendendo mais*’, além das denominadas *Seção Olímpica*, com atividades adicionais, e *Verifique o que aprendeu*. Os capítulos oito e nove são dedicados, respectivamente, a revisões dos assuntos abordados nos sete primeiros e a atividades complementares. No final do livro, há um glossário, bem como “sugestões de leituras adicionais e de sites” para os estudantes.

Os autores apresentam o capítulo 5 (cinco) em que estão contemplados alguns dos conteúdos de divisibilidade da seguinte forma:

“Você já resolveu diversos problemas com números naturais e com figuras. Neste capítulo, você vai aprender como:

- *Calcular ou identificar múltiplos ou divisores de números naturais.*
- *Escrever sequências de múltiplos ou de divisores de um número que satisfaçam as condições dadas.*
- *Calcular ou identificar múltiplos comuns ou divisores comuns de números naturais.*
- *Destacar, entre os diversos múltiplos comuns de números naturais, o mínimo múltiplo comum.*
- *Destacar, entre os diversos divisores comuns de números naturais, o máximo múltiplo comum.*
- *Resolver problemas relacionados com múltiplos comuns, divisores comuns, mínimo múltiplo comum ou máximo divisor comum.* (MAZZIEIRO e MACHADO, 2015, p. 174) (Grifo nosso).

Os autores introduzem o assunto no Capítulo 5 com o título “Múltiplo de números naturais” e “Explorando o que você já sabe”, logo em seguida apresentam uma situação-problema com três questões para o aluno responder, em seguida apresenta os conteúdos numerados de 1 a 45.

A partir do item 45 ao 74 os autores apresentam atividades de Geometria em “Contando e desenhando”.

Os conteúdos de divisibilidade (múltiplos, divisores, mdc e mmc), são retomados por meio de atividades, nas seções “Revendo o capítulo 5” e “Atividades complementares do capítulo 5 (cinco).

Apresentamos a seguir o Quadro 111, com os conteúdos de divisibilidade que constam no sumário e no interior do capítulo.

Quadro 111: LDM-27 – Conteúdos de divisibilidade apresentados no sumário e no interior do capítulo do livro de Mazzeiro e Machado (2015)

Conteúdos de divisibilidade no sumário do livro de Mazzeiro e Machado (2015) Capítulo 5: Números, figuras e o dia a dia	Conteúdos de divisibilidade no interior do Capítulo 5 – Números, figuras e o dia a dia
Múltiplos de números naturais (p. 175)	Questão 1 – inicia com uma situação-problema para o aluno descobrir a sequência dos múltiplos de 4 e de 5 (p. 175). Questão 2 – apresenta uma tabela com os primeiros múltiplos de 7 para o aluno descobrir o restante (p. 176); Na Questão 12 estão destacados alguns múltiplos comuns de 2 e 3 (p. 177). Na questão 13 – “Qual o menor múltiplo comum de 2 e 3, diferente de zero? (p. 177). Na questão 15 apresenta uma tabela com os primeiros múltiplos de 4, 5, 6 e 8 e pede: “Escreva, em seu caderno, o menor múltiplo comum diferente de zero dos seguintes pares de números ...” Na questão 18 apresenta uma tabela com alguns múltiplos comuns de 11 pares de números e solicita para calcular o mmc. (p. 178) – Apresenta a definição do mmc (p. 178). Nas questões de 20 a 23 apresenta situações-problema de mmc.
Divisores de números naturais (p. 180)	Na seção “<i>Explorando o que você já sabe</i>” apresenta uma situação-problema para introduzir o assunto de divisores (p. 180). – Na questão 31 apresenta os múltiplos e divisores de 6 e 10. – Nas questões de 28 a 45 o livro apresenta atividade sobre os divisores e mdc. O livro retoma os assuntos de múltiplos, divisores, mmc e mdc na Seção “<i>Explorando o que você aprendeu e aprendendo mais</i>” apresenta situações-problema nas questões de 75 a 81 e faz aplicação do mdc e mmc para resolver cálculos de frações.
Contando e desenhando (p. 184)	Conteúdos de geometria (itens de 46 a 61)
Caminhos e simetrias (p. 190)	Conteúdos de geometria (itens de 62 a 74).
Seção olímpica (p. 198)	Questões das Olimpíadas de Matemática (2006-2010), mas nenhuma sobre divisibilidade.
Verifique se você aprendeu (p. 202)	Relaciona os conteúdos do capítulo com as páginas dos exercícios correspondentes. – Na seção “<i>Revendo o capítulo 5</i>” nos itens de 55 a 58 apresentam-se atividades sobre os múltiplos dos números 2, 3 e 5. – Na seção “<i>Atividades complementares do capítulo 5</i>” (questões de 147 a 163) dentre essas, atividades com conteúdos de divisibilidade (múltiplos, divisores, mdc e mmc) encontram-se nos itens de 150 a 156 e, de 161 a 163.

Fonte: Mazzeiro e Machado (2015).

Como podemos observar, este livro contempla apenas quatro dos sete conteúdos de divisibilidade, ou seja, múltiplos, divisores, mmc e mdc, na forma de atividades e algumas dessa atividade são situações-problema. Apresenta poucos exemplos e nenhum algoritmo ou método para a determinação de todos os divisores, mdc e mmc.

Apresentamos a Ficha de análise dos conteúdos de divisibilidade no livro (Quadro 112) e, por fim, a Tabela 57, com o resultado final.

Quadro 112: LDM-27 – Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro de Mazzeiro e Machado (2015) – PNLD-2017

Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade LDM-27 de Mazzeiro e Machado (2015) – PNLD-2017				
	CONTEÚDOS DE DIVISIBILIDADE	(P)	(A)	T.CD
1	Múltiplos	---	---	---
1.1	Definição de múltiplos de um número	--	A	
1.2	Ideia de “múltiplo de”	P	--	
1.3	Cálculos dos múltiplos (pela multiplicação)	P	--	
1.4	Sequência dos múltiplos de um número	P	--	
	TOTAL CS-1	03	01	04
2	Divisores	---	---	---
2.1	Definição de divisor de um número	--	A	
2.2	Ideia de “divisível por”	P	--	
2.3	Determinação dos divisores pela sequência (divisão ou multiplicação)	P	--	
2.4	Determinação de todos divisores pela DFP (Fatoração completa)	--	A	
2.5	Determinação de todos divisores pela DFP (Algoritmo de Euclides)	--	A	
2.6	Cálculo do Número (quantidade) de divisores	--	A	
	TOTAL CS-2	02	04	06
3	Critério de divisibilidade	---	---	---
3.1	Definição	--	A	
3.2	Divisibilidade por 2	--	A	
3.3	Divisibilidade por 3	--	A	
3.4	Divisibilidade por 4	--	A	
3.5	Divisibilidade por 5	--	A	
3.6	Divisibilidade por 6	--	A	
3.7	Divisibilidade por 7	--	A	
3.8	Divisibilidade por 9	--	A	
3.9	Divisibilidade por 10	--	A	
3.10	Divisibilidade por 11	--	A	
	TOTAL CS-3	00	10	10
4	Números primos	---	---	---
4.1	Definição de Números primos	--	A	
4.2	Definição de Número composto	--	A	
4.3	Identificação de números primos pelo Crivo de Eratóstenes.	--	A	
4.4	Reconhecimento de um número primo pela divisão por primos	--	A	
	TOTAL CS-4	00	04	04

Quadro 112: Continuação

Ficha de análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade LDM-27 de Mazzeiro e Machado (2015) – PNLD-2017				
	CONTEÚDOS DE DIVISIBILIDADE	(P)	(A)	T.CD
5	Fatoração completa – Decomposição em Fatores Primos (DFP)	---	---	---
5.1	Definição de fatoração	--	A	
5.2	Definição de fatoração completa (TFA)	--	A	
5.3	Cálculo dos fatores primos pela multiplicação	--	A	
5.4	Decomposição em fatores primos por divisão sucessiva	--	A	
5.5	Aplicação de fatoração no cálculo de raiz quadrada	--	A	
	TOTAL CS-5	00	05	05
6	Máximo Divisor Comum (MDC)	---	---	---
6.1	Definição de Máximo divisor comum	P	--	
6.2	Determinação do mdc pela sequência de divisores	P	--	
6.3	Determinação do mdc pela fatoração completa	--	A	
6.4	Determinação do mdc pela DFP, divisão sucessiva e simultânea	--	A	
6.5	Determinação do mdc pelo processo prático de Euclides	--	A	
6.6	Identificação de primos entre si	--	A	
	TOTAL CS-6	02	04	06
7	Mínimo múltiplo comum (MMC)	---	---	---
7.1	Definição de mmc	P	--	
7.2	Determinação do mmc pela sequência dos múltiplos	P	--	
7.3	Determinação do mmc pela DFP em separado ou fatoração completa	--	A	
7.4	Determinação do mmc pela DFP divisão sucessiva e simultânea	--	A	
7.5	Determinação do mmc pela relação com o mdc	--	A	
	TOTAL CS-7	02	03	05
	TOTAL GERAL	09	31	40

Fonte: Mazzeiro e Machado (2015). Elaborada pela autora.

Tabela 57: LDM-27 – Resultado final quantitativo e qualitativo da presença-ausência dos conteúdos de divisibilidade do livro de Mazzeiro e Machado (2015)

Resultado final quantitativo e qualitativo da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade – LDM-27 Mazzeiro e Machado (2015)					
Conteúdos Principais			Conteúdos Secundários		Total
CP	CP _P	CP _A	CS _P	CS _A	CD _P
CP1	01	-	03	01	04
CP2	01	-	02	04	06
CP3	01	-	00	10	10
CP4	01	-	00	04	04
CP5	01	-	00	05	05
CP6	01	-	02	04	06
CP7	01	-	02	03	05
Total	07	00	09	31	40
Conceito: Insuficiente (ausência muito expressiva dos conteúdos de divisibilidade)					

Legenda: CD_P (Conteúdos de divisibilidade presentes); CP_P (Conteúdos principais presentes); CP_A (Conteúdos principais ausentes); CS_P (Conteúdos secundários presentes); CS_A (Conteúdos secundários ausentes).

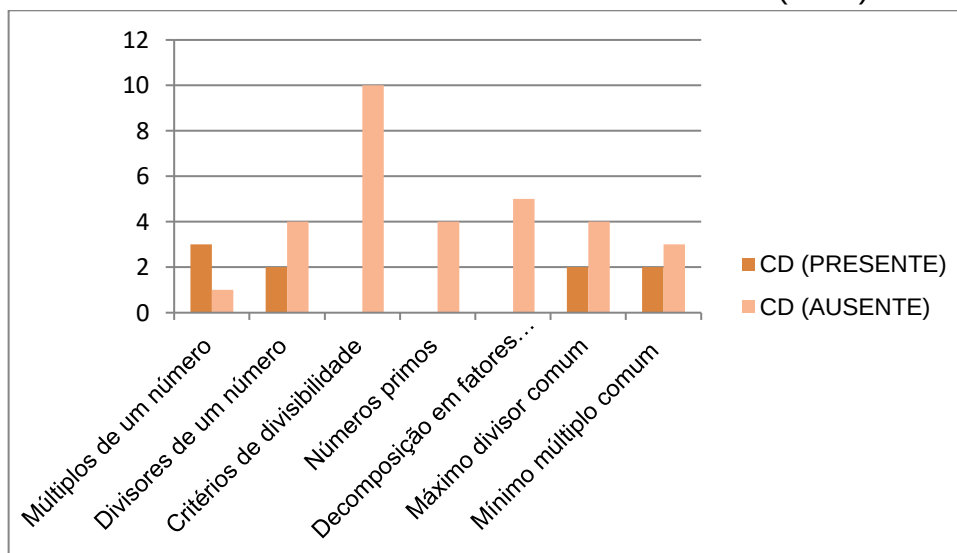
Conforme podemos observar na Ficha de análise (Quadro 122) e na Tabela 57, nem todos os conteúdos principais de divisibilidade estão contemplados no livro analisado, apenas quatro dos sete elencados (múltiplos, divisores, mdc e mmc).

Além do livro não apresentar nenhum conteúdo secundário de critérios de divisibilidade; números primos e decomposição em fatores primos, apresenta de forma incompleta os seguintes conteúdos principais: **CP-1 Múltiplo**: Não apresenta a definição; **CP-2 Divisores**: Não apresenta a definição; não apresenta o cálculo para encontrar todos os divisores pelo processo prático de Euclides, tampouco o cálculo de números de divisores; **CP-6 Máximo divisor comum**: Não apresenta a definição de mdc. Não apresenta a determinação do mdc pela divisão sucessiva em separado e nem pela divisão sucessiva e simultânea, nem pelo algoritmo de Euclides. Não apresenta a definição e o mdc dos números primos entre si; **CP-7 Mínimo múltiplo comum**: Não apresenta a determinação do mmc pela divisão sucessiva em separado e nem pela divisão sucessiva simultânea; também não apresenta a determinação do mmc pela relação com o mdc.

Conforme a análise realizada, contatamos 77,5% de conteúdos ausentes e, de acordo com os indicadores, o livro é classificado com o conceito “Insuficiente” por apresentar ausência muito expressiva dos conteúdos de divisibilidade.

A seguir apresentamos o Gráfico 14, com uma visão geral do resultado final da análise da presença e ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro analisado.

Gráfico 15: Resultado final geral da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade no livro de Mazzeiro e Machado (2015)

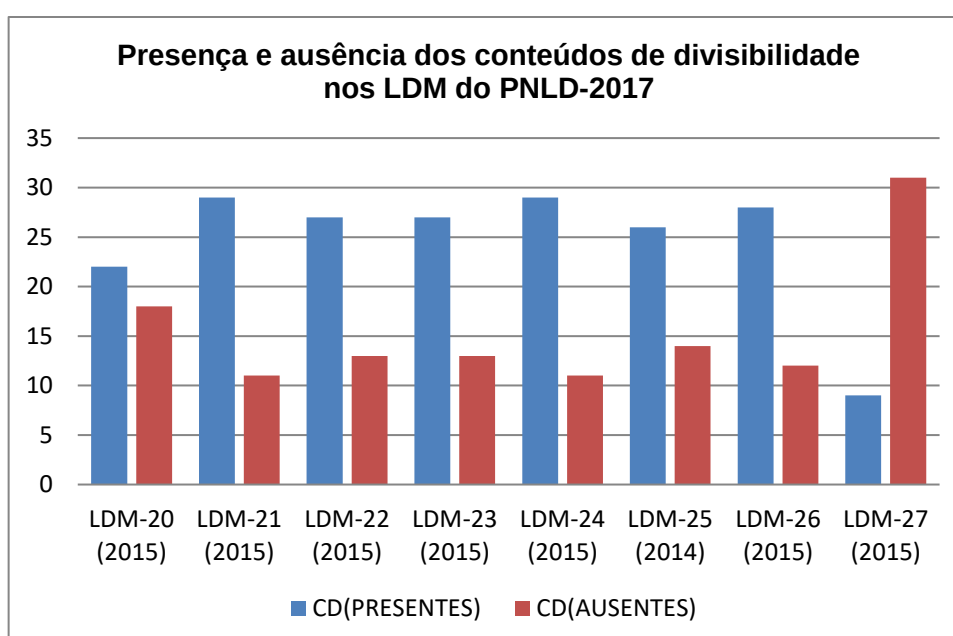


6.4.9 Considerações sobre o Resultado da Análise dos Livros Selecionados do PNLD-2017

Analizamos oito livros didáticos de matemática dentre os dez livros mais escolhidos pelos professores brasileiros do PNLD-2017, conforme a seguir: LDM-20 de Álvaro Andrini e Maria José Vasconcelos (2015); LDM-21 de Joamir Souza e Patrícia Pataro (2015); LDM-22 de Ênio Silveira (2015); LDM-23 de Luiz Roberto Dante (2016); LDM-24 de Edwaldo Bianchini (2015); LDM-25 Projeto Araribá: Matemática (2014); LDM-26 de Eduardo Chavante (2015) e, LDM-27 de Mazzeiro e Machado (2015).

