

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
UNIVERSIDADE ESTADUAL DO AMAZONAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
REDE AMAZÔNICA DE EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

NILRA JANE FILGUEIRA BEZERRA

A ORGANIZAÇÃO DO ENSINO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NA PERSPECTIVA DA TEORIA DA FORMAÇÃO POR ETAPAS DAS AÇÕES MENTAIS DE GALPERIN

CUIABÁ – MT
Agosto/2016

NILRA JANE FILGUEIRA BEZERRA

A ORGANIZAÇÃO DO ENSINO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NA PERSPECTIVA DA TEORIA DA FORMAÇÃO POR ETAPAS DAS AÇÕES MENTAIS DE GALPERIN

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas – PPGECEM da Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática – REAMEC, como requisito parcial para obtenção do título de Doutora em Educação em Ciências e Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Marta Maria Pontin Darsie.

CUIABÁ – MT
Agosto/2016

"Na maior parte das ciências uma geração põe abaixo o que outra construiu e o que uma estabeleceu, a outra desfaz. Somente na Matemática é que cada geração constrói um novo andar sobre a antiga estrutura" (HANKEL).

DEDICATÓRIA

Ao meu esposo **Eliezio Oliveira Bezerra** (*in memorian*), amor de toda a minha vida, que trilhou junto comigo cada etapa desse doutorado, me apoiando em todos os sentidos, companheiro, amante e protetor.

A minha filha **Jannyele Vicência Filgueira Bezerra** (*in memorian*), minha primogênita que de forma tão trágica foi impedida de vivenciar comigo a conquista desse título.

A eles eu dedico!!

AGRADECIMENTOS

A **Deus**! A Ele toda honra, toda glória e toda minha gratidão.

Ao meu esposo **Eliezio Oliveira Bezerra** (*in memorian*), companheiro, amante, parceiro de todas as horas. Da sua maneira soube me incentivar, com seu amor, com palavras ou até em silêncio esteve ao meu lado e me trouxe tranquilidade durante essa jornada. Você não está mais aqui, mas é impossível te esquecer. Obrigada Meu Amor!

Aos meus filhos **Jannyele Vicência Filgueira Bezerra** *(in memorian),* **Ellijane Filgueira Bezerra** e **Caio Bruno Filgueira Bezerra** pelo apoio e compreensão durante a minha jornada de doutoranda. Ausente e muitas vezes impaciente, porém compreendida por eles. Essa conquista é nossa! Muito obrigada!

A minha mãe **Elza Mesquita Filgueira**, exemplo de amor, carinho, força e dedicação. Devo muito a senhora mãezinha!

A todos os meus irmãos e irmãs! Em especial a **Aldenora Mesquita Filgueira**, tantas vezes você renunciou sua própria vida pra cuidar de mim e dos meus filhos nos momentos que precisei. Obrigada maninha!

A toda minha família, meus sobrinhos, tios, tias, cunhados, cunhadas, primos e primas que torceram por mim e desejaram junto comigo a conclusão dessa tese.

A amiga querida **Maria do Perpétuo Socorro Calixto Amorim** que me deu apoio no início do doutorado, me recebendo como uma filha na sua casa. Obrigada querida!

A minha prima **Jerce Lania Queiroz** e família que sempre me acolheram tão bem no seu apartamento na cidade de Manaus, onde cursei as disciplinas desse doutorado.

A minha amiga **Francisca Floscoélia** pelas leituras e correções feitas na tese. Obrigada Chiquita querida!

Ao **Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Roraima (IFRR)** pela concessão de bolsas de estudos, passagens e diárias para o cumprimento de todas as etapas do doutorado.

A minha querida orientadora, **Profa. Dra. Marta Maria Potin Darsie.** Seu apoio, orientação, paciência e carinho foram fundamental para a minha conclusão. Sem a sua força, não teria conseguido! Agradeço por ter me acompanhado cuidadosamente até aqui!

As professoras **Anna Regina Lanner de Moura**, **Fabiana Fioreze de Marco**, **Rute Cristina Domigos de Palma** e **Maria do Carmo de Sousa** pela valiosa contribuição teórica apresentada no exame de qualificação. Agradeço por tê-las presentes neste importante momento da minha vida acadêmica.

Aos professores e colegas do doutorado! Especialmente a **Salete Chalub** e **Simone Chalub** pela amizade motivadora e palavras de otimismo que me impulsionaram a chegar até o fim.

Àquelas pessoas que, de alguma forma, contribuíram com este trabalho. ***Muito obrigada!***

RESUMO

Essa pesquisa apresenta os resultados de um estudo cujo objetivo foi investigar se a organização do ensino de Cálculo baseada nos pressupostos da Teoria da Formação por Etapas das Ações Mentais de Galperin, promove a aprendizagem dos conceitos de Limite, Derivada e Integral nos estudantes da Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Roraima. Para tanto, a questão que norteou a presente investigação foi: Quais contribuições a organização do ensino de Cálculo na perspectiva da Teoria da Formação por Etapas das Ações Mentais, trazem para a aprendizagem dos conceitos de Limite, Derivada e Integral dos acadêmicos de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Roraima – IFRR? Tendo como base os aportes teóricos fornecidos pela abordagem histórico-cultural da psicologia e, em particular, da Teoria da Formação por Etapas das Ações Mentais, a tese, apoiada principalmente nas ideias de P. Ya. Galperin, destaca a origem e o conteúdo dos processos mentais, aborda a relação entre a organização do ensino de Cálculo Diferencial e Integral e o uso da estratégia da resolução de problemas para o estudo dos conceitos de Limite, Derivada e Integral, observando as etapas do processo de assimilação conceitual proposta por Galperin. Quanto aos procedimentos metodológicos, essa pesquisa foi desenvolvida sob a perspectiva da abordagem qualitativa, a partir de uma intervenção pedagógica com licenciandos em Matemática nas disciplinas de Cálculo I e Cálculo II, no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Roraima – IFRR. Tal intervenção possibilitou a produção dos dados que foram registrados por meio de vídeos, áudios, atividades realizadas pelos acadêmicos, além de um diário de campo que descreveu o movimento de aprendizagem dos estudantes a partir de observações realizadas em sala de aula. O processo de análise foi desenvolvido por meio da interpretação da fala, da escrita, do desempenho nas atividades e ações dos estudantes durante as aulas. Os resultados apontam que é possível obter o grau de generalização e o grau de consciência dos conceitos desenvolvidos no ensino de Cálculo Diferencial e Integral por meio da resolução das *Tarefas de Compreensão Conceitual* e direcionado pela organização do ensino, segundo as etapas propostas por Galperin em sua Teoria. No entanto, é importante destacar que um dos fatores que influenciou no desempenho dos estudantes, foi o número relativamente pequeno de sujeitos que integraram a pesquisa.