A seguir apresentamos o Gráfico 16, com os dados finais computados a partir da análise da presença e ausência dos conteúdos de divisibilidade nos oito livros analisados da Fase 3.

Gráfico 16: Resultado quantitativo da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade nos livros do PNLD-2017 (Fase 3)

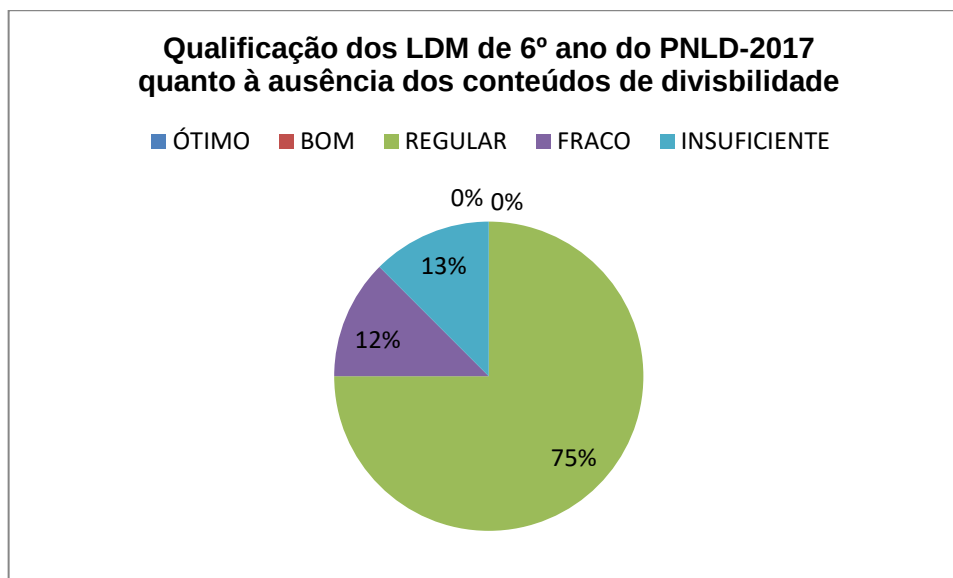


Dos oito livros analisados referente aos PNLD-2017 (triênio 2017-2018-2019), dois livros apresentam maior quantidade de conteúdos de divisibilidade ausentes, o LDM-20 (ausência expressiva) e o LDM-27 (ausência muito expressiva), e seis livros

tem variação de 11 a 14 conteúdos secundários ausentes (ausência moderadamente expressiva).

Quanto à qualificação dos livros, podemos observar no Gráfico 17, a seguir.

Gráfico 17: Percentual da qualificação dos oito livros didáticos de matemática do 6º ano do PNLD-2017 referente à quantidade de conteúdos de divisibilidade ausentes



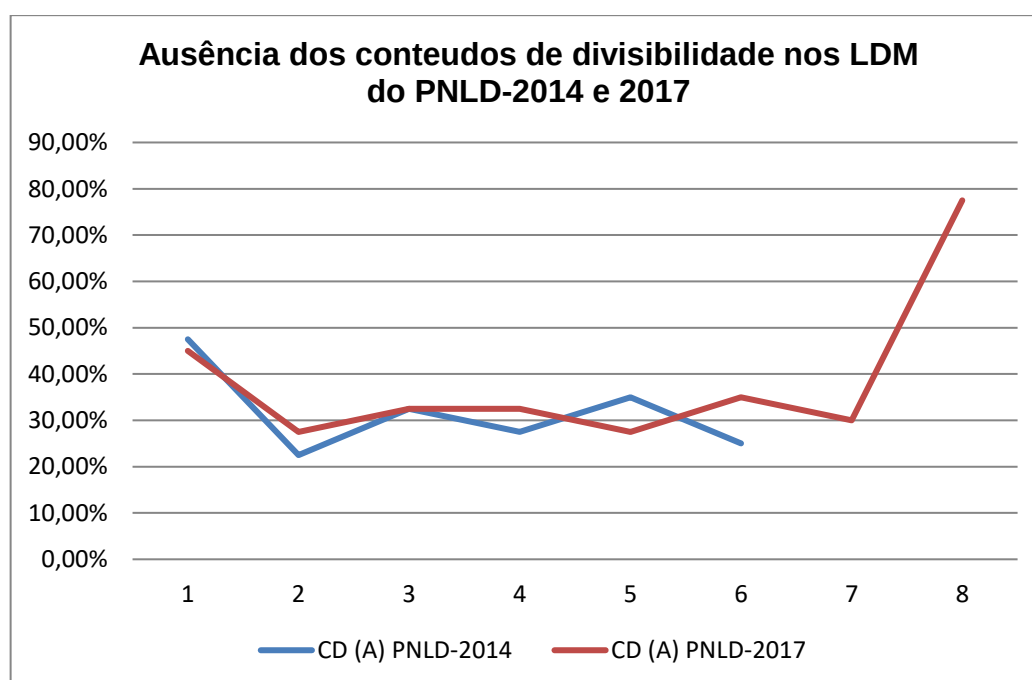
Comparando a quantidade de redução dos conteúdos de divisibilidade constatada pelo resultado da análise dos seis livros didáticos de matemática do PNLD-2014 com a quantidade de redução percebida nos oito livros do PNLD-2017, podemos observar que houve pouca variação na quantidade de conteúdos de divisibilidade ausentes nos livros didáticos de matemática de um PNLD (2014) para outro (2017). Entretanto, pelo menos em dois livros do PNLD-2017 houve redução muito expressiva dos conteúdos de divisibilidade

Reunimos na Tabela 58 e no Gráfico 18, os dados finais (em percentual) dos conteúdos de divisibilidade ausentes, observados nos seis livros de matemática (6º ano) do PNLD-2014, bem como nos oito livros analisados do PNLD-2017, a partir de uma relação de 40 assuntos de divisibilidade que constam nos livros didáticos de matemática antigos, já referenciados e analisados no início do Capítulo 6 (seis).

Tabela 58: Resultado final da análise da ausência dos conteúdos de divisibilidade nos livros didáticos de matemática do 6º ano (PNLD-2014 e PNLD-2017)

Ausência dos conteúdos de divisibilidade nos livros didáticos de matemática – 6º ano (PNLD-2014 e PNLD-2017)				
	PNLD-2014	Conteúdos de divisibilidade ausentes	PNLD-2017	Conteúdos de divisibilidade ausentes
1	LDM-14 (2012)	47,5%	LDM-20 (2015)	45,0%
2	LDM-15 (2012)	22,5%	LDM-21 (2015)	27,5%
3	LDM-16 (2013)	32,5%	LDM-22 (2015)	32,5%
4	LDM-17 (2011)	27,5%	LDM-23 (2016)	32,5%
5	LDM-18 (2012)	35,0%	LDM-24 (2015)	27,5%
6	LDM-19 (2012)	25,0%	LDM-25 (2014)	35,0%
7	--	--	LDM-26 (2015)	30,0%
8	--	--	LDM-27 (2015)	77,5%

Gráfico 18: Resultado final da análise da ausência dos conteúdos de divisibilidade nos livros didáticos de matemática do 6º ano (PNLD-2014 e PNLD-2017)



Considerando os 14 livros didáticos de matemática do 6º ano analisados, conforme a Tabela 58 e o Gráfico 17, constatamos que houve redução moderadamente expressiva dos conteúdos de divisibilidade.

6.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS DA ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA (5ª SÉRIE/6º ANO) SELECIONADOS DO PERÍODO DE 1926 A 2016

Ao final da análise dos 27 livros selecionados no período de 1926 a 2016, tivemos os seguintes resultados, conforme podemos observar nos gráficos e tabelas apresentados nesta seção.

Apresentamos na Tabela 59, a computação geral dos 27 livros didáticos de matemática (5ª série/6º ano) analisados no período de 1926 a 2016.

Tabela 59: Computação geral do resultado da análise dos 27 livros didáticos de matemática da 5ª série/6º ano do período de 1926 a 2016

Resultado final da análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade nos 27 livros didáticos de matemática (5ª série/6º ano) no período de 1926 a 2016.							
LDM	Conteúdos Principais		Conteúdos Secundários		Resultado Final Conteúdos de Divisibilidade		
	CP(P)	CP(A)	CS (P)	CS (A)	Total CD _P (%)	Total CD _A (%)	Conceito
LDM-1 (1926)	07	0	35	05	87,5%	12,5%	Ótimo
LDM-2 (1963)	07	0	37	03	92,5%	7,5%	Ótimo
LDM-3 (1968)	07	0	37	03	92,5%	7,5%	Ótimo
LDM-4 (1970)	07	0	35	05	87,5%	12,5	Bom
LDM-5 (1974)	07	0	31	09	77,5%	22,5%	Bom
LDM-6 (1984)	07	0	30	10	75%	25%	Regular
LDM-7 (1989)	07	0	30	10	75%	25%	Regular
LDM-8 (1991)	07	0	31	09	77,5%	22,5%	Bom
LDM-9 (1995)	07	0	30	10	75%	25%	Regular
LDM-10 (2002)	07	0	33	07	82,5%	17,5%	Bom
LDM-11 (2002)	07	0	21	19	52,5%	47,5	Fraco
LDM-12 (2005)	07	0	27	13	67,5%	32,5%	Regular
LDM-13 (2010)	07	0	29	11	72,5%	27,5%	Regular
LDM-14 (2012)	07	0	21	19	52,5%	47,5%	Fraco
LDM-15 (2012)	07	0	31	09	77,5%	22,5%	Bom
LDM-16 (2013)	07	0	27	13	67,5	32,5	Regular
LDM-17 (2011)	07	0	29	11	72,5%	27,5%	Regular
LDM-18 (2012)	07	0	26	14	65%	35%	Regular
LDM-19 (2012)	07	0	30	10	75%	25%	Regular
LDM-20 (2015)	07	0	22	18	55%	45%	Fraco
LDM-21 (2015)	07	0	29	11	72,5%	27,5%	Regular
LDM-22 (2015)	07	0	27	13	67,5%	32,5%	Regular
LDM-23 (2016)	07	0	27	13	67,5%	32,5%	Regular
LDM-24 (2015)	07	0	29	11	72,5%	27,5%	Regular
LDM-25 (2014)	07	0	26	14	65%	35%	Regular
LDM-26 (2015)	07	0	28	12	70%	30%	Regular
LDM-27 (2015)	04	03	09	31	22,5%	77,5%	Insuficiente

Legenda: CD_P (Conteúdos de divisibilidade presentes); CD_A (Conteúdos de divisibilidade ausentes); CP_P (Conteúdos principais presentes); CP_A (Conteúdos principais ausentes); CS_P (Conteúdos secundários presentes); CS_A (Conteúdos secundários ausentes).

A partir dos dados computados na Tabela 59, elaboramos os Gráficos 19 e 20 que nos proporciona melhor visão sobre a presença e ausência dos conteúdos de divisibilidade, constatadas nos 27 livros didáticos de matemática da 5ª série/6º ano do período de 1926 a 2016.

Gráfico 19: Resultado final da análise da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade nos LDM de 5ª série/6º ano do período de 1926 a 2016

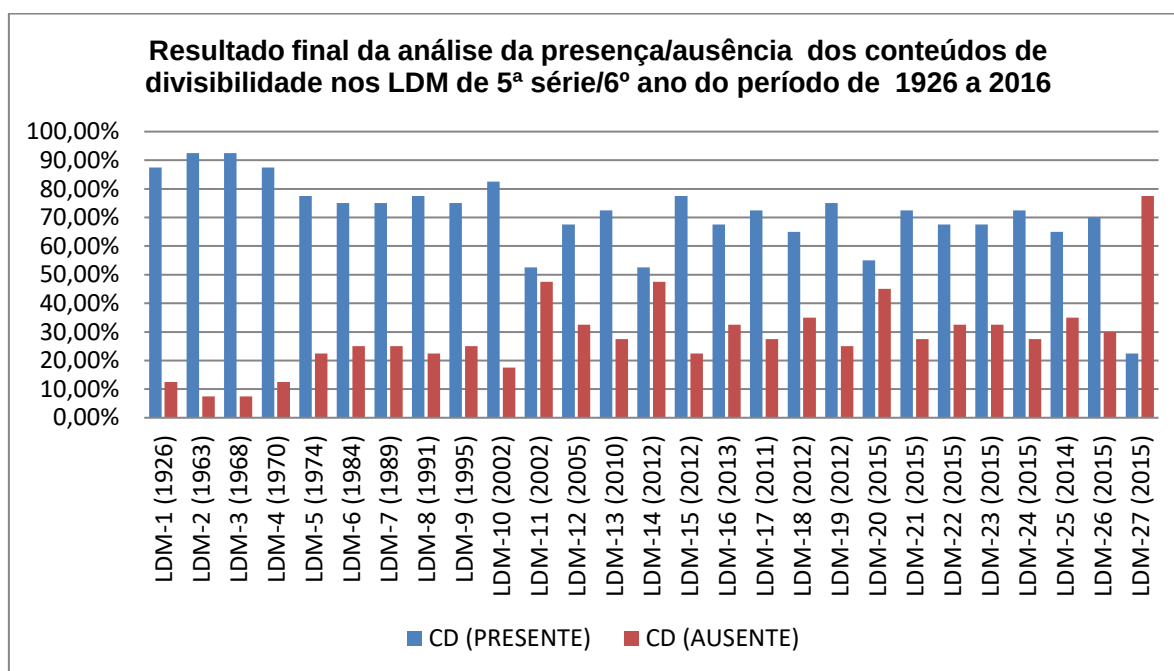
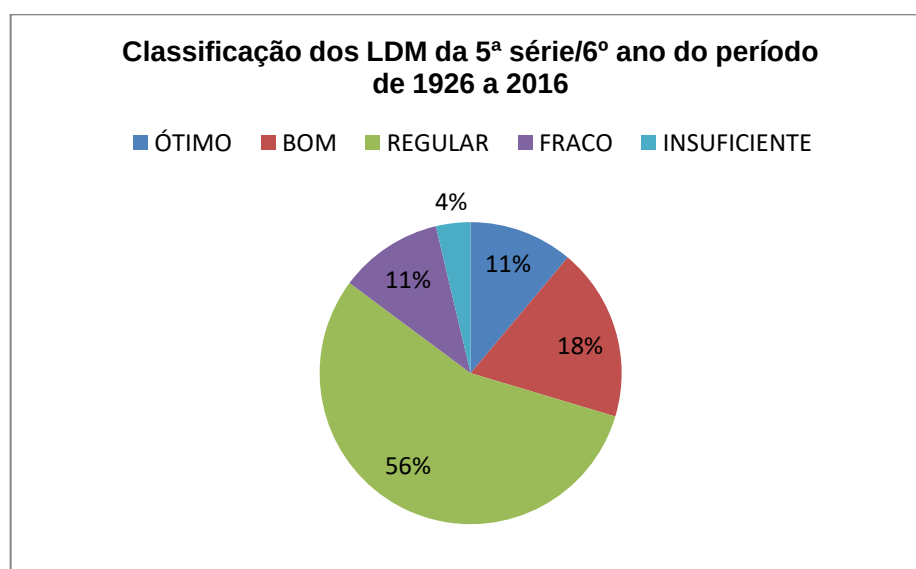


Gráfico 20: Percentual conforme classificação dos 27 livros didáticos de matemática da 5ª série/6º ano do período de 1926 a 2016

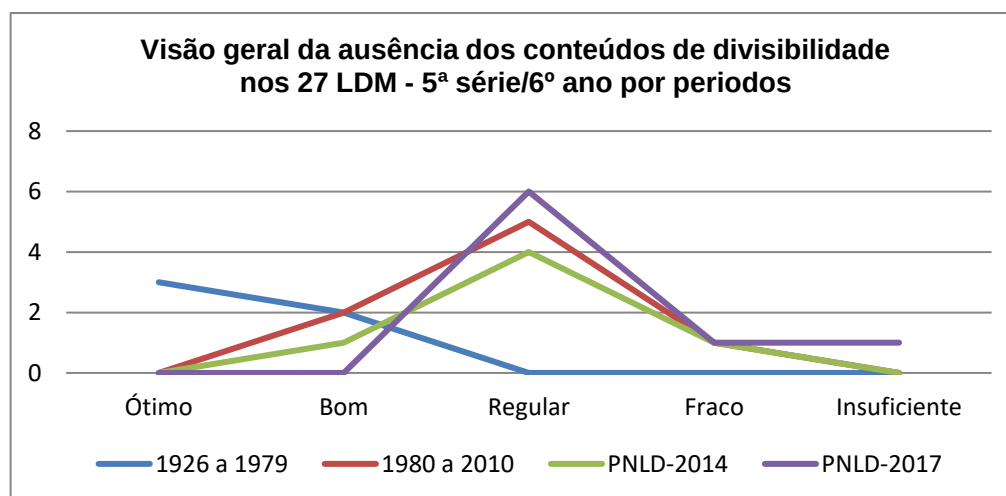


Os livros que receberam conceito ótimo (11%) tiveram ausência inexpressiva dos conteúdos de divisibilidade ausentes, são livros do primeiro período (1926-1970), cuja variação é de um a quatro conteúdos secundários ausentes. Os livros com ausência pouco expressiva (18%), tem variação de cinco a nove conteúdos secundários ausentes. Já os livros em que foram constatadas ausência moderadamente expressiva (56%), tiveram variação de 10 a 14 conteúdos secundários ausentes. Os livros com ausência expressiva (11%) tiveram variação de 15 a 19 conteúdos secundários de divisibilidade ausentes. Apenas em um livro, do PNLD-2017, constatou-se ausência muito expressiva, com 77,5% de conteúdos principais e secundários ausentes.

Para a realização da análise separamos os 27 livros didáticos de matemática da 5ª série/6º ano por períodos que denominamos de Fase 1, Fase 2 e Fase 3. A Fase 1 compreende o período de 1926 a 1979, a Fase 2 foi dividida em duas partes, a Parte 1 compreende o período de 1980 a 2010 e a Parte 2 compreende o PNLD-2014 (triênio de 2014-2015-2016), a Fase 3 compreende o PNLD-2017 (triênio de 2017-2018-2019). Constatamos a presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade e classificamos os livros da seguinte forma: em ótimo (ausência inexpressiva), bom (ausência pouco expressiva), regular (ausência moderadamente expressiva), fraco (ausência expressiva) e insuficiente (ausência muito expressiva), conforme podemos observar na Tabela 60 e no Gráfico 20, a seguir:

Tabela 60: Classificação dos 27 livros didáticos de matemática da 5ª série/6º ano quanto à presença e ausência dos conteúdos de divisibilidade

Resultado final da análise – Percentual da classificação dos 27 livros didáticos de matemática da 5ª série/6º ano								
Conceito	Período de 1926 a 1979		Período de 1980 a 2010		PNLD-2014		PNLD-2017	
Ótimo	3	60%	0	0%	0	0%	0	0%
Bom	2	40%	2	25%	1	16,7%	0	0%
Regular	0	0%	5	62,5%	4	66,6%	6	75%
Fraco	0	0%	1	12,5%	1	16,7%	1	12,5%
Insuficiente	0	0%	0	0%	0	0%	1	12,5%
Total	5	100%	8	100%	6	100%	8	100%

Gráfico 21: Visão geral da ausência dos conteúdos de divisibilidade nos 27 LDM

Conforme a análise realizada nos 27 livros didáticos de matemática da 5ª série/6º ano, no período de 1926 a 1979, a ausência dos conteúdos de divisibilidade observada nos livros é considerada inexpressiva, pois a maioria dos livros analisados (60%) contempla praticamente todos os conteúdos de divisibilidade elencados.

No período de 1979 a 2010, dos oito livros analisados, já não há nenhum livro considerado ótimo, mas já aparece um livro considerado fraco, ou seja, com ausência expressiva de conteúdos de divisibilidade, sendo que na maioria (62,5%), com conceito regular, constatou-se ausência moderadamente expressiva. Nos seis livros analisados do PNLD-2014, o número de livros considerados com ausência pouco expressiva (conceito bom) diminuiu e o percentual de ausência moderadamente expressiva (conceito regular) aumentou (66,6%), sendo constatado apenas um livro com ausência expressiva (conceito fraco) dos conteúdos de divisibilidade.

Para finalizar, nos oito livros didáticos de matemática do 6º ano do PNLD-2017 (triênio de 2017-2018-2019), a maioria dos livros (75%) apresenta ausência moderadamente expressiva dos conteúdos de divisibilidade e, em apenas 12,5% constatou-se ausência expressiva (conceito fraco) e muito expressiva (conceito insuficiente).

Portanto, concluímos que houve redução moderadamente expressiva dos conteúdos de divisibilidade nos livros didáticos analisados ao longo do período (1926 a 2016) em que os livros foram publicados.

A seguir, nas Tabelas de 61 a 65, apresentamos a ordem de como os conteúdos de divisibilidade foram distribuídos nos capítulos e unidades dos livros

didáticos de matemática. Para tanto, sugerimos uma ordem (primeira coluna) que nos parece satisfatória, considerando os conhecimentos prévios necessários ao estudo de cada tema de divisibilidade.

A ordem apresentada na primeira coluna servirá como referencial, para a análise da ordem apresentada em cada um dos 27 livros didáticos de matemática da 5ª série/6º ano analisados, por períodos. Decidimos colorir as células das tabelas para tornar mais fácil a percepção da ordem em cada LDM.

Tabela 61: Ordenação dos conteúdos de divisibilidade nos cinco livros didáticos de matemática da 5ª série do período de 1926 a 1979

CP-M	Ordem	LDM 1	LDM 2	LDM 3	LDM 4	LDM 5
CP-1 MT	1º	CP-1	CP-1	CP-1	CP-1	CP-1
CP-2 DV	2º	CP-2	CP-3	CP-3	CP-2	CP-2
CP-3 CTD	3º	CP-3	CP-4	CP-4	CP-3	CP-4
CP-4 NP	4º	CP-6	CP-5	CP-5	CP-4	CP-5
CP-5 DFP	5º	CP-7	CP-2	CP-2	CP-5	CP-3
CP-6 MDC	6º	CP-4	CP-6	CP-6	CP-6	CP-6
CP-7 MMC	7º	CP-5	CP-7	CP-7	CP-7	CP-7

Legenda: CP-M (Modelo da ordem dos conteúdos principais de divisibilidade); MT (Múltiplos); DV (Divisores); CTD (Critérios de divisibilidade); NP (Números primos); DFP (Decomposição em fatores primos); MDC (Máximo divisor comum); MMC (Mínimo múltiplo comum).

Conforme podemos observar na Tabela 61, os cinco livros não seguem uma mesma ordem na distribuição dos conteúdos de divisibilidade, mas todos os cinco começam por múltiplos; já para a finalização, a maioria opta pela ordem de terminar com o mdc e mmc. Somente um livro (LDM-4) apresenta a ordem sugerida na primeira coluna.

Tabela 62: Ordenação dos conteúdos de divisibilidade nos oito livros didáticos de matemática da 5ª série/6º ano do período de 1980 a 2010

CP-M	Ordem	LDM 6	LDM 7	LDM 8	LDM 9	LDM 10	LDM 11	LDM 12	LDM 13
CP-1 MT	1º	CP-1	CP-1	CP-3	CP-1	CP-2	CP-1	CP-3	CP-3
CP-2 DV	2º	CP-2	CP-2	CP-4	CP-2	CP-3	CP-3	CP-2	CP-2
CP-3 CTD	3º	CP-3	CP-3	CP-5	CP-3	CP-4	CP-4	CP-4	CP-4
CP-4 NP	4º	CP-4	CP-4	CP-2	CP-4	CP-5	CP-5	CP-5	CP-5

Tabela 63: Continuação

CP-M	Ordem	LDM 6	LDM 7	LDM 8	LDM 9	LDM 10	LDM 11	LDM 12	LDM 13
CP-5 DFP	5º	CP-5	CP-5	CP-6	CP-5	CP-1	CP-7	CP-6	CP-6
CP-6 MDC	6º	CP-6	CP-6	CP-1	CP-6	CP-7	CP-2	CP-1	CP-1
CP-7 MMC	7º	CP-7	CP-7	CP-7	CP-7	CP-6	CP-6	CP-7	CP-7

Legenda: CP-M (Modelo da ordem dos conteúdos principais de divisibilidade); MT (Múltiplos); DV (Divisores); CTD (Critérios de divisibilidade); NP (Números primos); DFP (Decomposição em fatores primos); MDC (Máximo divisor comum); MMC (Mínimo múltiplo comum).

Como podemos observar na Tabela 62, acima, dos oito livros analisados, apenas três livros (LDM-6, 7 e 9) apresentam a mesma ordem sugerida na primeira coluna, os demais livros apresentam ordens variadas. Os dois últimos livros, LDM-12 e 13 apresentam a mesma ordem, pois são do mesmo autor, mas iniciam o assunto com os critérios de divisibilidade seguido dos divisores e finalizam com múltiplos e mmc. Já o LDM-11, finaliza os conteúdos de divisibilidade com divisores e mdc.

Observamos que 50% dos livros analisados (LDM-6, 7, 9 e 11) deste período, iniciam o assunto de divisibilidade com os múltiplos e apenas um dos livros (LDM-10) inicia com divisores. Da ordem sugerida, somente dois livros (LDM-10 e 11) finalizam o assunto de divisores de maneira diferente da ordem sugerida na primeira coluna.

Tabela 64: Ordenação dos conteúdos de divisibilidade nos seis livros didáticos de matemática do 6º ano do PNLD-2014 (Triênio de 2014-2015-2016)

CP-M	Ordem	LDM 14	LDM 15	LDM 16	LDM 17	LDM 18	LDM 19
CP-1 MT	1º	CP-1	CP-1	CP-3	CP-1	CP-3	CP-1
CP-2 DV	2º	CP-2	CP-7	CP-2	CP-2	CP-4	CP-3
CP-3 CTD	3º	CP-3	CP-2	CP-4	CP-3	CP-5	CP-4
CP-4 NP	4º	CP-4	CP-3	CP-5	CP-4	CP-1	CP-5
CP-5 DFP	5º	CP-5	CP-6	CP-6	CP-5	CP-7	CP-2
CP-6 MDC	6º	CP-7	CP-4	CP-1	CP-6	CP-2	CP-6
CP-7 MMC	7º	CP-6	CP-5	CP-7	CP-7	CP-6	CP-7

Legenda: CP-M (Modelo da ordem dos conteúdos principais de divisibilidade); MT (Múltiplos); DV (Divisores); CTD (Critérios de divisibilidade); NP (Números primos); DFP (Decomposição em fatores primos); MDC (Máximo divisor comum); MMC (Mínimo múltiplo comum).

Observamos que os seis livros didáticos de matemática do 6º ano do PNLD-2014 (Tabela 63) também apresentam variação na ordem de distribuição dos conteúdos de divisibilidade. A maioria dos livros (66,7%) inicia os conteúdos de divisibilidade com múltiplos e somente dois livros iniciam com critérios de divisibilidade. De acordo com a sugestão para a ordem de distribuição dos conteúdos de divisibilidade na primeira coluna, somente um livro (LDM-17) contempla esta organização e 50% dos livros finaliza os conteúdos de divisibilidade com o mínimo múltiplo comum.

Tabela 65: Ordenação dos conteúdos de divisibilidade nos oito livros didáticos de matemática do 6º ano do PNLD-2017 (triênio de 2017-2018-2019)

CP-M	Ordem	LDM 20	LDM 21	LDM 22	LDM 23	LDM 24	LDM 25	LDM 26	LDM 27
CP-1 MT	1º	CP-1	CP-1	CP-1	CP-1	CP-1	CP-3	CP-1	CP-1
CP-2 DV	2º	CP-2	CP-7	CP-2	CP-2	CP-2	CP-1	CP-7	CP-7
CP-3 CTD	3º	CP-3	CP-2	CP-3	CP-3	CP-3	CP-2	CP-2	CP-2
CP-4 NP	4º	CP-4	CP-3	CP-4	CP-4	CP-4	CP-4	CP-6	CP-6
CP-5 DFP	5º	CP-5	CP-6	CP-5	CP-5	CP-5	CP-5	CP-3	--
CP-6 MDC	6º	CP-7	CP-4	CP-6	CP-6	CP-6	CP-6	CP-4	--
CP-7 MMC	7º	CP-6	CP-5	CP-7	CP-7	CP-7	CP-7	CP-5	--

Legenda: CP-M (Modelo da ordem dos conteúdos principais de divisibilidade); MT (Múltiplos); DV (Divisores); CTD (Critérios de divisibilidade); NP (Números primos); DFP (Decomposição em fatores primos); MDC (Máximo divisor comum); MMC (Mínimo múltiplo comum).

Podemos observar na Tabela 64, acima, que os oito livros didáticos de matemática do 6º ano do PNLD-2017, também apresentam variação na ordem de distribuição dos conteúdos de divisibilidade. Observamos que 37,5% dos livros (LDM-22, 23 e 24) seguem a mesma ordem sugerida na primeira coluna e o LDM-20 difere apenas nas 6ª e 7ª posições. Apenas um livro não inicia os conteúdos de divisibilidade com múltiplos e, sim com critérios de divisibilidade (LDM-25); entretanto, 50% finalizam os conteúdos de divisibilidade com o mínimo múltiplo comum, de acordo com a sugestão da primeira coluna.