Palavras-chave: Educação Matemática; Ensino de Cálculo; Resolução de problemas; Teoria da formação por etapas das ações mentais.

ABSTRACT

This research presents results of a studie wich aim was to investigate if the organization of calculation teaching based on the assumptions of Formation Theory by Galperin's Mental Actions Stages, promotes apprenticeship of Limit, Derivada and Integral concepts on students of Mathmatics Graduation of the Federal Institute of Roraima. Therefore the question: witch contributions the organization of Calculation teaching on the perspective of Formation Theory by Mental Action Stages, brings to the concepts of Limits, Derivada and Integral apprenticeship to the Mathmatics graduation students of the Federal Institute of Roraima-IFRR? guided this investigation. Based on the theorical contributions provided by the historical and cultural approach of psychology and, particularly, of the Formation Theory by Mental Action Stages, the thesis, mainly supported on the ideas of P. Ya. Galperin, emphasizes the origin and contents of the mental process, approach the relationship between the Differential and Integral Calculation teaching and the use of the problems solving strategy to the concepts of Limit, Derivada and Integral studie, attending the stages of conceptual assimilation process offered by Galperin. As the methodological processes, this research was developed by the perspective of qualitative approach, from a pedagogical intervention with graduate students in mathmatics on the Calculation I and Calculation II subjects in Federal Institute of Education, Science and Technology of Roraima – IFRR. This intervention made possible the production of data that were recorded through videos, audios, activities performed by the students, plus a field diary that described the student's apprenticeship movement from notes made at the classroom. The analysis process was developed by the interpretation of speech, script, acting in the activity and student's actions during classes. The result indicate that is possible obtain the degree of generalization and the degree of concepts conscience developed in the Differential and Integral Calculation teaching through problems solving and directed by the teaching organization, according to the stages propposed by Galperin in his theory. However, it's important to note that one of the coefficients that influenced the student's performance, was the relatively small number of subjects that were part of the research.

Key words: Mathmatics Education; Calculation Learning; Problems Solving; Formation Theory by Mental Actions Stages.

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Instrumento de análise das provas escritas 101
Tabela 2: Critérios utilizados para avaliar o desempenho dos estudantes 102
Tabela 3: Fase Diagnóstica: Síntese do Desempenho do Estudante E1. 108
Tabela 4: Fase Diagnóstica: Síntese do Desempenho do Estudante E2 112
Tabela 5: Fase Diagnóstica: Síntese do Desempenho do Estudante E3 115
Tabela 6: Fase Diagnóstica: Síntese do Desempenho do Estudante E4. 117
Tabela 7: Fase Diagnóstica: Síntese do Desempenho do Estudante E5 119
Tabela 8: Síntese do deesempenho do estudante E1 na fase formativa e mediadora 127
Tabela 9: Síntese do desempenho do estudante E2 na fase formativa e mediadora 130
Tabela 10: Síntese do desempenho do estudante E3 na fase formativa e mediadora 134
Tabela 11: Síntese do desempenho do estudante E4 na fase formativa e mediadora 136
Tabela 12: Síntese do desempenho do estudante E5 na fase formativa e mediadora 140
Tabela 13: Síntese do Desempenho do Estudante E1 na Fase Final 146
Tabela 14: Síntese do Desempenho do Estudante E2 na Fase Final 148
Tabela 15: Síntese do Desempenho do Estudante E3 na Fase Final 150
Tabela 16: Síntese do Desempenho do Estudante E5 na Fase Final 153
Tabela 17: Média do desempenho por estudante nas Tarefas 1, 2 e 3 155
Tabela 18: Síntese do Desempenho dos Estudante na Fase do Nível de Partida 183
Tabela 19: Síntese do Desempenho dos Estudante na Fase Mediadora e Formativa 190
Tabela 20: Síntese do Desempenho dos Estudante na Fase Mediadora e Formativa 194
Tabela 21: Média do desempenho por estudante nas Tarefas 1e 2 (Unidade II) 196
Tabela 22: Média do desempenho por estudante nas Tarefas 3 e 4 (Unidade II) 199
Tabela 23: Média do desempenho por estudante na Tarefa 5 (Unidade II) 204
Tabela 24: Síntese do Desempenho dos Estudante na Fase do Nível de Partida – Unidade III 209
Tabela 25: Síntese do Desempenho dos Estudante na Fase Mediadora e Formativa – Unidade III 213
Tabela 26: Síntese do Desempenho dos Estudante na Fase Final – Unidade III 217
Tabela 27: Média do desempenho por estudante na Tarefa-01 (Unidade III) 220