Como conclusão sobre a ordem de distribuição dos conteúdos de divisibilidade nos capítulos ou unidades nos 27 livros didáticos de matemática da 5ª série/6º ano, constatamos que 33% apresentam a ordem sugerida pela autora (como

referencial de análise), os 67% seguem ordem variadas. Da ordem sugerida, 74% dos livros iniciam os conteúdos de divisibilidade com múltiplos e 63% finalizam com o mínimo múltiplo comum.

Alguns livros juntam dois conteúdos em sequências, tais como múltiplos e mínimo múltiplo comum e, divisores e máximo divisor comum, mas apenas 4% se utilizaram dessa sequência. A maioria (96%) apresenta os conteúdos de Números primos e Decomposição em fatores primos juntos, nessa ordem, somente o LDM-27 não apresenta esses conteúdos principais de divisibilidade. Outra ordem observada, que a maioria (67%) dos livros apresenta é a sequência dos seguintes conteúdos: Critérios de divisibilidade, Números primos e Decomposição em fatores primos.

Consideramos que o professor deve refletir sobre a ordem em que vai trabalhar os objetos de conhecimento matemático importante, dessa forma, não pode ser diferente com os conteúdos de divisibilidade, visto que um dos objetivos pedagógicos é facilitar a compreensão dos conceitos matemáticos, fazer com que os alunos percebam que a Matemática não é difícil desde que a aprendizagem seja significativa.

Observamos que os 27 livros didáticos de matemática analisados diferem também quanto à denominação dos capítulos e unidades que contemplam os conteúdos de divisibilidade. Encontramos os seguintes tipos de títulos: (1). Divisibilidade (33%); (2). Divisibilidade no Conjunto N (4%); (3). Divisores naturais de um número (4%); (4). Divisores e múltiplos (4%); (5). Divisores e múltiplos de números naturais (11%); (6). Múltiplos de um número natural (11%); (7). Múltiplos e divisores (33%).

Como podemos perceber os títulos são bem diversificados e apenas 33% dos livros apresentam o título de “Divisibilidade”, outros 33% dos livros didáticos de matemática do 6º ano apresentam o título de “múltiplos e divisores”.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao iniciar nossa pesquisa pensamos em entender como se processou o Ensino de Matemática em nosso país e perceber como aconteceram as mudanças nos Programas de Ensino de Matemática para a Educação Básica neste percurso, até chegar ao que vivenciamos atualmente, visto que os livros didáticos de matemática manifestam certas tendências metodológicas dos vários programas e movimentos, tais como o Movimento da Matemática Moderna. Para isso, buscamos informações na história da Matemática e da Educação Matemática através de teóricos como Miorim, Valente e Fiorentini.

Ao estabelecer como objetivo desta pesquisa: analisar a presença dos conteúdos de *divisibilidade (múltiplos e divisores dos números naturais, critérios de divisibilidade, números primos e números compostos, decomposição em fatores primos, máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum)* nos livros didáticos de matemática do 6º ano e nos documentos curriculares do ensino fundamental dos anos finais, buscamos constatar se houve redução expressiva desses conteúdos nos livros analisados.

A ideia inicial era a de pesquisar apenas nos livros didáticos de matemática do 6º ano que os alunos estavam utilizando na capital do estado de Roraima. Contudo, esses livros são os mesmos que são distribuídos para todas as escolas brasileiras, então, passamos a fazer a pesquisa não mais no contexto regional, mas, sim, nacional. Então, procuramos saber quais foram os livros mais escolhidos pelos professores nos dois últimos PNLD (2014 e 2017) e, também, se esses livros coincidiam com os mais escolhidos pelos professores do Estado de Roraima.

Para que houvesse maior validação da pesquisa, decidimos analisar alguns livros de épocas anteriores, pois, para verificar se havia redução dos conteúdos de divisibilidade nos livros atuais, deveria haver um referencial. Ou seja, livros que pudessem contemplar ao máximo os temas que dizem respeito aos conteúdos de divisibilidade, ou documentos oficiais e programas oficiais de Ensino de Matemática

com sugestões sobre os assuntos que deveriam ser abordados pelos professores da Educação Básica. Após análise da Fase 1, escolhemos o livro de Osvaldo Sangiorgi (1963) para servir de referencial para os demais livros selecionados.

Ao reconfigurar nossa pesquisa para acrescentar os documentos oficiais, programas ou referenciais curriculares, passamos a procurar os documentos curriculares por regiões e, assim, conseguimos encontrar seis referenciais curriculares dos seguintes estados: Minas Gerais, Paraná, Pernambuco, Rio de Janeiro, Roraima e São Paulo.

Sabe-se que a BNCC-2017 é um documento oficial que serve de parâmetro para a construção dos currículos das escolas e redes do Ensino Fundamental de nosso país. Assim, todos os estados brasileiros irão se fundamentar neste documento para a elaboração dos seus referenciais curriculares de modo que as escolas públicas possam também elaborar seus projetos pedagógicos de acordo com a nova normatização.

Entretanto, desses seis documentos analisados, apenas dois deles estão atualizados com base na BNCC-2017, são os documentos dos Estados de Minas Gerais e de Roraima. Além disso, constatamos que apenas um dos documentos, o de Minas Gerais, contempla todos os conteúdos principais de divisibilidade como orientação para ser trabalhado em sala de aula do 6º ano. Quanto aos demais, dois desses documentos curriculares, o do Estado do Rio de Janeiro e o de Roraima, contemplam 71,4% dos conteúdos de divisibilidade para o 6º ano. Outros dois documentos curriculares, o do Estado do Paraná e o do Estado do Pernambuco, contemplam apenas 57% dos conteúdos de divisibilidade para o 6º ano e, apenas, o documento de São Paulo contempla abaixo de 50%, ou seja, 43% dos conteúdos de divisibilidade para o 6º ano.

Desse modo, o resultado final da análise dos documentos curriculares dos seis estados brasileiros, nos mostra que há uma redução expressiva dos conteúdos principais de divisibilidade para o 6º ano, o que poderá influenciar de forma não satisfatória a aprendizagem dos conhecimentos matemáticos pelos alunos neste período escolar.

Para observar como as orientações curriculares são previstas para serem trabalhadas pelos professores de matemática em sala de aula, analisamos três planos de ensino anuais de escolas estaduais da cidade de Boa Vista (RR), a partir dos quais

constamos que em pelo menos um deles há ausência expressiva dos conteúdos de divisibilidade.

Tendo em vista que o Plano de Ensino sinaliza uma previsão, um direcionamento, cabendo ao professor a escolha para complementar ou reduzir os conteúdos, de acordo com as situações encontradas na realidade escolar, em sala de aula, almejamos chamar a atenção dos professores responsáveis pela elaboração dos Planos de Ensino semestrais e anuais para refletirem sobre a escolha dos conteúdos matemáticos, para que não deixem de relacionar todos os conteúdos relevantes nos planos de ensino.

Quanto aos livros didáticos de matemática, neste estudo analisamos 27 livros didáticos de matemática da 5ª série ou série equivalente e 6º ano (denominação atual) por períodos identificados por fases. Após a análise dos livros, no capítulo 6, em cada fase, apresentamos as considerações sobre o resultado obtido através de tabelas com os dados e gráficos, de modo que aqui nos posicionaremos com a conclusão final, de modo geral.

Na Fase 1, que abrange o período de 1926 a 1979, procuramos selecionar livros de professores que foram relevantes para o Ensino da Matemática. Desse modo, analisamos um livro da segunda década do século XX, de Euclides Medeiros Guimarães Roxo (1926), que apresenta os conhecimentos matemáticos de acordo com a abordagem formalista e dedutiva, cuja escrita traduz a linguagem culta e formal da época. Este livro apresenta 88% dos conteúdos de divisibilidade.

Os dois livros da década de 60, de Osvaldo Sangiorgi (1963, 1968), apresentam uma escrita de acordo com os tempos modernos e os conhecimentos matemáticos de acordo com a proposta de ensino do Movimento da Matemática Moderna, o que, ainda, é percebido nos livros da década de 80. Esses livros contemplam de 88% a 93% dos conteúdos de divisibilidade, sendo classificados com o conceito ótimo, pois a ausência dos conteúdos secundários é inexpressiva. Os outros dois livros deste período contemplam de 78% a 87% dos conteúdos de divisibilidade, sendo classificados como bons, visto que a ausência desses conteúdos é pouco expressiva.

O resultado da análise da Fase 2, que compreende o período de 1980 a 2010, em comparação com os livros da Fase 1, percebemos que já houve alguma redução dos conteúdos de divisibilidade, pois nenhum livro desta fase apresentou conceito ótimo. Dos oito livros analisados, constatamos ausência pouco expressiva em dois

livros e, em cinco livros, ausência moderadamente expressiva, sendo que somente em um livro constatamos ausência expressiva dos conteúdos de divisibilidade.

Observamos uma grande mudança na abordagem metodológica dos livros de matemática da década de 80 para os do final da década de 90, pois até então os livros iniciavam com a apresentação dos conteúdos matemáticos através de definições e exemplos e, logo após, apresentavam as regras e algoritmos para o aprofundamento dos cálculos. Quanto aos conteúdos de divisibilidade, as situações-problema só apareciam com os conteúdos de máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum, mas somente nos exercícios.

A partir da década de 90, os livros passaram por uma grande mudança no formato, visto que os livros da época anterior tinham um formato mais compacto, ou seja, com dimensões 19,5 por 14 cm e também 21 por 14 cm. Além disso, não eram coloridos e quase não tinham ilustrações. Outra diferença encontrada é que a partir da década de 90 os livros passaram a apresentar os conteúdos de acordo com as novas tendências curriculares, a partir das sugestões e orientações didático-pedagógicas propostas pelas Diretrizes Curriculares Nacionais e pelos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCNM) e, desse modo, mudaram bastante, em todos os aspectos.

As mudanças curriculares propostas pelas Diretrizes Nacionais e referendadas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais e os Parâmetros Curriculares nacionais de Matemática (1998) enfatizam que já não se podia mais aceitar o ensino tradicional que se traduzia numa aprendizagem mecânica e sem significado.

Com relação à influência do Movimento da Matemática Moderna no ensino da Matemática no Brasil e na elaboração de materiais didáticos, tais como os livros didáticos de Matemática, os PCNM se posicionam de forma crítica ao enfatizar que o ensino de matemática passou a ter preocupações excessivas com formalizações, distanciando-se das questões práticas, sendo que a linguagem da teoria dos conjuntos, por exemplo, enfatizava o ensino de símbolos e de uma terminologia complexa comprometendo o aprendizado do cálculo aritmético, da Geometria e das medidas (BRASIL, 1998).

Além disso, os PCNM também criticam a formação de professores quando colocam, como introdução aos PCNM (1998, p. 21) que entre os obstáculos que o Brasil tem enfrentado em relação ao ensino de Matemática, aponta-se a falta de uma formação profissional qualificada, as restrições ligadas às condições de trabalho, a

ausência de políticas educacionais efetivas e as interpretações equivocadas de concepções pedagógicas.

Como na época já havia uma grande preocupação com a aprendizagem insatisfatória de Matemática dos alunos da educação básica e, apesar de inúmeras iniciativas de novas abordagens no ensino de matemática, principalmente, a partir da formação continuada de novos mestres e doutores da área da Educação Matemática, os PCNM (1998) se posicionam da seguinte forma: “no entanto, essas iniciativas ainda não atingiram o conjunto dos professores e por isto não chegam a alterar o quadro desfavorável que caracteriza o ensino de Matemática no Brasil” (BRASIL, 1998, p. 21).

Além disso, segundo os PCNM (1998, p. 21) foi constatado que a interpretação equivocada de concepções pedagógicas também tem sido responsável por distorções na implementação das ideias inovadoras que aparecem em diferentes propostas.

É evidente que desde a publicação dos PCNM até o presente momento, muito já se fez em prol da formação inicial e continuada de professores da Educação Básica. Atualmente, o Brasil conta com vários Programas de Pós-Graduação de alto nível nas áreas da Educação e de Ensino e, inclusive de Educação Matemática, qualificando cada vez mais professores tanto para a formação dos futuros professores quanto dos professores que atuam na Educação Básica e, isto poderá mudar os rumos da educação em nosso país.

Esse quadro apresentado pelos PCNM (1998) e mais um conjunto de justificativas deram início a uma série de documentos oficiais que se consolidaram nas reformas propostas para o ensino da Matemática (BNCC, 2017). Além disso, as discussões no âmbito da Educação Matemática que aconteceram no Brasil e em outros países apontaram para a necessidade de adequar o trabalho escolar a uma nova realidade, marcada pela crescente presença da Matemática em diversos campos da atividade humana (BRASIL, 1998).

Então, a partir do final da década de 90 e início do Século XXI, a Educação Básica brasileira passou a se moldar em novo formato, o que influenciou também o Ensino de Matemática e a elaboração dos novos livros didáticos. Trazemos dois pontos relevantes apresentados pelos PCNM (1998) que, de fato influenciaram a mudança no ensino de Matemática e na elaboração dos livros didáticos a partir desta época.

O primeiro ponto foi sobre o uso da abordagem metodológica de resolução de problema, visto que a abordagem de conceitos, ideias e métodos sob a perspectiva de resolução de problemas, ainda era bastante desconhecida da grande maioria dos professores e quando incorporada, aparecia como um item isolado, desenvolvido paralelamente como aplicação da aprendizagem, a partir de listagens de problemas cuja resolução dependia basicamente da escolha de técnicas ou formas de resolução memorizadas pelos alunos.

O outro ponto refere-se à organização dos conteúdos matemáticos tanto nos livros didáticos como no planejamento do professor, visto que de modo geral observa-se uma forma excessivamente hierarquizada de fazê-la, ou seja, é uma organização dominada pela ideia de pré-requisito, cujo único critério é a estrutura lógica da Matemática (BRASIL, 1998).

Desse modo, as orientações para a organização dos conteúdos matemáticos não poderiam mais seguir a forma como vinham sendo trabalhados pelos professores de Matemática. Para os PCNM (1998), “[...] *por vezes, essa concepção linear faz com que, ao se definir qual será o elo inicial da cadeia, tomem-se os chamados fundamentos como ponto de partida, [...] caminhos que não são necessariamente os mais adequados*” (BRASIL, 1998, p. 22).

Essa visão sobre como se processava o ensino de matemática são justificativas para as reformas apresentadas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (1998), as quais propiciaram as reformulações dos livros didáticos de matemática para o novo século, a fim de que houvesse uma melhora na aprendizagem de Matemática dos alunos da Educação Básica brasileira.

Na análise dos 27 livros didáticos de Matemática observamos que as orientações dos PCNM foram seguidas e mostramos que os conteúdos de divisibilidade foram organizados de maneira bastante diversificada.