LISTA DE QUADROS

QUADRO 1: Seis habilidades de solução de problemas.....31
QUADRO 2: Etapas para resolução de problemas segundo Polya 34
QUADRO 3: Características gerais dos tipos de Base Orientadora da Ação (BOA).....68
QUADRO 4: Etapas de orientação das Tarefas de Compreensão Conceitual 79
QUADRO 5: Fases/Tarefas – ideias conceituais de Limite 100
QUADRO 6: Indicadores para análise dos dados 103
QUADRO 7: Classificacão da dimensão das Ações Mentais 103
QUADRO 8: Aula Prática (Retroalimentação e Correção).....121
QUADRO 9: Transcrição da aula - Problema da Tangente 157
QUADRO 10: Transcrição da aula - Definição precisa de Limite.....159
QUADRO 11: Resultado das Características das Ações – Diagnóstico Inicial 178
QUADRO 12: Resultado das Características das Ações – Fase formativa e mediadora 185
QUADRO 13: Resultado das Características das Ações – Fase Final 191
QUADRO 14: Síntese do resultado da fase formativa e mediadora 202
QUADRO 15: Resultado das Características das Ações – Diagnóstico Inicial 207
QUADRO 16: Resultado das Características das Ações – Fase Mediadora e Formativa.....211
QUADRO 17: Resultado das Características das Ações – Fase Final 215

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 12

CAPÍTULO I – EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: REFLEXÕES SOBRE AS CONCEPÇÕES DE APRENDIZAGEM E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS 20

1.1 A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E AS CONCEPÇÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM **20**

1.2 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA **26**

1.2.1 Interesse pela resolução de problemas e o conceito de Problema na Educação Matemática 27

CAPÍTULO II: PRESSUPOSTOS TEÓRICOS DA TEORIA HISTÓRICO CULTURAL DE VIGOTSKI 47

2.1 A TEORIA HISTÓRICO CULTURAL DE VIGOTSKI 47

2.2 A TEORIA HISTÓRICO CULTURAL E O CONHECIMENTO MATEMÁTICO 54

CAPÍTULO III – A TEORIA DA FORMAÇÃO POR ETAPAS DAS AÇÕES MENTAIS 57

3.1 BASES TEÓRICAS DA TEORIA DE GALPERIN 57

3.2 ETAPAS DE FORMAÇÃO DAS AÇÕES MENTAIS 64

3.2.1 Etapa Motivacional 65

3.2.2 Etapa de formação da Base Orientadora da Ação (BOA) 66

3.2.3 Etapa de formação da ação no plano material ou materializado 71

3.2.4 Etapa de formação da ação como verbal externa 73

3.2.5 Etapa de Formação da Ação na Linguagem Externa 75

3.3 TAREFA DE COMPREENSÃO CONCEITUAL NO ENSINO DE CÁLCULO: NOSSA PROPOSTA 76

3.4 A ORGANIZAÇÃO DO ENSINO DE CÁLCULO COM BASE NA TEORIA DE GALPERIN: : NOSSA PROPOSTA 80

CAPÍTULO IV – A CONFIGURAÇÃO E OS ASPECTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA 85

4.1. OBJETIVOS E CIRCUNSTÂNCIAS QUE ORIGINARAM A PESQUISA 85

4.2 REFERENCIAL METODOLÓGICO 86

4.3 CONSTRUINDO O ALICERCE DA PESQUISA 87

4.4 O CENÁRIO DA PESQUISA 89

4.4.1 O Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Roraima – IFRR e o Curso de Licenciatura em Matemática 89

4.4.2 A Turma e os estudantes participantes da pesquisa 90

4.5 A DINÂMICA E OS INSTRUMENTOS DA PESQUISA 91

4.6 AS ATIVIDADES PROPOSTAS DURANTE O PROCESSO DE INTERVENÇÃO 93

4.7 A ORGANIZAÇÃO DOS DADOS PARA ANÁLISE E DISCUSSÃO 98

CAPÍTULO V – ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS: APROXIMAÇÃO DA TEORIA E PRÁTICA..... 98

5.1 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS: LIMITE DE FUNÇÃO DE UMA VARIÁVEL REAL 99
5.1.1 Análises Descritiva do Desempenho nas atividades do Nível de Partida.....104
5.1.2 Análise Descritiva do Desempenho da Assimilação na Avaliação Formativa e Mediadora.....123
5.1.3 Análise Descritiva do Desempenho da Assimilação dos Conceitos Gerais 142
5.1.4 Análises por Etapas de Formação das ações Mentais segundo Galperin 153
5.1.4.2 Base Orientadora da Ação: A influência da Orientação nas Aulas Práticas 156
5.1.4.3 Formação da Ação Material ou Materializada nas Atividades Práticas 158
5.1.4.4 Formação da Ação Verbal Externa.....161
5.1.4.5 Formação da Ação em Linguagem Externa para si.....165
5.1.4.6 Formação da Ação em Linguagem Interna: etapa da ação mental 169
5.2 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS: DERIVADAS 177
5.2.1 Análises Descritivas do Desempenho nas atividades no Nível de Partida (Diagnóstico Inicial).....177
5.2.2 Análises Descritivas do Desempenho nas atividades da fase Formativa e Mediadora .184
5.2.3 Análises Descritivas do Desempenho nas atividades da Fase Final.....191
5.2.4 Análises por Etapas de Formação das ações Mentais segundo Galperin – Unidade II .195
5.3 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS: INTEGRAL DEFINIDA DE FUNÇÃO DE UMA VARIÁVEL REAL.....205
5.3.1 Análises Descritivas do Desempenho nas atividades do Nível de Partida (Diagnóstico Inicial).....205
5.3.2 Análises Descritivas do Desempenho da Assimilação na avaliação Formativa e Mediadora.....210
5.3.3 Análises Descritivas do Desempenho da Assimilação dos Conceitos Gerais – Etapa Final 214
5.3.4 Análises por Etapas de Formação das ações Mentais segundo Galperin – Unidade III 218
5.3.4.2 Etapa da Base Orientadora da Ação: a influência da orientação nas aulas práticas ...220
5.3.4.3 Etapa da Formação da Ação no Plano Material ou Materializada 221
5.3.4.4 Etapa da Formação da Ação Verbal Externa.....222
5.3.4.5 Etapa da Formação da Ação em Linguagem Externa para si 223
5.3.4.6 Etapa da Formação da Ação em Linguagem Interna: ação mental 224