Assim, os livros do século XXI já estavam apresentando um novo formato gráfico e adotavam abordagens metodológicas e pedagógicas de acordo com as novas propostas apresentada nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática e adotadas pelo Programa Nacional do Livro Didático que também passou por transformações. Além disso, no início, a partir de 2002, o PNLD deixou de fazer a seleção por livros e passou a fazer por coleções (para todos os anos), apresentou também novos critérios de avaliação das coleções e passou a apresentar aos

professores as resenhas de todos os livros didáticos selecionados para o programa para facilitar a escolha dos livros pelos professores.

O Guia do livro didático (2002), em seu novo formato apresentou as novas modificações e trouxe a preocupação da importância que o livro didático tinha para a comunidade escolar, pois o livro didático se converteu numa das poucas formas de documentação e consulta empregadas por professores e alunos, tornando-se um dos principais fatores que influenciavam o trabalho pedagógico, determinando sua finalidade, definindo currículo, cristalizando abordagens metodológicas e quadros conceituais, organizando, enfim, o cotidiano da sala de aula (GUIA-PNLD, 2002).

Para a distribuição dos livros didáticos no Século XXI o Programa Nacional do Livro Didático preocupado em reverter este quadro, atendeu às novas orientações curriculares e sugestões de educadores matemáticos. Além disso, com os novos critérios de avaliação dos livros didáticos do PNLD, privilegia-se um livro didático diversificado e flexível, sensível às diversas formas de organização escolar e dos projetos pedagógicos, bem como as diferentes expectativas e interesses sociais e regionais. Desse modo, o livro didático passa a ser entendido como instrumento auxiliar e não mais a principal ou única referência da prática pedagógica (PNLD, 2002, p. 10).

Com isso, a nova proposta para a elaboração dos livros didáticos fez com que o livro didático de matemática se tornasse bastante atrativo para o aluno, pois passou a apresentar mais ilustrações, fotografias cada vez maiores, mais elaboradas e coloridas, histórias em quadrinhos, situações-problema ilustradas com temas atuais, o que teve como consequência a redução dos conteúdos matemáticos de modo geral.

A partir das novas abordagens curriculares, os livros didáticos de matemática passaram a introduzir os conteúdos mediante situações-problema ilustradas, com mais problemas contextualizados da realidade cotidiana dos alunos do que apenas os exercícios de aplicação dos algoritmos.

Da época de 2002 à época do PNLD-2014, observa-se nos livros didáticos de matemática a introdução de novas seções, tais como: textos contemplando aspectos da história da matemática, contextos de outros campos matemáticos e das ciências, desafios, jogos e tratamento da informação de contextos diversos através de tabelas e gráficos. Apresentam uma configuração de apresentação dos conteúdos bastante diversificada e, cada unidade ou capítulo são apresentados através de situações-

problema contextualizadas a partir do dia a dia dos alunos, complementadas com fotografias e ilustrações sobre os temas abordados.

O resultado da análise dos 14 livros que foram distribuídos pelo PNLD-2014 e 2017 para todo o território brasileiro nos mostrou que houve redução dos conteúdos de divisibilidade considerada ausência moderadamente expressiva, com relação aos assuntos que já foram contemplados em livros didáticos em épocas anteriores.

Entretanto, constatamos que essas ausências foram influenciadas pelas orientações curriculares, tanto dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (1998), quanto da Base Nacional Comum Curricular (2017), de acordo com as novas tendências do ensino de Matemática.

Como resultado dessas novas tendências nos livros didáticos de matemática, observamos que alguns livros deixaram de apresentar as definições explícitas dos conteúdos matemáticos. Em substituição, possibilitam ao aluno deduzir os conceitos do objeto de conhecimento matemático a partir da resolução das situações-problema.

Segundo Pais (2001, p. 56) aprender o significado de um conceito não é permanecer na exterioridade de uma definição, pois a sua complexidade não pode ser reduzida ao estrito espaço de uma mensagem linguística.

A nova abordagem pedagógica e metodológica para a elaboração dos livros didáticos proposta pelo Programa Nacional do Livro Didático, que serão distribuídos nas escolas públicas brasileiras, faz com que o livro seja mais atrativo para o aluno, principalmente em termos visuais, mas nos questionamos se tal modificação tornou os conteúdos matemáticos mais compreensíveis para os alunos.

Consideramos também uma problemática que frequentemente se faz presente no ensino, quanto às competências e habilidades dos professores recém-formados de matemática, que muitas vezes, têm no livro didático de matemática seu único recurso de consulta para planejar e executar suas aulas. O professor poderá encontrar uma lacuna muito grande com relação à teoria, pois os livros atuais cada vez mais têm suas páginas ocupadas com fotografias e outros tipos de ilustrações grandes e, dessa forma, os conteúdos matemáticos vão ficando mais reduzidos.

É evidente que as atuais orientações metodológicas para o ensino de Matemática priorizam a abordagem de resolução de problema, cuja orientação está nos documentos oficiais desde os Parâmetros Curriculares de Matemática (1998) até a BNCC (2017), sendo um dos objetivos gerais e também específico do ensino da Matemática para a educação básica.

De acordo com o ponto de vista hoje corrente entre os educadores matemáticos, essa escolha metodológica favorece a aprendizagem com compreensão, motiva os alunos para a pesquisa, para o desenvolvimento de sua criatividade e autonomia cognitiva.

Contudo, quando se é orientado pelos documentos curriculares a deixar de trabalhar algoritmos que vão possibilitar a determinação do mdc e mmc, por exemplo, podemos pensar que estaremos negando aos alunos a oportunidade de conhecer e trabalhar com cálculos facilitadores e, também, de conhecer a história da Matemática, visto que alguns algoritmos como o da determinação de todos os divisores de um número e do mdc de dois números pelo método de Euclides, e o método do Crivo de Eratóstenes para o reconhecimento dos números primos, têm origem na época da Matemática grega antiga.

Entendemos que com o passar do tempo, o conhecimento matemático poderá perder seu status, pois assim como o saber científico passa, ao longo da história, por profundas transformações, o saber escolar também passa por essas transformações como decorrência do desenvolvimento social e cultural de uma comunidade. Como bem menciona Chevallard (1991, p. 30), os objetos de ensino são vítimas do tempo didático, estão submetidos a uma erosão e a um desgaste biológico e moral. O biológico se refere a um afastamento eventual das normas do saber sábio e o moral a uma proximidade perigosa em relação ao saber banalizado, isto é, de domínio público.

Para Chevallard (1991), o saber sofre um desgaste através do tempo, o que pode ocorrer pela necessidade de melhorias no ensino, como no caso que observamos nas propostas curriculares que consideraram que o ensino “tradicional” anterior à década de 90 não servia mais às necessidades de desenvolvimento da sociedade e dos sistemas educacionais. A esse desgaste, Chevallard chama de obsolescência interna ou relativa, pois é um fenômeno que pode se dar dentro de um sistema de ensino, assim como a obsolescência externa ou absoluta, refere-se à sociedade em geral. Como podemos perceber atualmente que vários sistemas de ensino serão transformados a partir das novas normatizações propostas pela BNCC.

Entendemos que as novas tendências de ensinam priorizam conteúdos que possam ser mais úteis nos tempos atuais, devido ao desenvolvimento tecnológico pelo qual toda a sociedade planetária está vivenciando. Entretanto, passamos a refletir se as novas tendências apresentadas nos livros didáticos de matemática realmente

influenciam positivamente a aprendizagem dos conhecimentos matemáticos dos alunos, já que as avaliações nacionais mostram que não houve melhora no desempenho dos alunos do Ensino Fundamental dos Anos Finais e também do Ensino Médio.

Sabemos, entretanto que as variáveis que interferem na aprendizagem dos alunos são muitas e de grande complexidade. Não envolvem somente professores, alunos e materiais didáticos como os livros didáticos.

O ensino da Matemática escolar ao longo do século XX passou por várias reformas. Frente a isso, uma das preocupações dos pesquisadores educacionais dizia respeito tanto à formação dos professores de matemática para o ensino na educação básica quanto à aprendizagem da Matemática pelos seus alunos. E, apesar de todo o esforço dedicado à melhoria do ensino da Matemática, ainda hoje observamos o descompasso existente entre a formação superior e o ensino ministrado nas escolas públicas da educação básica.

Contudo esta situação está mudando bastante no século XXI, no cenário educacional brasileiro devido à formação continuada dos professores de Matemática nos cursos de Pós-graduação de Mestrados e Doutorados em Educação, em Educação Matemática e em Educação e Educação em Ciências e Matemática (REAMEC).

Em decorrência dos estudos de professores pesquisadores, preocupados em melhorar o ensino de Matemática na Educação Básica, observa-se a atuação desses professores, nas universidades brasileiras, nas reformas dos Projetos Pedagógicos dos Cursos (PPC) de Licenciatura em Matemática, incluindo disciplinas que tratam da didática da Matemática, Metodologia do Ensino de Matemática, Educação Matemática e Etnomatemática. E, ainda, preocupados com a transposição didática do conhecimento apreendido nos cursos de formação inicial para a prática docente, do ensino na disciplina de Matemática da Educação Básica, incluem disciplinas com conteúdos que são trabalhados tanto no Ensino Fundamental dos anos Finais como do Ensino Médio, embora ainda existam muitas universidades mantendo os cursos de Licenciatura em Matemática da forma tradicional com a maioria das disciplinas voltadas apenas para o ensino superior, cujos conhecimentos matemáticos jamais serão aplicados à Educação Básica.

As várias tendências atuais de abordagens metodológicas tais como: Resolução de problema; Modelagem Matemática; Etnomatemática; História da

Matemática; Jogos Matemáticos e uso das tecnologias de informação e comunicação, para muitos teóricos da educação Matemática aproximam o estudante da disciplina de Matemática, motivando-o a desenvolver a investigação e a exploração de novos conceitos.

Este estudo nos proporcionou ampliar conhecimentos a respeito do desenvolvimento histórico do Ensino de Matemática no Brasil, suas reformas, programas curriculares e as novas tendências e abordagens metodológicas, bem como as orientações trazidas pela Base Nacional Curricular Comum para o Ensino Fundamental dos Anos Finais.

Consideramos que esse conhecimento adquirido com a pesquisa é muito relevante para a nossa prática docente na formação dos futuros professores de Matemática da Educação Básica.

O Percurso deste estudo desde seu início até a finalização da tese nos proporcionou muitas reflexões, dentre as quais se incluem a própria formação continuada que é o doutoramento. E, apesar de todo sacrifício, de horas de estudos, leituras, abstrações e pausas (rupturas) tanto na vida pessoal como com a própria pesquisa, nos conduzem, sem dúvida a ampliar nosso campo de visão em todos os aspectos, educacional e cultural. Jamais voltaremos a ser como antes de adentrar o doutorado.

A nossa tese se confirmou ao constatarmos uma redução expressiva dos conteúdos principais de divisibilidade nos programas curriculares dos estados brasileiros para o 6º ano e moderadamente expressiva nos livros didáticos de matemática do 6º ano do Ensino Fundamental dos Anos Finais.

Entretanto, analisamos com mais detalhes as ausências das definições dos conteúdos principais de divisibilidade e dos algoritmos e/ou métodos de cálculos desses conteúdos que foram praticamente de 100% nos 14 livros analisados dos últimos PNLD (2014 e 2017), livros estes, que foram distribuídos em todo o território brasileiro para serem utilizados no período de 2014 a 2019.

Podemos refletir se essas ausências dos conteúdos de divisibilidade, principalmente das definições e dos algoritmos que foram constatadas nos livros atualmente utilizados pelos alunos são realmente benéficas ou se constituem em obstáculos didáticos que aumentam a dificuldade de aprendizagem da Matemática.

Mas, de qualquer forma, estamos testemunhando uma ruptura epistemológica com os saberes que predominaram por certo período. Num caso extremo, a obstrução

do conhecimento antigo pode até mesmo provocar uma regressão do nível de compreensão (PAIS, 2001, p. 45), do conhecimento matemático.

Contudo, entendemos que isto se deu devido às orientações curriculares e às novas tendências metodológicas decorrentes de estudos, principalmente da Educação Matemática, cuja preocupação fundamental é a melhoria tanto no ensino quanto na aprendizagem da Matemática dos alunos da Educação Básica.

Finalizamos por ora este estudo, considerando que ainda há muito a ser pesquisado, principalmente na prática docente em sala de aula, a fim de se observar como os conteúdos de divisibilidade estão sendo trabalhados, se os professores estão adotando os livros didáticos de matemática escolhidos por sua escola, bem como as orientações da BNCC na elaboração dos seus projetos pedagógicos e planejamentos.

Esperamos que nosso estudo possa ser útil para novas pesquisas sobre os objetos do conhecimento matemático escolar, possibilitando replicações e reflexões, a fim de melhorar o ensino e a aprendizagem na educação básica e na formação de professores.

REFERÊNCIAS

ALENCAR FILHO, Edgard de. **Teoria Elementar dos Números**. São Paulo: Nobel. 1986.

_____. **Aritmética dos Inteiros**. São Paulo: Nobel. 1987.

ALVES, Linaldo José Malveira. **Matemática fácil** – 5ª série. 7ª ed. – São Paulo: Ed. Ática, 1991.

ANDRINI, Álvaro. **Matemática**: 5ª série. – São Paulo: Ed. Do Brasil, 1984 (Livro do aluno).

_____. **Praticando Matemática 5ª série**. – São Paulo: Editora do Brasil, 1989– (FAE-PNLD. Matemática do 1º grau – livro do aluno)

ANDRINI, Álvaro; ZAMPIROLO, Maria José C. de V. **Novo Praticando Matemática**: 5ª série. –São Paulo: ed. Do Brasil, 2002 (Livro do aluno).

ANDRINI, Álvaro; VASCONCELOS, Maria José. **Praticando Matemática 6**. – 3. ed. renovada. – São Paulo: Editora do Brasil, 2012 – (Coleção praticando matemática v. 6 – livro do professor, PNLD 2014-2015-2016).

_____. **Praticando Matemática 6**. – 4. ed. renovada. – São Paulo: Editora do Brasil, 2015 – (Coleção praticando matemática v. 6 – livro do aluno. PNLD-2017).

_____. **Praticando Matemática 6**. – 4. ed. renovada. – São Paulo: Editora do Brasil, 2015 – (Coleção praticando matemática v. 6 – livro do professor, PNLD 2017).

AZAMBUJA, Fernanda Fuentes. **Divisibilidade de polinômios no Ensino Médio via generalização da ideia de divisibilidade de números inteiros**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/AS. São Paulo, 2013.

BARBOSA, Gabriela dos Santos. **O Teorema Fundamental da Aritmética: jogos e problemas com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental**. Tese (Doutorado em

Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2008.

BECKER, Fernando. **O que é construtivismo? Ideias**, n. 20. São Paulo: FDE, 1994, p. 87-93. Disponível em <http://www.crmariocovas.sp.gov.br/pdfqideias_20-p.087-093_c.pdf acesso em 07.10.2017>. Acesso em 18 nov. 2018.

_____. **A origem do conhecimento e a aprendizagem escolar**. Porto Alegre: Artmed, 2003.

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática Bianchini**, 8 ed. – São Paulo: Moderna, 2011. PNLD-2014. Livro do aluno.