CONSIDERAÇÕES FINAIS.....227

REFERÊNCIAS 227

APÊNDICES 242
APÊNDICE A: TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO 242
APÊNDICE B: DIÁRIO ESTRUTURADO 244
APÊNDICE C - GUIA DE OBSERVAÇÃO (Turma).....245
APÊNDICE D - GUIA DE OBSERVAÇÃO 2 - (Estudante).....246
APÊNDICE E – Resultados do Teste Diagnóstico: Análise Descritiva.....247
APÊNDICE F – Resultados da Atividades Formativas e Mediadora: Análise Descritiva.....252
APÊNDICE G- Resultados do Teste Final: Análise Descritiva 258

INTRODUÇÃO

Antes de apresentar nosso objeto de estudo, faremos um breve relato sobre o surgimento desta pesquisa atrelada a minha[1] trajetória pessoal de vida acadêmica e profissional. Considero que a minha formação inicial como professora teve início ainda no ensino médio, tendo em vista que fiz um curso profissionalizante. Orientada pela minha mãe, ingressei no curso de formação de professores, o antigo magistério, aos 15 anos. Obviamente que com esta idade não tinha ainda discernimento do que era ser professora. Conclui o magistério em 1983 e no ano de 1984 complementei este curso fazendo o Adicional em Ensino de Ciências e Matemática, o que dava-me o direito de ensinar Matemática até o 7º ano do Ensino Fundamental.

Após 1984 fui obrigada a parar de estudar, haja vista que, no então Território de Roraima, onde nasci e fiz toda minha trajetória estudantil não existiam universidades. Os roraimenses que possuíam um melhor poder aquisitivo seguiam para outros Estados com o objetivo de se graduarem nos diversos cursos superiores oferecidos no Brasil. Em 1992, com a Universidade Federal já instalada no Estado, ingressei no curso de graduação, cursei Licenciatura e Bacharelado em Matemática, concluindo a licenciatura no primeiro semestre de 1995 e o Bacharelado no segundo semestre de 1996.

Já atuava como professora do Ensino Fundamental desde 1985 e durante o percurso da minha graduação tive a primeira experiência como professora de Matemática do Ensino Médio. Depois de graduada, além de trabalhar como professora de Matemática, trabalhei como assessora pedagógica na área de Matemática, realizava encontros, ministrava cursos e palestras para professores da rede Estadual. Nesta época também, no período de férias, ministrava as disciplinas de Didática da Matemática e Matemática num programa de formação de professores oferecido pela Secretaria Estadual de Educação com o objetivo de formar professores leigos. Atuei como coordenadora pedagógica em duas escolas da rede Estadual de Ensino durante nove anos. Essa trajetória me fez refletir sobre o meu processo de formação e despertou em mim o gosto pelo trabalho com a formação de professores.

Após quase dez anos de graduada, tendo em vista que não existiam no Estado de Roraima Programas de Mestrado e Doutorado, no final do ano de 2004 decidi concorrer a uma das vagas no Programa de mestrado em Ensino de Ciências e Matemática na Universidade Luterana do Brasil, no Rio Grande do Sul, o qual possuía um convênio com a Secretaria Estadual de Educação de Roraima. Ao ser aprovada, atravessei o Brasil em busca

[1] Uso na parte introdutória da Tese a primeira pessoa do singular, pois faço referência ao percurso da minha formação e atuação profissional.

da realização de mais um sonho da minha vida acadêmica e em 2005 ingressei no mestrado mudando-me para a cidade de Canoas no Estado do Rio Grande do Sul. A pesquisa que desenvolvi foi aplicada na formação inicial de professores, em uma turma de licenciandos em Matemática e tratava sobre o uso do Global Position State (GPS) como estratégia de ensino na Geometria Analítica.

Antes de obter o título de Mestre já atuava no Ensino Superior como professora de Cálculo em diferentes cursos. As dificuldades dos alunos nesta disciplina sempre me incomodaram muito e a experiência adquirida ao longo dos anos, na condição de professora destes alunos, me levou a refletir sobre diversos aspectos referentes ao ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral nas diferentes turmas e cursos em que ministrei essa disciplina. Como consequência desta reflexão, começou a brotar um desejo de querer saber mais sobre o ensino e descobrir novas estratégias a serem aplicadas em sala de aula para auxiliar o aluno na aprendizagem, com a chegada das tecnologias em sala de aula, experimentei o uso de calculadoras gráficas e software, os quais auxiliavam e dinamizavam as aulas .

O ponto de partida para esta pesquisa é fruto destas experiências e reflexão. Ao receber o convite para pesquisar sobre a Teoria da Formação das Etapas das Ações Mentais de Galperin no doutorado, logo me veio a ideia de aplicar essas etapas no ensino de Cálculo. Como professora de Matemática e responsável por essa disciplina no curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Roraima (IFRR), conduzi a pesquisa na minha sala de aula, onde atuei como professora e pesquisadora. Durante o período da intervenção contava com a colaboração de duas estagiárias que realizavam o estágio docência do Mestrado e que também coletavam dados para as suas pesquisas. Participávamos do mesmo grupo de pesquisa e estudávamos a mesma teoria.

As leituras sobre o Ensino de Cálculo, a Educação Matemática, a Teoria Histórico Cultural, a Teoria de Formação por etapas das ações mentais, assim como também a socialização de ideias no grupo de pesquisa, levaram-me a desenvolver uma proposta para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral utilizando as Tarefas de Compreensão Conceitual como estratégia, referendada na Teoria de Formação por etapas das ações mentais de Galperin, com os alunos do curso de licenciatura em Matemática na instituição que atuo como docente. Foi dessa experiência que emergiu a questão de investigação desta pesquisa: Quais contribuições a organização do ensino de Cálculo na perspectiva da Teoria da Formação por Etapas das Açoes Mentais, trazem para a aprendizagem dos conceitos de Limite, Derivada e Integral de função de uma variável dos acadêmicos de Licenciatura em Matemática do

Instituto Federal de Roraima – IFRR?