_____. **Matemática Bianchini**, 8 ed. – São Paulo: Moderna, 2011. PNLD-2014. Livro do professor.

_____. **Matemática Bianchini**, 8 ed. – São Paulo: Moderna, 2015. PNLD-2017. Livro do aluno.

_____. **Matemática Bianchini**, 8 ed. – São Paulo: Moderna, 2015. PNLD-2017. Livro do professor.

BITTAR, Marilena. **A Teoria Antropológica do Didático como ferramenta metodológica para análise de livros didáticos**. Zetetike, Campinas, SP, v. 25, n. 3, p. 364-387, dez. 2017. ISSN 2176-1744. Disponível em: <<https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8648640/17410>>. Acesso em: 06 abr. 2019.

BONGIOVANNI, Vincenzo; LEITE, Olímpio Rundinin Vissoto; LAUREANO, José Luiz Tavares. **Matemática e vida: número, medidas e geometria**. 11ª ed. – São Paulo: Ed. Ática, 1995.

BOYER, Carl B. **História da matemática**. [Tradução Elza F. Gomide]. 2. ed. – São Paulo: Edgard Blücher, 2003.

BRASIL. Ministério da Educação. **PNLD 2017: apresentação – Ensino fundamental - Anos Finais / Ministério da Educação – Secretária de Educação Básica – SEB – Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação**. Brasília, DF: Ministério da Educação, Secretária de Educação Básica, 2016.

_____. **Parecer CNE/CEB n. 11/2010** – aprova as Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica. Brasília: CNE/CEB, 2010.

_____. **Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica**. Brasília: MEC/SEB/DICEI, 2013.

_____. **Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental de 9 (nove) anos**. In: BRASIL. MEC. Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica. Brasília: MEC/SEB/DICEI, 2013.

_____. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BROETTO, Geraldo Claudio. **O ensino de números irracionais para alunos ingressantes na licenciatura em matemática**. Tese de doutorado em Educação na área de Educação e Linguagens: Matemática. Universidade Federal do Espírito Santo. Vitória, 2016.

CAMPBELL, S. R. & ZAZKIS, R. (Eds). **Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction**. Westport, CT: Ablex, 2002.

CASSIANO, Célia Cristina de Figueiredo. **O mercado do livro didático no Brasil: da criação do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD à entrada do capital internacional espanhol (1985-2007)**. Tese de doutorado em Educação: História, Política, Sociedade. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2007.

CAVALCANTE, A.L.B. **Tópicos em Teoria dos Números**. Relatório PIBIC/CNPq. Universidade de Brasília (1997).

_____. **Matemática II**. Notas de Aula. Brasília: Editora UPIS (2004).

CENTURIÓN, Marília; JAKUBOVIC, José. **Matemática: teoria e contexto**, 6º ano. 1. Ed. – São Paulo: Saraiva, 2012. Livro do professor.

CHERVEL, A. **História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa**. Teoria & Educação, Porto Alegre, v. 2, n.2, p. 177-229, 1990. Disponível em:
<https://moodle.fct.unl.pt/pluginfile.php/122510/mod_resource/content/0/Leituras/CherVEL01.pdf> acesso em nov. 2017.

CHEVALLARD, Yves. **La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné**, Paris, La Pensée Sauvage, 1985.

_____. **La tranposición didáctica: Del saber sabio al saber enseñado**. Traduzida por Claudia Gilman. Editora Aique: Buenos Aires. 1991.

_____. **El análisis de las prácticas docentes em la teoria antropológica de lo didáctico**. Tradução Ricardo Barroso Campos. Recherces em Didactique des Mathématiques, Vol 19, nº 2, pp. 221-226. 1999.

CHAPARIN, Rogério Osvaldo. **Concepções de divisibilidade de aluno do 1º ano do Ensino Médio sob o ponto de vista da teoria APÓS**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP), São Paulo, 2010.

CHAVANTE, Eduardo. **Convergências: Matemática** (6º ano, anos finais – Ensino Fundamental). 1. Ed. São Paulo: Edições SM, 2015. PNLD-2017. Livro do aluno.

_____. **Convergências: Matemática** (6º ano, anos finais – Ensino Fundamental). 1. Ed. São Paulo: Edições SM, 2015. PNLD-2017. Livro do professor.

CHERVEL, A. História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. Teoria & Educação. Porto Alegre: Pannonica, n.2, 1990.

CHOPPIN, A. **História dos livros e das edições didáticas: sobre o estado da arte**. Revista Educação e Pesquisa, São Paulo, v.30, n.3, p. 549-566, set./dez. 2004.

COELHO, Adjairon da Silva. O ensino de Álgebra nos livros didáticos de 5ª a 8ª séries, segundo a proposta curricular para Roraima (década de 1970). TCC. Monografia de Conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática. Universidade Federal de Roraima, 2017.

COUTINHO, S.C. **Números Inteiros e Criptografia RSA**. Rio de Janeiro: IMPA. Série de Computação e Matemática (2003).

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Etnomatemática: Arte ou técnica de explicar e conhecer**. São Paulo: Editora Ática, 1990.

_____. **Etnomatemática – elo entre as tradições e a modernidade**. 10. ed. Campinas: Papirus Editora, 2003.

_____. **Educação Matemática**. 3. ed. – Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2009.

DANTE, Luiz Roberto. **Tudo é Matemática**: ensino fundamental 2, 5ª série. – 2 ed. São Paulo: Ática, 2005. PNLD-2008. Livro do aluno.

_____. **Tudo é Matemática**: ensino fundamental 2, 5ª série. – 2 ed. São Paulo: Ática, 2005. PNLD-2008. Livro do professor.

_____. **Tudo é Matemática**: ensino fundamental, 6º ano 2. – 3 ed. São Paulo: Ática, 2009. PNLD-2011. Livro do aluno.

_____. **Tudo é Matemática**: ensino fundamental, 6º ano 2. – 3 ed. São Paulo: Ática, 2009. PNLD-2011. Livro do professor.

_____. **Projeto Teláris: Matemática**: ensino fundamental 2, 6º ano. – 1 ed. São Paulo: Ática, 2012. PNLD 2014. Livro do aluno.

_____. **Projeto Teláris: Matemática**: ensino fundamental 2, 6º ano. – 1 ed. São Paulo: Ática, 2012. PNLD 2014. Livro do professor.

_____. **Projeto Teláris: Matemática**: ensino fundamental 2, 6º ano. – 2 ed. São Paulo: Ática, 2015. PNLD 2017. Livro do aluno.

_____. **Projeto Teláris: Matemática**: ensino fundamental 2, 6º ano. – 2 ed. São Paulo: Ática, 2015. PNLD 2017. Livro do professor.

DI PIERRO NETO, Scipione. **Matemática na escola renovada**. São Paulo: Ed. Saraiva, 1970.

EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

FIORENTINI, Dario. **Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil**. In: *Zetetiké*/Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação,

Círculo de Estudo, Memória e Pesquisa em Educação Matemática – n. 1, Campinas, 1995.

FIORENTINI, Dario; Oliveira, Ana Teresa de Carvalho Correa de Oliveira. **O Lugar das Matemáticas na Licenciatura em Matemática**: que matemáticas e que práticas formativas? *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 27, n. 47, p. 917-938, dez. 2013. Disponível em <<http://www.scielo.br/pdf/bolema>> acesso em 3 mar. 2019.

FONSECA, Rubens Vilhena. **Números primos e o teorema fundamental da aritmética**: uma investigação entre estudantes de licenciatura em Matemática. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2015. (Tese de Doutorado).

GHEDIN, Evandro (Org.). **Currículo, avaliação e gestão por projetos**: no ensino médio. Manaus: Editora Travessia/Seduc, 2007.

_____. (Org.). **O Ensino de Ciências e suas epistemologias**. Boa Vista: Editora da UFRR, 2017.

GHEDIN, Evandro; FRANCO, Maria Amélia Santoro. **Questões de método na construção da pesquisa em educação**. 2. Ed. – São Paulo: Cortez, 2011.

GIL, Antônio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 5. ed. – 8. reimpr. – São Paulo: Atlas, 2007.

GOES, Antônio Maciel. **Aritmética: Divisibilidade, congruências e números primos – uma proposta para o ensino médio**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Universidade Federal do Tocantins. Tocantins, 2015.

GOMES, Maria Laura Magalhães. **História do ensino de Matemática: uma introdução**. – Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013.

HEFEZ, Abramo. **Elementos de Aritmética**. 2 ed. – Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2006.

_____. **Curso de Álgebra**. V. 1. Rio de Janeiro: IMPA, 1993.

LAMPARELLI, Lydia Condé; CANTON, Adolfo Walter P.; MORETTIN, Pedro Alberto; INDIANI, Dalva Fontes. **Matemática para o 1º grau**. EDART: São Paulo/MEC, 1974. Livro do aluno.

MALVEIRA, Linaldo. Matemática fácil 5ª série. – 7ª ed. São Paulo: Ed. Ática, 1991

MARQUES, Alex Sandro. **Tempos Pré-modernos: a matemática escolar dos anos 1950**. 1005. 161 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

MAZZIEIRO, Alceu dos Santos; MACHADO, Paulo Antônio Fonseca. **Descobrimo e aplicando a matemática**; 6º ano. 2. ed. Belo Horizonte: Dimensão, 2015. PNLD-2017. Livro do aluno.

_____. **Descobrimo e aplicando a matemática**; 6º ano. – 2ª ed. – Belo Horizonte: Dimensão, 2015. PNLD-2017. Livro do professor.

MENDOZA, Miguel Angel Gómez. **La transposición didáctica: historia de um concepto**. Revista Latinoamericana de Estudios Educativos. Volumen 1, Julio – Diciembre, 2005, págs. 83-115.

MIORIM, Maria Ângela. **Introdução à história da educação matemática**. São Paulo: Atual, 1998.

MOREIRA, Herivelto; CALEFFE, Luiz Gonzaga. **Metodologia da pesquisa para o professor pesquisador**. – 2. ed. – Rio de Janeiro: Lamparina, 2008.

MOREIRA, Marco Antônio. **Teorias de aprendizagem**. 2ª ed. ampl. São Paulo: EPU, 2011.

MOREIRA, Plínio Cavalcante; FERREIRA, Ana Cristina. **O Lugar da Matemática na Licenciatura em Matemática**. Bolema, Rio Claro (SP), v. 27, n. 47, p. 981-1005, dez. 2013. Disponível em <<http://www.scielo.br/pdf/bolema>> acesso em 3 mar. 2019.

MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. **Matemática ideias e desafios**, 5ª série. 10 ed. – São Paulo: Saraiva, 2002. Livro do aluno.

NORONHA, Evelyn Lauria; GHEDIN, Evandro. **Pressupostos para uma análise estrutural do currículo**. (Org.). Currículo, avaliação e gestão por projetos: no ensino médio. Manaus: Editora Travessia/Seduc, 2007.

NAKAMURA, Keiji. **Conjunto dos números irracionais: a trajetória de um conteúdo não incorporado às práticas escolares**. 2008. f. 128. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2008.

OLIVEIRA FILHO, Francisco. **A matemática do colégio: livros didáticos e história de uma disciplina escolar**. Tese de doutorado em Educação Matemática. Universidade Anhanguera de São Paulo (UNIAN). São Paulo, 2013.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática: uma análise da influência francesa**. – Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2001.

_____. **Ensinar e aprender Matemática**. 2ª ed. – 1. Edimp. – Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2013.

_____. (1999). **Transposição Didática**. MACHADO, S. D. A. (Org.) Educação Matemática uma (nova) introdução. 3. ed. Revisada, 3 reimp. – São Paulo: EDUC, 2015, p. 11-48.

PEREIRA, Lilian Givisiez. **Uma maneira mais aprofundada de se ensinar divisibilidade para alunos do Ensino Médio**. Dissertação. (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Universidade Federal de Viçosa. 2015

PEREIRA, Rubia Carla. **Transposição didática: interações entre o sexto ano do ensino fundamental e a disciplina de teoria dos números em licenciatura matemática sobre o conceito de divisibilidade**. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática). Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo. Vitória, 2016.

PIAGET, Jean. **Epistemologia genética**. Tradução de Álvaro Cabral. 3. Ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

PINHEIRO, Rodolfo Cavalcante. **Aritmética Modular: uma Aplicação no Ensino Fundamental**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) Universidade Federal de Goiás. Goiânia, 2018.

PINTO, Antônio Henrique. **A Base Nacional Comum Curricular e o Ensino de Matemática: flexibilização ou engessamento do currículo escolar**. Bolema, Rio Claro (SP), v. 31 n. 59, p. 1045-1060, dez. 2017. Disponível em <<http://www.scielo.br/pdf/bolema>> acesso em 3 mar. 2019.

PROJETO ARARIBÁ: Matemática. Organizadora Editora Moderna: obra coletiva, concebida, desenvolvida e produzida pela editora moderna; editora responsável Mara Regina Garcia Gay – 4. Ed. São Paulo: Moderna, 2014. PNLD-2017. Livro do professor.

RECH, Rogerio. **O Estado educador, as ditaduras cívico-militares e o Movimento da Matemática Moderna no Brasil e na Argentina: aproximações e distanciamentos.** Tese de Doutorado (Em Educação). Pontifícia Universidade Católica do Paraná (Escola de Educação e Humanidades). Curitiba, 2016.

RESENDE, Marilene Ribeiro. **Re-significando a disciplina Teoria dos Números na formação do professor de matemática na licenciatura.** Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2007. 239 f.

RIBEIRO, Denise Franco Capello. **Um estudo da contribuição de livros didáticos de matemática no processo de disciplinarização da matemática escolar do colégio 1943 a 1961.** 2011. 386 f. Tese (Doutorado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011.

RIBEIRO, Denise Franco Capello. **Dos Cursos Complementares aos Cursos Clássico e Científico: a mudança na organização dos ensinos de matemática.** 2006. 243 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2006.

ROONEY, Anne. **A História da Matemática** – Desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. Books do Brasil Editora Ltda. São Paulo, 2012.

ROXO, Euclides de Medeiros Guimarães. **Lições de arithmetica** – Compêndio oficialmente adotado no Collegio Pedro II. 4ª edição - Livraria Francisco Alves: Rio de Janeiro, 1926.

SACRISTÁN, J. Gimeno. **O currículo: uma reflexão sobre a prática.** Tradução Ernani F. Da f. Rosa. – 3. ed. – Porto Alegre: Artmed, 2000.

SANGIORGI, Osvaldo. **Matemática Curso Moderno.** Volume 1 para cursos ginasiais. Exemplar Nº 32387 – São Paulo: Companhia Ed. Nacional, 1963.

_____. **Matemática** – Curso moderno para o ginásio. 1º Volume. – São Paulo: Companhia Ed. Nacional, 1968.

SAMPIERI, Roberto Hernández Sampieri; COLLADO, Carlos Fernández; LUCIO, Pilar Baptista. **Metodologia de Pesquisa**. Tradução Daisy Vaz de Moraes. 5ª ed. – Porto Alegre: Penso, 2013.

SANTOS, Cediglês Lima dos. **Números Primos**. Dissertação. (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Universidade Estadual de Santa Cruz. Ilhéus, 2014.

SANTOS, J. P. O. **Introdução à Teoria de Números**. Coleção Matemática Universitária, IMPA. Rio de Janeiro, 2003.