A busca por compreender esse objeto de pesquisa nos levou a constatação que diversos estudos (BARUFI, 1999; D'AVOGLIO, 2002; REZENDE, 2003; KURATA, 2007; MIRANDA, 2010; ABREU, 2011; GARZELLA, 2013; WROBEL E ZEFERINO, 2013) investigaram questões relacionadas ao ensino de Cálculo. Independente da abrangência multidisciplinar, que possui essa disciplina, pois está inserida no currículo das mais variadas áreas do conhecimento, como Engenharia, Química, Física, Matemática, Biologia, Economia, Ciência da Computação, entre outras, de forma geral, estas pesquisas relatam as dificuldades de aprendizagem dos alunos e apresentam críticas à forma como o ensino dessa disciplina vem sendo praticada.

Wrobel e Zeferino (2013) fizeram um mapeamento dos trabalhos publicados sobre o ensino de Cálculo nos últimos dez anos no XLI Congresso Brasileiro de Engenharia, os autores ressaltam que "o ensino de Cálculo nas universidades brasileiras tem sido objeto de questionamento em diversos fóruns em função das dificuldades de aprendizagem apresentadas, bem como pela alta evasão nos primeiros períodos dos alunos matriculados nesta disciplina" (WROBEL E ZEFERINO, 2013, p.1).

Em sua tese de doutorado, Barufi (1999), nos revela alguns dados dessa crise: o índice de não-aprovação em cursos de Cálculo Diferencial e Integral oferecidos, por exemplo, aos alunos da Escola Politécnica da USP, no período de 1990 a 1995, varia de 20% a 75%, enquanto que no universo dos alunos do Instituto de Matemática e Estatística, o menor índice não é inferior a 45% , ou seja, esse dados alarmantes indicam que não se aprova mais do que 55% em uma turma de Cálculo.

Rezende (2003) defende na sua tese de doutorado que parte significativa dos problemas de aprendizagem em Cálculo são de natureza epistemológica e ressalta que tais dificuldades vão além dos métodos e das técnicas de ensino. O autor cita que o ensino de Cálculo passa por uma crise e que essa situação não é exclusividade do Brasil, segundo ele, em países ditos "desenvolvidos" trabalhos sobre esse tema têm sido publicados e recebido destaques por parte da literatura internacional. Cita como exemplo D. Tall, Professor da Universidade de Londres e pesquisador em Educação Matemática, com vários artigos e livros publicados sobre o tema citado, este "tem sido um dos principais articuladores da área de pesquisa 'pensamento matemático avançado', cujas questões giram em torno das dificuldades encontradas nas aprendizagem dos conceitos básicos do Cálculo, tendo a psicologia cognitiva como pano de fundo para as suas análises epistemológicas" (REZENDE, 2003, p. 4).

Rezende (2003) ainda cita outro exemplo internacional que trata dessa inquietação: o

movimento em prol da reforma do ensino de Cálculo, iniciado na década de 80, e que ficou conhecido por "Calculus Reform". Esse movimento tratava sobre a inserção das tecnologias no ensino de Cálculo, o reflexo desse movimento pode ser percebido ainda hoje nos livros didáticos dessa disciplina, os quais trazem uma nova abordagem apresentando calculadoras gráficas, software entre outros recursos tecnológicos, para auxiliar o professor em sala de aula. No entanto, Rezende (2003, p. 20) adverte "que toda e qualquer reestruturação do ensino de Cálculo que não seja fruto de uma análise epistemológica profunda deste, estará condenada ao fracasso. Serão obras de 'maquiagem', onde se disfarçam as aparências, mas se mantém as raízes, isto é, as causas reais do fracasso". O autor ainda cita que "[…] é necessário fazer uma reflexão de natureza epistemológica, séria e realista, sobre o ensino de Cálculo.

Nesse contexto, D. Tall e os pesquisadores da área "Pensamento Matemático Avançado" como já citado neste trabalho, interessa-se em explicar e justificar em suas pesquisas as dificuldades de aprendizagem no domínio da psicologia cognitiva, no caso específico do ensino de Cálculo, procuram estudar como os alunos compreendem o conceito de Limite. Assim, seguindo essa linha de raciocínio, que ressalta a forma pela qual os alunos aprendem determinado conceito e as contribuições da psicologia congnitivista, a nossa pesquisa parte da reflexão das dificuldades de aprendizagem no ensino de Cálculo e procura explicar como o ensino dessa disciplina referendado na Teoria cognitivista de P. Ya. Galperin contribui para a aprendizagem dos conceitos de Limite, Derivada e Integral dos alunos da Licenciatura em Matemática do IFRR.

A teoria de Galperin consiste em encontrar a forma adequada da ação, que se caracteriza pelo nível de apropriação do conhecimento pelo aluno e se dá, a partir de um percurso de transformação da ação externa para ação interna, ou seja, de material para a mental, sendo que tal mudança ocorre em três níveis de ação: Material, Verbal e Mental. Galperin integrou o grupo de estudiosos que fazia parte da escola de Vigotski[2] e portanto, desenvolveu a sua teoria a partir dos pressupostos da Teoria Histórico-Cultural. Era considerado um dos psicólogos-didatas pois sua teoria se desenvolveu no "campo desenvolvimental e experimental" (LONGAREZI E PUENTES, 2013, p. 295).

Leontiev, outro colaborador de Vigotski, sustentava a tese da psique como atividade externa transformada. Vigotski (1998) discutiu o princípio da internalização e a formação de funções psicológicas superiores enfatizando o seu caráter social e mediado, entretanto não

[2] O sobrenome de Lev Semenovich Vigotski aparece na língua portuguesa de diferentes formas, nessa tese adotaremos a forma introduzida no livro "A Construção do Pensamento e da Linguagem" (VIGOTSKI, 2001) que foi traduzido diretamente do russo. Apenas nas citações manteremos a forma escrita pelo autor.

sistematizou essa ideia. Galperin (1957) apoiado nessas duas teses, investigou de forma sistemática o princípio de que é possível a formação de processos mentais a partir de ações planejadas. Esse planejamento se daria com o apoio de objetos externos e através da manipulação desses objetos, perpassaria por uma sequência de etapas, até serem realizadas no plano mental, tornando-se propriedade da psique. Longarezi e Puentes (2013, p. 305) afirmam que "Galperin não só fundamentou nas ideias de Vigotski e Leontiev como também as desenvolveu e as atualizou introduzindo novos conceitos".

Para esses autores, existe uma dependência interna entre os sistemas educativos e o desenvolvimento do psiquismo, ao mesmo tempo que há uma influência do ensino na formação das pessoas. As pesquisas que envolvem essas questões procuram a melhor organização do ensino, visando a sua eficácia e buscando o desenvolvimento integral dos alunos. Além de Vigotski, Leontiev, Luria e Galperin, são considerados expoentes da psicologia e didática russa A. V. Zaporozhets, L. V. Zankov, A. V. Petrovsky, L. Bozhovic. N. Marozova, N. F. Talízina, T. V. Draugunova, M. A. Danolov, M. N. Skatkin, M. I. Majmutov, N. G. Salmina, L. A. Venguer e mais recentemente, Tatiana Akihutina e Yulia Solovieva (LONGAREZI E PUENTES, 2013, p. 11).

No Brasil, há um vasto campo de pesquisas na área da Educação apoiada na teoria desenvolvida por esses teóricos, contudo o nosso interesse se concentrou na Teoria da formação por etapas das ações mentais criada por P. Ya. Galperin. A partir dessa motivação, realizamos uma pesquisa de levantamento no banco de teses e dissertações das universidades e encontramos algumas pesquisas sustentadas por essa teoria, que foram realizadas no âmbito de programas de mestrado e doutorado: Ribeiro (2008); Mendonza (2010); Duarte (2011); Silva (2011); Oliveira (2011); Bassan (2012); Santos (2014); Feitosa (2014) entre outros.

Ribeiro (2008) realizou a pesquisa com estudantes do curso de pedagogia e estudou o processo de apropriação da habilidade de planejar situações de ensino pelos professores das séries iniciais do ensino fundamental, segundo a perspectiva histórico-cultural de L.S. Vigotski, a teoria da atividade, de A.N. Leontiev, e a teoria da assimilação por etapas mentais, de P. Ya. Galperin; a pesquisa de Mendonza (2010) foi desenvolvida na graduação com alunos do curso de Sistema de Informação e consistiu na criação e implementação de uma metodologia para a resolução de problemas em matemática, a qual se sustenta na teoria da atividade e na teoria da formação por etapas das ações mentais.

A pesquisa de Duarte (2011) foi desenvolvida no ensino médio e tem como foco o processo de ensino do conceito de função afim, com abrangência às significações do sistema conceitual dos três campos da Matemática: Aritmética, Geometria e Álgebra; Silva (2011)

procurou estudar, desenvolver e avaliar uma abordagem do ensino de Química, a partir da Base Orientadora da Ação, tratada na Teoria das Ações Mentais por Etapas de Galperin; Oliveira (2011) investigou a possibilidade de se organizar uma unidade didática para formação da habilidade de identificar e explicar os jogos populares tradicionais no processo de formação do licenciando em educação Física, teve como premissa básica a tese formulada por P. Ya. Galperin.

Bassan (2012) buscou evidenciar as possibilidades metodológicas da Teoria da Formação por Etapas das Ações Mentais de P. Ya Galperin para a organização da atividade de ensino voltada à humanização do estudante do 3º ano do ensino fundamental; Santos (2014) investigou a implicação do uso da metodologia da Atividade de Situações Problema (ASP) no estudo de Limite, baseada na teoria de Galperin com alunos da Licenciatura em Matemática; Feitosa (2014) pesquisou a Atividade de Situações Problema como estratégia didática no tratamento da informação no 6º ano do ensino fundamental a partir da teoria de Galperin.

Apesar dos experimentos de Galperin e Talízina terem sido realizadas com crianças, como por exemplo: a investigação desenvolvida N. Pátina (1957) que analisou como se formava nas crianças a ação da escrita; a pesquisa de Talízina e Yákovlev (1968) que investigou o ensino inicial de xadrez, em particular os erros típicos que cometem os enxadristas principiantes; o estudo de Talízina juntamente com S. El Hodari (2001) que realizaram um trabalho com as noções geométricas iniciais (raio, segmento, ângulo, bissetriz, retas), as pesquisas as quais destacamos, tiveram como sujeitos estudantes das séries finais do ensino fundamental, ensino médio e até da graduação.

A nossa pesquisa também foi desenvolvida com estudantes adultos, no curso de graduação e pretende contribuir com uma reflexão acerca das potencialidades das teorias desenvolvidas por Vigotski e seus seguidores, sobretudo, a teoria da Formação por etapas das Ações mentais de Galperin, entender as teses fundamentais desses teóricos e dialogar com eles, visando a compreensão do nosso objeto de estudo, que faz parte da nossa intenção, uma vez que compreendemos que a psicologia da educação vem sendo solicitada a contribuir e, ao longo dos anos, tem acumulado conhecimentos teóricos sobre os processos de aprender e ensinar e assim trazem sugestões que acenam com ricas possibilidades de organizar a prática pedagógica e também no campo da pesquisa educacional.

Esse pensamento nos direcionou para a realização de uma pesquisa em que pudesse colocar em prática tais fundamentos teóricos, mas que também pudesse buscar soluções para algumas questões emergenciais no campo da Educação Matemática, área da nossa atuação e pesquisa. Assumindo esse desafio, temos como objetivo geral dessa pesquisa: investigar se a

organização do ensino de Cálculo baseada nos pressupostos da Teoria da Formação por Etapas das Ações Mentais de Galperin, promove a aprendizagem dos conceitos de Limite, Derivada e Integral de função de uma variável nos estudantes da Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Roraima.