SANTOS, José Plínio de Oliveira. **Introdução à Teoria dos números**. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

SANTOS, Beatriz Boclin Marques. **O currículo das escolas brasileiras na década de 1970: novas perspectivas historiográficas**. Ensaio: Aval. Pol. Públ. Educ. Rio de Janeiro, v.22, n. 82, p. 149-170, jan./mar. 2014.

SAVIANI, Dermeval. **Escola e democracia**. São Paulo: Cortez, 1984.

_____. **História do Tempo e Tempo da História**: estudos de historiografia e história da educação. Campinas, SP: Autores Associados, 2015.

SEVERINO, Antônio Joaquim. **Metodologia do trabalho científico**. São Paulo: Cortez, 2002.

SHOKRANIAN, Salahoddin. **Uma Breve História da Teoria dos Números no Século Vinte**. Editora Ciência Moderna Ltda. Rio de Janeiro, 2010.

SINGH, Simon. **O Último Teorema de Fermat**. Tradução de Jorge Luiz Calife. 13ª ed. Rio de Janeiro: Record, 2008.

SILVEIRA, Ênio. **Matemática: compreensão e prática**. – 3. ed. – São Paulo: Moderna, 2015. PNLD-2017. Livro do aluno.

_____. **Matemática: compreensão e prática.** – 3. ed. – São Paulo: Moderna, 2015. PNLD-2017. Livro do professor.

SOUZA, Joamir Roberto de; PATARO, Patrícia Rosana Moreno. **Vontade de Saber Matemática.** – 2. ed. – São Paulo: FTD, 2012. PNLD-2014. Livro do aluno.

_____. **Vontade de Saber Matemática.** – 2. ed. – São Paulo: FTD, 2012. PNLD-2014. Livro do aluno.

_____. **Vontade de saber matemática,** 6º ano, 3 ed. São Paulo: FTD, 2015. PNLD-2017. Livro do aluno.

_____. **Vontade de saber matemática,** 6º ano, 3 ed. São Paulo: FTD, 2015. PNLD-2017. Livro do professor.

VALENTE, Wagner Rodrigues (Org.). **O nascimento da matemática do ginásio.** Wagner Rodrigues Valente (Org.). São Paulo: Annablume; Fapesp, 2004.

_____. **Livro didático e educação matemática:** uma história inseparável. Zetetiké – Cempem – FE – Unicamp – v. 16. n. 30,

_____. **Osvaldo Sangiorgi e o Movimento da Matemática Moderna no Brasil.** Revista Diálogo Educ., Curitiba, v. 8, n. 25, p. 583-613, set./dez., 2008.

_____. **História da Educação Matemática no Brasil:** Problemáticas de pesquisa, fontes, referências teórico-metodológicas e histórias elaboradas. Wagner Rodrigues Valente (Org.). São Paulo: Editora Livraria da Física, 2014.

_____. **O Lugar da Matemática Escolar na Licenciatura em Matemática.** Bolema, Rio Claro (SP), v. 27, n. 47, p. 939-953, dez. 2013. Disponível em <<http://www.scielo.br/pdf/bolema>> acesso em 3 mar. 2019.

_____. **Dos livros didáticos para os cadernos de matemática:** a emergência dos saberes profissionais. Zetetiké, Campina, SP, v. 25, n. 2, maio/ago. 2017, p. 254-264. Disponível em: <<https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646950>> Acesso em 2 fev. 2019.

_____. **A matemática escolar:** perspectivas históricas. PUC-SP

<<http://www.sbhe.org.br/novo/congressos/cbhe3/Documentos/Individ/Eixo1/030.pdf>>
acesso em nov. 2017.

WISEU, Floriano; MORGADO, José Carlos. **Os Manuais Escolares Na Gestão do Currículo de Matemática**: que papel para o professor? Bolema, Rio Claro (SP), v. 32, n. 62, p. 1152-1176, dez. 2018. Disponível em <<http://www.scielo.br/pdf/bolema>> acesso em 3 mar. 2019.

WIELEWSKI, G. D.. O Movimento da Matemática Moderna e a formação de grupos de professores de matemática no Brasil. In. ProfMat2008, 2008, Elvas– Portugal. ProfMat2008 Actas. Lisboa-Portugal:copyright 2008 Associação de Professores de Matemática, 2008. P. 1-10.

ZAZKIS, R. & CAMPBELL. S. R. **Prime decomposition**: Understanding uniqueness. Journal of Mathematical Behavior, p. 207-218. 1996.

ANEXOS - DOCUMENTOS CURRICULARES

ANEXO A – COMPETÊNCIAS GERAIS PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA CONFORME A BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR (BNCC, 2017)

10 Competências Gerais para a Educação Básica
• 1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva. • 2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas. • 3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural. • 4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artísticas, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo. • 5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva. • 6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade. • 7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta. • 8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas. • 9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza. • 10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

Fonte: BNCC (2017, p. 14).

ANEXO B – MATEMÁTICA PARA O 6º ANO – (BNCC, 2017)

Organizador Curricular de Matemática para o 6º ano completo proposto pela BNCC-2017 – Unidade Temática: Números

UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Números	Sistema de numeração decimal: características, leitura, escrita e comparação de números naturais e de números racionais representados na forma decimal	(EF06MA01) Comparar, ordenar, ler e escrever números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita, fazendo uso da reta numérica. (EF06MA02) Reconhecer o sistema de numeração decimal, como o que prevaleceu no mundo ocidental, e destacar semelhanças (base, valor posicional e função zero), utilizando, inclusive, a composição e decomposição de números naturais e números racionais em sua representação decimal.
	Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números naturais Divisão euclidiana	(EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora.
	Fluxograma para determinar a paridade de um número natural Múltiplos e divisores de um número natural Números primos e compostos	(EF06MA04) Construir algoritmo em linguagem natural e representá-lo por fluxograma que indique a resolução de um problema simples (por exemplo, se um número natural qualquer é par). (EF06MA05) Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos “é múltiplo de”, “é divisor de”, “é fator de”, e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000. (EF06MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor.
	Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações	(EF06MA07) compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes. (EF06MA08) Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica. (EF06MA09) Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora. (EF06MA010) Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.
	Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números racionais	(EF06MA011) Resolver e elaborar problemas com números racionais positivos na representação decimal, envolvendo as quatro operações fundamentais e a potenciação, por meio de estratégias diversas, utilizando estimativas e arredondamentos para verificar a razoabilidade de respostas, com e sem uso de calculadora.
	Aproximação de números para múltiplos de potências de 10	(EF06MA012) Fazer estimativas de quantidades e aproximar números para múltiplos da potência de 10 mais próxima.
	Cálculo de porcentagens por meio de estratégias diversas, em fazer uso da “regra de três”	(EF06MA013) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da “regra de três”, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.

Fonte: BNCC (2017, p. 298). [Grifo nosso].

**Organizador Curricular de Matemática para o 6º ano completo propostos pela
BNCC-2017 – Unidade Temática: Álgebra**

UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Álgebra	Propriedades da igualdade	(EF06MA14) Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas.
	Problemas que tratam da partição de um todo em duas partes e entre uma das partes e o todo.	(EF06MA15) Resolver e elaborar problemas que envolvam a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, envolvendo relações aditivas e multiplicativas, bem como a razão entre as partes e entre uma das partes e o todo.

Fonte: BNCC (2017, p. 300)

**Organizador Curricular de Matemática para o 6º ano completo propostos pela
BNCC-2017 – Unidade Temática: Geometria**

UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Geometria	Plano cartesiano: associação dos vértices de um polígono a pares ordenados	(EF06MA16) Associar pares ordenados de números a pontos do plano cartesiano do 1º quadrante, em situações como a localização dos vértices de um polígono.
	Prismas e pirâmides: planificações e relações entre seus elementos (vértices, faces e arestas)	(EF06MA17) Quantificar e estabelecer relações entre os números de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono de base, para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial.
	Polígonos: classificações quanto ao número de vértices, às medidas de lados e ângulos e ao paralelismo e Perpendicularismo dos lados	(EF06MA18) Resolver, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros. (EF06MA19) Identificar características dos triângulos e classifica-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos. (EF06MA20) Identificar características dos quadriláteros, classificá-los em relação a lados e a ângulos e reconhecer a inclusão e a intersecção de classes entre eles.
	Construção de figuras semelhantes: ampliação e redução de figuras planas em malhas quadriculadas	(EF06MA21) Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais.
	Construção de retas paralelas e perpendiculares, fazendo uso de réguas, esquadros e softwares	(EF06MA22) Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros. (EF06MA23) Construir algoritmo para resolver situações passo a passo (como na construção de dobraduras ou na indicação de deslocamento de um objeto no plano segundo pontos de referência e distância fornecidas etc.).

Fonte: BNCC (2017, p. 300)

**Organizador Curricular de Matemática para o 6º ano completo propostos pela
BNCC-2017 – Unidade Temática: Grandezas e medidas**

UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Grandezas e medidas	Problemas sobre medidas envolvendo grandezas como comprimento, massa, tempo, temperatura, área, capacidade e volume	(EF06MA24) Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento.
	Ângulos: noção, usos e medida	(EF06MA25) Reconhecer a abertura do ângulo como grandeza associada às figuras geométricas. (EF06MA26) Resolver problemas que envolvam a noção de ângulo em diferentes contextos e em situações reais, como ângulo de visão. (EF06MA27)
	Plantas baixas e vistas aéreas	(EF06MA28) Interpretar, descrever e desenhar plantas baixas simples de residências e vistas aéreas.
	Perímetro de um quadrado como grandeza proporcional à medida do lado	(EF06MA29) Analisar e descrever mudanças que ocorrem no perímetro e na área de um quadrado ao se ampliarem ou reduzirem, igualmente, as medidas de seus lados, para compreender que o perímetro é proporcional à medida do lado, o que não ocorre com a área.

Fonte: BNCC (2017, p. 301)

Organizador Curricular de Matemática para o 6º ano completo propostos pela BNCC-2017 – Unidade Temática: Probabilidade e Estatística

UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Probabilidade e estatística	Cálculo de probabilidade como a razão entre o número de resultados favoráveis e o total de resultados possíveis em um espaço amostral equiprovável Cálculo e probabilidade por meio de muitas repetições de um experimento (frequências de ocorrências e probabilidade frequentista)	(EF06MA30) Calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional (forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos.
	Leitura e interpretação de tabelas e gráficos (de colunas ou barras simples ou múltiplas) referentes a variáveis categóricas e variáveis numéricas.	(EF06MA31) Identificar as variáveis e suas frequências e os elementos constitutivos (títulos, eixos, legendas, fontes e datas) em diferentes tipos de gráficos. (EF06MA32) Interpretar e resolver situações que envolvam dados de pesquisas sobre contextos ambientais, sustentabilidade, trânsito, consumo responsável, entre outros, apresentadas pela mídia em tabelas e em diferentes tipos de gráficos e redigir textos escritos com o objetivo de sintetizar conclusões.
	Coleta de dados, organização e registro Construção de diferentes tipos de gráficos para representá-los e interpretação das informações	(EF06MA33) Planejar e coletar dados de pesquisa referente a práticas sociais escolhidas pelos alunos e fazer uso de planilhas eletrônicas para registro, representação e interpretação das informações, em tabelas, vários tipos de gráficos e texto.
	Diferentes tipos de representação de informações: gráficos e fluxogramas	(EF06MA34) Interpretar e desenvolver fluxogramas simples, identificando as relações entre os objetos representados (por exemplo, posição de cidades considerando as estradas que as unem, hierarquia dos funcionários de uma empresa etc.)

Fonte: BNCC (2017, p. 302)

ANEXO C – DOCUMENTO CURRICULAR DE RORAIMA – QUADRO DOS CONTEÚDOS DE MATEMÁTICA DO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL – ANOS FINAIS

Quadro C-1: Organizador Curricular de Matemática (6º ano) – Números (DCR-2019)

Organizador Curricular de Roraima – 6º ano Matemática – Números		
Objetos de conhecimento	Habilidades	Orientações didáticas/ Metodológicas
Sistema de numeração decimal: características, leitura, escrita e comparação de números naturais e de números racionais representados na forma decimal.	(EF06MA01) Comparar, ordenar, ler e escrever números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita, fazendo uso da reta numérica.	Utilize números naturais e racionais em diferentes formas, através da identificação e ordenação em situações de contagem, fazendo sua representação na reta numérica.
	(EF06MA02) Reconhecer o sistema de numeração decimal, como o que prevaleceu no mundo ocidental, e destacar semelhanças e diferenças com outros sistemas, de modo a sistematizar suas principais características (base, valor posicional e função do zero), utilizando, inclusive, a composição e decomposição de números naturais e números racionais em sua representação decimal, estabelecendo a relação de ordem entre os números naturais de qualquer grandeza.	Apresente as diferentes representações do sistema de numeração decimal, compreendendo suas necessidades práticas que levaram à criação dos números, relacionando o desenvolvimento dos sistemas de numeração com a história da humanidade, reconhecendo os métodos primitivos de contagem e as situações que motivaram sua criação e evolução no sistema de numeração decimal (SND), ampliando e aprimorando a compreensão das regras dos sistemas de numeração decimal.
Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números naturais Divisão euclidiana	(EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora.	Utilize os conhecimentos prévios dos alunos sobre as operações fundamentais envolvendo números naturais. Proponha situações problemas para resolver com o uso ou não de calculadoras. Dinamize o processo de ensino e aprendizagem que propiciem o raciocínio lógico diante da resolução de atividades que se tenha experiência mais de uma operação.
Fluxograma para determinar a paridade de um número natural Múltiplos e divisores de um número natural	(EF06MA04) Construir algoritmo em linguagem natural e representá-lo por fluxograma que indique a resolução de um problema simples (por exemplo, se um número natural qualquer é par).	Apropriar-se dos algoritmos do tipo $2n$ e $2n+1$ para identificar se um número é par ou ímpar, representando-o através de resolução de problemas simples.

Quadro C-1: Continuação

Organizador Curricular de Roraima – 6º ano		
Matemática – Números		
Objetos de conhecimento	Habilidades	Orientações didáticas/ Metodológicas
Fluxograma para determinar a paridade de um número natural Múltiplos e divisores de um número natural Números primos e compostos	(EF06MA05) Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressos pelos termos – “é múltiplo de”, – “é divisor de”, – “é fator de”, e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000.	Apresente e aplique as regras dos critérios de divisibilidade, números primos e compostos, decomposição em fatores primos, estabelecendo as relações entre – “é múltiplo de”, – “é divisor de”, – “é fator de”. Sugira aos alunos que estabeleçam os critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000, por meio de investigações.
	(EF06MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor.	Apresente situações envolvendo o múltiplo e o divisor de números naturais, podendo ser resolvidos através da fatoração.
Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações.	(EF06MA07) Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes, percebendo que duas frações são equivalentes quando ambas representam a mesma quantidade;	
	(EF06MA08) Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica em situações que indicam a relação parte-todo.	
	(EF06MA09) Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora.	
	(EF06MA10) Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.	