Prevendo alcançar este objetivo, definimos como objetivos específicos: organizar o ensino a partir do processo de assimilação da teoria de Galperin; construir o sistema de ações referendado nessa teoria para resolução de problemas envolvendo os conceitos de Limite, Derivada e Integral de função de uma variável real; proceder a intervenção pedagógica utilizando os sistemas de ações planejados; analisar o uso da Base Orientadora da Ação (BOA) do tipo III pelos alunos na resolução das tarefas propostas em Cálculo; analisar o grau de consciência dos alunos a partir do uso da BOA; avaliar o nível de conhecimentos dos alunos sobre os conceitos de Limite, Derivada e Integral e avaliar o processo de internalização dos conceitos por meio da BOA tendo por base os critérios de generalização e consciência.

Quanto a Metodologia, a pesquisa se enquadra numa abordagem qualitativa. Segundo Fiorentini e Lorenzato (2009, p.110), "a abordagem qualitativa busca investigar e interpretar o caso como um todo orgânico, uma unidade em ação com dinâmica própria, mas que guarda forte relação com seu entorno e contexto sociocultural". Moysés (1997), ressalta que a pesquisa qualitativa é uma tendência crescente no panorama educacional e vem se voltando especialmente para o interior da escola, sobretudo na situação de ensino e aprendizagem.

Assim, o nosso campo de investigação foi a sala de aula, o que caracteriza as investigações qualitativas na educação, como ressaltam Bogdan e Biklen (1994, p. 47): "Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituído o investigador o instrumento principal. Os investigadores introduzem-se e despendem grandes quantidades de tempo em escolas [...]". Os sujeitos da pesquisa foram os licenciandos em Matemática, nas disciplinas Cálculo I e Cálculo II do curso de Licenciatura em Matemática do IFRR, ministrada pela própria pesquisadora, por meio da organização do ensino com o uso da estratégia da resolução de problemas para o estudo dos conceitos de Limite, Derivada e Integral, observando as etapas do processo de assimilação conceitual proposta por Galperin.

Durante o processo de coleta de dados todas as aulas foram filmadas, gravadas e depois de transcritas serviram de base para análise. Além desse instrumento também recorremos a observações das aulas, para isso contamos com o auxílio de duas professoras colaboradoras da pesquisa[3] que fizeram anotações preenchendo um diário de campo, as provas escritas aplicadas antes, durante e depois de cada novo conceito, também foram objeto

[3] As professoras além de colaboradoras, também coletavam dados para as suas pesquisas de Mestrado,

de análise. Quanto à análise dos dados, partimos de pressupostos descritos por Apolinário (2006, p. 159) em relação à pesquisa qualitativa. Ele ressalta que nesse tipo de pesquisa "[...] a análise dos dados terá por objetivo simplesmente compreender um fenômeno em seu sentido mais intenso, em vez de produzir inferências que possam levar à constituição de leis gerais ou a extrapolação que permitam fazer previsões válidas sobre a realidade futura". De posse dos dados coletados, as análises foram realizadas com vistas a elucidar o problema investigado na pesquisa.

A tese final foi organizada em capítulos assim estruturados: O capítulo I intitulado "Educação Matemática: reflexões sobre as concepções de aprendizagem e Resolução de Problemas" trata as perspectivas de ensino da matemática, destacando as tendências atuais com ênfase na resolução de problemas matemáticos e o ensino de Cálculo Diferencial e Integral. No capítulo II, desenvolvemos discussões sobre os pressupostos teóricos da Teoria Histórico Cultural de Vigotski, ampliando a discussão no campo do conhecimento matemático.

No capítulo III formatado com o título "A Teoria de Formação por Etapas das Ações Mentais" discorremos sobre a Teoria das ações Mentais de Galperin, sobre as etapas de assimilação na Teoria de Galperin: a etapa Motivacional, de Formação da Base Orientadora da Ação (BOA), de Formação da Ação no Plano Material, de Formação da Ação na Linguagem Externa e a Etapa Mental da Ação. Finalizamos o capítulo apresentando a proposta para o ensino de Cálculo estruturada a partir das Tarefas de Compreensão Conceitual com base nas etapas da Teoria de Galperin.

No quarto capítulo, detalhamos o percurso metodológico da pesquisa. Neste capítulo, foram discutidas a opção teórico-metodológica da pesquisa, os sujeitos, o contexto e os procedimentos de análise dos dados da pesquisa. O capítulo V foi destinado à análise dos dados, onde apresentamos respostas para a nossa pergunta de investigação e, por fim. tecemos as considerações finais do trabalho.

CAPÍTULO I – EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: REFLEXÕES SOBRE AS CONCEPÇÕES DE APRENDIZAGEM E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A Educação Matemática é definida por Fiorentini & Lorenzato (2009, p. 5) como "[...] uma área de conhecimento das ciências sociais ou humanas, que estuda o ensino e a aprendizagem da Matemática". Esse capítulo destaca algumas questões relacionadas à esta área, enfatizando as concepções de ensino e aprendizagem, fazendo uma reflexão acerca da Resolução de Problemas Matemáticos e o ensino de Cálculo Diferencial e Integral.

1.1 A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E AS CONCEPÇÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM

Como o ser humano aprende? E como criar as melhores condições possíveis para que o aprendizado ocorra na escola? Estudiosos das mais diferentes áreas do conhecimento humano se debruçaram ao longo do tempo e até nos dias atuais na busca de teorias da aprendizagem que possam trazer respostas a estas indagações. Na antiguidade grega foram apresentadas as primeiras explicações baseadas em conceitos, estas buscavam uma forma de compreender o mundo, e principalmente, entender se podemos ensinar alguma coisa a alguém ou se as pessoas possuem saberes inatos.