Quadro C-1: Continuação

Organizador Curricular de Roraima – 6º ano Matemática – Números		
Objetos de conhecimento	Habilidades	Orientações didáticas/ Metodológicas
Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações.	(EF06MA11) Resolver e elaborar problemas com números racionais positivos na representação decimal, envolvendo as quatro operações fundamentais e a potenciação, por meio de estratégias diversas, utilizando estimativas e arredondamentos para verificar a razoabilidade de respostas, com e sem uso de calculadora.	
Aproximação de números para múltiplos de potências de 10	(EF06MA12) Fazer estimativas de quantidades e aproximar números para múltiplos da potência de 10 mais próximas.	

Fonte: Adaptado do Documento Curricular de Roraima (2019) – Matemática 6º ano – Unidade Temática “Números”. [Grifo nosso].

Observação: no original também faltam os conteúdos da última coluna, equivalentes às habilidades de EF06MA07 a EF06MA12.

APENDICE A - RELAÇÃO DE DISSERTAÇÕES

RELAÇÃO DE DISSERTAÇÕES ORGANIZADAS POR TÍTULOS: DIVISIBILIDADE, NÚMEROS PRIMOS, TEORIA DA ARITMÉTICA MODULAR E TEORIA DOS NÚMEROS

ALCANTARA, Francisco Ailton. **Tópicos de Aritmética: uma proposta para a educação básica.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Universidade Federal do Ceará. Juazeiro do Norte, 2014.

ALMEIDA, Cybele Verde Aragão de. **Números Primos Gaussianos para o Ensino Médio.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Universidade Federal da Paraíba. João Pessoa, 2014.

D'ALMEIDA, Joice. **A Teoria Elementar dos Números sob o ponto de vista do Caderno do Professor de Matemática da rede Estadual de São Paulo.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo – PUC/SP. São Paulo, 2010.

ALMEIDA, Tércio das Neves. **Uma abordagem da aritmética modular no Ensino Básica.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) Universidade Federal da Paraíba, 2014.

ARAUJO, Joselito Elias de. **Divisibilidade, Congruência e Aritmética Modular em Problemas Olímpicos.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição – PROFMAT). Universidade Federal de Campina Grande, 2018.

ARAUJO, Steve Wanderson Calheiros de. **Uma extensão do mdc e mmc dos inteiros aos comensuráveis.** Dissertação. (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Universidade Federal do Amapá. Macapá, 2016.

AZAMBUJA, Fernanda Fuentes. **Divisibilidade de polinômios no Ensino Médio via generalização da ideia de divisibilidade de números inteiros.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/AS. São Paulo, 2013.

BARBOSA, Jonathan Araújo. **Teoria dos Números: alguns resultados e curiosidades**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Universidade Estadual do Ceará. Fortaleza, 2017.

BARBOSA, Josemar Claudino. **Teoria dos Números no Ensino Básico: um estudo de caso no 2º ano do Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Universidade Federal Rural de Pernambuco. Recife, 2017.

BITTENCOURT, Carolina da Silva. **Conjectura de Goldbach e a intuição matemática**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Universidade Federal da Bahia. Salvador, 2018.

BRITO, Cicero Carlos Ramos de. **Métodos Geradores de Critérios de Divisibilidade. Dissertação** (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Universidade Federal Rural de Pernambuco. Recife, 2017.

CAIXETA, Susiane Bezerra. **Algoritmo da Divisão de Euclides**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Universidade de Brasília. Brasília, 2016.

CAMELO, Fausto Fernandes da Silva. **Um critério de divisibilidade universal sob a ótica da teoria de aprendizagem significativa de Ausubel. Dissertação**. (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) Universidade de Brasília, Brasília, 2018.

CAMPOS, JEAN PEIXOTO. **Algoritmos para fatoração e primalidade como ferramenta didática para o ensino de matemática**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Universidade Federal de Rondônia – UNIR. Porto Velho, 2014.

CARVALHO, Fernando Ramires. **Números primos e o Teorema Fundamental da Aritmética no sexto ano do ensino fundamental**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Instituto de Matemática Pura e Aplicada – IMPA. Rio de Janeiro, 2015.

CARVALHO, Marcio Miranda de. **Resolução de problemas matemáticos olímpicos: uma abordagem aritmética modular**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Universidade Federal do Vale do São Francisco. Juazeiro-BA, 2013.

CERQUEIRA JUNIOR, Luciano de Souza. **Criptografia RSA: uma aplicação de Teoria dos Números**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Cruz das Almas, 2015.

CERQUEIRA, Luciana Mota. **Aritmética Modular nos códigos de barra**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Cruz das Almas, 2015.

CHAPARIN, Rogério Osvaldo. **Concepções de divisibilidade de aluno do 1º ano do Ensino Médio sob o ponto de vista da teoria APÓS**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP), São Paulo, 2010.

COSTA, Rinaldo Diniz. **Critério de divisibilidade no Ensino Básico**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2014.

DIAS, Cristina Helena Bovo Batista. **Números primos e divisibilidade: estudo de propriedades**. **Dissertação**. (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Rio Claro, 2013.

FARIA, Alexandre Augusto Cavalcante de. **Teoria dos Números: uma introdução motivadora direcionada aos docentes do ensino básico**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Universidade Federal de Alagoas. Maceió, 2015.

FARIAS, Djalma Gomes de. **Um estudo do ensino dos números primos na educação básica**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Universidade Federal da Alagoas. Maceió, 2016.

FERNANDES, João Victor Lima. **Ensino de Aritmética Modular na Educação Básica**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) Universidade Federal do Cariri. Juazeiro do Norte, 2018.

FERNANDES, Jose Aparecido da Silva. **Ensino e Aprendizagem de Divisibilidade Através da Resolução de Problemas: Experiência Com uma Turma de 6º ano do Ensino Fundamental**. **Dissertação** (Mestrado em Ensino na Educação Básica). Universidade Federal do Espírito Santo, 2016.

FERREIRA, Antônio Eudes. **Números primos e o Postulado de Bertrand**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Universidade Federal da Paraíba. João Pessoa, 2014.

FERREIRA, Francisco de Assis. **A prova dos nove, divisibilidade e congruência**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Universidade Federal do Cariri. Juazeiro do Norte, 2017.

FILHO, Alfio Grassi. **Critérios de Divisibilidade e Aplicação em Sala de Aula**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. São José do Rio Preto, 2015.

FIORELLI, Juliana de Oliveira. **Máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum divisor, generalizados, aplicados ao ensino básico**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT). Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP. Campinas, 2017.

FRANCO, Tania Regina Rodrigues. **Divisibilidade e Congruências: Aplicações no Ensino Fundamental II**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Universidade Federal de Goiás, Goiana, 2016.

FREITAS, Silvio Luiz Fernandes. **A Aritmética no Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada – IMPA. Rio de Janeiro, 2015.

GOES, Antonio Maciel. **Aritmética: Divisibilidade, congruências e números primos – uma proposta para o ensino médio**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Universidade Federal do Tocantins. Tocantins, 2015.

GREGORUTTI, Juliana de Lima. **Construção dos critérios de divisibilidade com alunos de 5ª série do Ensino Fundamental por meio de situações de aprendizagem**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP), São Paulo, 2009.

JESUS JUNIOR, Lucídio de. **Teoria dos números: um estudo com resolução de problema na educação básica**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2013.

LIMA, Kelly Cristina Santos Alexandre de. **Números primos e criptografia: da relação com a educação ao sistema RSA. Dissertação** (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Seropédica (RJ), 2013.

LÔBO, Paulo Sérgio Cordeiro. **Números inteiros que podem ser escritos como a soma de dois quadrados. Dissertação** (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Universidade Federal do Ceará. Fortaleza, 2015.

MACHADO, Edson Ribeiro. **Números primos uma abordagem educacional. Dissertação** (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Universidade Federal do Amazonas – UFAM. Manaus, 2015.

MAURICIO, Eufelix Monteiro. **Uma Proposta de Sequência Didática para o Ensino de MDC e MMC na Educação Básica. Dissertação.** (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2014.

NASCIMENTO, Fabricio Lemos do. **Máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum: uma abordagem de suas propriedades e aplicações. Dissertação** (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT). Universidade Estadual do CEARÁ, Fortaleza, 2015.

PADILHA, Jose Cleiton Rodrigues. **Números Primos. Dissertação.** (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Universidade Federal da Paraíba. João Pessoa, 2013.

PAIVA, Glaucia Innocêncio de Jesus Paulo. **Números primos e teste de primalidade. Dissertação** (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). Universidade Estadual de Campinas- UNICAMP. Campinas, 2014.

PEREIRA, Andressa de Lima. **Números primos e a Conjectura de Goldbach. Dissertação** (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Universidade Federal do ABC. Santo André, 2017.

PEREIRA, Lilian Givisiez. **Uma maneira mais aprofundada de se ensinar divisibilidade para alunos do Ensino Médio. Dissertação.** (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Universidade Federal de Viçosa, 2015.

PEREIRA, Rubia Carla. **Transposição didática: interações entre o sexto ano do ensino fundamental e a disciplina de teoria dos números em licenciatura matemática sobre o conceito de divisibilidade.** Dissertação (Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática). Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo. Vitória, 2016.

PETRAVICIUS, Daniel. **A função zeta de Riemann e os números primos.** Dissertação (Mestrado Profissional de Matemática). Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP. Campinas, SP, 2016.

PINHEIRO, Rodolfo Cavalcante. **Aritmética Modular: uma Aplicação no Ensino Fundamental.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) Universidade Federal de Goiás. Goiânia, 2018.

PIZYSIEZNIG, André Henrique. **Qual a concepção de divisibilidade explicitada por alunos do 6º ano ao poderem utilizar calculadora?** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2011.

PRIEBE, Debora Danielle Alves Moraes. **Tópicos de Aritmética para as séries finais do Ensino Fundamental: Uma proposta focada na resolução de Problemas.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) Universidade Federal de Goiás, 2016.

REIS, Jackson Martins. **Tópicos de Teoria dos Números e Teste de Primalidade.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP. Campinas, 2009.

RIGOTI, Márcio Dominicali. **Números primos: os átomos dos números.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2015.

SANTAMARINHA, Manuel Simão Pilar. **Aspectos Interessantes de Teoria dos Números para o Ensino Básico.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2016.

SANTOS, Antonio Conceição. **Divisibilidade nos números naturais – Uma experiência com uma turma do ensino médio.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Universidade Federal do Recôncavo da Bahia. Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas. Cruz das Almas (BA), 2014.

SANTOS, Cediglês Lima dos. **Números Primos. Dissertação.** (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Universidade Estadual de Santa Cruz. Ilhéus, 2014.

SANTOS, José Simão Oliveira dos. **Números primos e congruências: tópicos de teoria dos números na educação básica. Dissertação** (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Universidade Federal do Recôncavo da Bahia. Cruz das Almas, 2015.

SANTOS, Raul Rodrigues dos. **Divisibilidade e Congruência em Somatórios. Dissertação** (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Universidade Federal de Goiás (UFG), 2018.

SILVA, Luis Henrique Pereira da. **Uma Aplicação da Congruência na Determinação de Critérios de Divisibilidade. Dissertação** (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT). Universidade Federal de Goiás. Goiana, 2015.

SILVA, Marcio Luiz Duarte da. **Uma interferência matemática: proposta para o ensino de m.d.c. e m.m.c. Dissertação.** Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – (PROFMAT). Universidade Federal do Piauí. Teresina, 2015.

SILVA, Maysa Ferreira da. **Divisibilidade: práticas de estudo realizadas por alunos de um curso preparatório para o vestibular. Dissertação** (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande. 2010.

SOARES, Vagner Cáceres. **Números Primos: aplicações e primalidade. Dissertação** (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul. Dourado, 2015.

SOUZA, Bianca Amoras de Souza. **Teoria dos Números e o RSA. Dissertação** (Mestrado em Matemática Aplicada). Universidade Estadual de Campinas-UNICAMP. Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação. Campinas (SP), 2004.

SOUZA, Marcio Monte Alegre. **Divisibilidade em Domínios de Integridade. Dissertação** (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Universidade Federal de Sergipe, Aracaju, 2013.

SPINA, André Vinicius. **Números Primos e Criptografia. Dissertação** (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2014.

TEIXEIRA, Wesley Castro. **Fermat e os Números primos. Dissertação** (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT). Universidade Federal do Cariri. Juazeiro do Norte, 2017.

VALENTIM, Erivan Sousa. **A divisibilidade no ensino fundamental. Dissertação** (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Universidade Federal da Paraíba (UEPB). Campina Grande, 2017.

VOELZ, Marcia Eni. **Utilização dos métodos Vieta Jumping e descida infinita na solução de equações Diofantinas e problemas envolvendo divisibilidade. Dissertação** (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2018.

APÊNDICE B – RELAÇÃO DOS LIVROS DE MATEMÁTICA SELECIONADOS PARA O ESTUDO

Relação dos livros didáticos de matemática da 5ª série/6º ano selecionados para a pesquisa da presença/ausência dos conteúdos de divisibilidade				
LDM	Títulos	Autor(es)	Ano	PNLD
1	Matemática	Euclides Roxo	1926	--
2	Matemática Curso Moderno	Osvaldo Sangiorgi	1963	--
3	Matemática Curso Moderno	Osvaldo Sangiorgi	1968	--
4	Matemática na Escola Renovada	Scipione Di Pierro Neto	1970	--
5	Matemática para o 1º grau	Lydia Lamparelli et al.	1974	--
6	Matemática	Álvaro Andrini	1984	1985
7	Praticando Matemática	Álvaro Andrini	1989	1990
8	Matemática fácil 5ª série	Linaldo Malveira	1991	
9	Matemática e Vida	Bongiovanni, Vissoto, Laureano	1995	1996
10	Matemática: ideias e desafios	Iracema Mori e Dulce Onaga	2002	2003
11	Novo Praticando Matemática	Álvaro Andrini e Maria José Vasconcelos	2002	2006
12	Tudo é Matemática 5ª série	Luiz Roberto Dante	2005	2008
13	Tudo é Matemática 6º ano	Luiz Roberto Dante	2009	2011
14	Praticando Matemática	Álvaro Andrini e Maria José Vasconcelos	2012	2014
15	Vontade de Saber Matemática	Joamir Souza e Patrícia Moreno Pataro	2012	2014
16	Projeto Teláris: Matemática	Luiz Roberto Dante	2012	2014
17	Matemática Bianchini	Edwaldo Bianchini	2011	2014
18	Matemática teoria e contexto	Marília Centurió & José Jakubovic	2012	2014
19	Matemática: Ideias e desafios	Iracema Mori Dulce Satiko Onaga	2012	2014
20	Praticando Matemática	Álvaro Andrini e Maria José Vasconcelos	2015	2017
21	Vontade de saber matemática	Joamir Souza e Patrícia Moreno Pataro	2015	2017
22	Matemática – compreensão e prática	Ênio Silveira	2015	2017
23	Projeto Teláris: Matemática	Luiz Roberto Dante	2015	2017
24	Matemática - Bianchini	Edwaldo Bianchini	2015	2017
25	Projeto Araribá – Matemática	Editora Moderna (organização)	2014	2017
26	Convergências matemática	Eduardo Chavante	2015	2017
27	Descobrimos e aplicando a matemática	Alceu dos Santos Mazzeiro e Paulo Antônio Fonseca Machado	2015	2017