Platão (427 – 347 a.C.) defendia a tese de que a alma do indivíduo precede o corpo e que, mesmo antes de encarnar, esse indivíduo já possui conhecimento, ou seja, o sujeito já domina algum tipo de conceito desde seu nascimento. Essa perspectiva é chamada de inatista/racionalista e é sustentada pela ideia de que a pessoa naturalmente carrega em sua bagagem hereditária certos tipos de conceitos e habilidades desde que nasce. Baseado nessa concepção, por muito tempo acreditou-se que a interferência do professor no processo de ensino deveria ser o mínimo possível, a este caberia apenas trazer o saber à consciência do estudante. Assim, as condições e possibilidades do conhecimento seriam inatas, ou seja, o sujeito já nasce com a possibilidade de conhecer, estando o conhecimento determinado na bagagem hereditária ou submetido ao processo maturacional (SANTOMAURO, 2010).

Fernando Becker, professor da Faculdade de Educação da Universidade do Rio Grande do Sul – UFRGS, em seu livro "Educação e Construção do Conhecimento", resume essa ideia destacando que, "o estudante aprende por si mesmo".

> Mesmo que a noção de aprendizado como reminiscência não encontre eco na ciência contemporânea, algumas ideias inatistas ainda pipocam nas salas de aula. Para o

> bem e para o mal: se por um lado é interessante levar os alunos a procurar respostas para suas inquietações com independência crescente, por outro é lamentável que muitos docentes sigam explicando o baixo rendimento escolar de certos estudantes (sobretudo os de 'lares desestruturados') porque eles 'não têm habilidade para aprender' (SANTOMAURO, 2010, p. 1).

Para Becker (1993), a corrente racionalista nos repassa a ideia de que nosso cognitivo é dotado de algum conteúdo prévio, independentemente e antes mesmo de qualquer intervenção dos sentidos ou qualquer dado externo ao próprio intelecto. Desta forma, podemos afirmar que toda atividade de conhecimento é exclusiva do sujeito, e não há participação do meio físico e social, desmerecendo o papel e o valor do conhecimento sensível e o da experiência sensorial. O esquema que segue retrata, segundo Becker(1993), a relação epistemológica entre o sujeito e o objeto nessa concepção:

SUJEITO → OBJETO

Pinedo e Pinedo (2008) argumentam que nesta corrente é afirmado que a experiência sensorial é uma fonte permanente de erros e confusões sobre a complexa realidade em que vivemos, para os racionalistas, nossos sentidos muitas vezes nos enganam e, portanto, podem não fornecer o conhecimento verdadeiro. Na defesa da razão, os racionalista apresentam como primeiro exemplo, o rigor, a precisão e a certeza da matemática, uma disciplina puramente dedutiva, eles explicam que certos conhecimentos ou conceitos são inatos e desabrocham em função da maturidade, ainda sugerem que, a partir de fatos concretos o estudante deve construir modelos gerais. Os autores resumem: o aluno deve reinventar as matemáticas com sua própria linguagem na base da realidade que o cerca, ou seja, para conhecer verdades na matemática, é necessário, antes de tudo, colocarmos em dúvida todos os nossos conhecimentos matemáticos. Portanto, para os racionalistas, o ambiente em que a criança vive não interfere na sua aprendizagem.

Outra orientação epistemológica, o empirismo, que teve como precursor Aristóteles (384 – 322 a.C), aponta para o lado oposto da concepção racionalista, a qual defende que o saber está no indivíduo, que o conhecimento vem primeiro e é transmitido do exterior para o interior por meio dos sentidos, isto é, o conhecimento nasce fora do indivíduo, de forma material, e se internaliza através dos sentidos (KAMII, 1988). Para os empiristas o sujeito é considerado como uma tábula rasa, essa ideia reforça o paradigma que ainda hoje está presente na cultura escolar e permeia a atividade docente do educador matemático

influenciando em suas práticas pedagógicas.

Darsie (1999), descreve o modelo de ensino empirista como um modelo livresco e repleto de simbolismo, baseado no acúmulo de informações e dados isolados, no qual reina a disciplina do silêncio. A autora ainda destaca que no caso da matemática, os quadros são cheios de cálculos, fórmulas ou demonstrações para serem memorizadas, ausente de significado real. Nessa perspectiva, o processo ensino-aprendizagem é centrado no professor, que organiza as informações do meio externo e que devem ser internalizadas pelos alunos. Os alunos são vistos apenas como receptores dessas informações e responsáveis pelo armazenamento na memória. São como folhas em branco ou tela sem pintura, na qual se escreve os conhecimentos necessários e, de acordo com o crescimento do sujeito, se desenha o conhecimento vindo de fora.

Assim, essa orientação epistemológica descreve um ensino centrado no professor, apenas ele fala, enquanto ao estudante cabe ouvir as explicações, copiar os modelos que já vêm prontos e acabados, já que o conhecimento se dá sempre de fora para dentro. Apesar dos séculos de distância, o fato é que, a Matemática ainda hoje carrega herança dessas ideias e apresenta, em diversos contextos e níveis de ensino, uma matemática cheia de fórmulas, teoremas, conceitos, propriedades, que não fazem sentido para o estudante, mas que ele deve aprender, e para isso, resta ao professor passar listas intermináveis de exercícios para que o estudante faça e refaça muitas vezes. Nesse modelo de ensino, que chamamos de tradicional, é baseado na concepção empirista, em que ensinar significa transmitir conhecimento e o aprender ocorre por meio da repetição, não há preocupação com o processo e com a forma em que se dá a prendizagem.

John Locke, filósofo empirista, faz uma breve análise sobre essa corrente de pensamento em seu ensaio acerca do entendimento e defende a impossibilidade de princípios inatos na mente. Para ele, a teoria do inatismo é insustentável, uma vez que contradiz a experiência, isto é, se houvesse ideias inatas todas as pessoas, inclusive as crianças e os idiotas gozariam delas. Locke (1978) diz ainda que os argumentos que fundamentam a teoria do inatismo não têm valor de prova e cita como exemplo o fato de haver certos princípios, tanto teóricos como práticos, universalizados não servem como prova para o inatismo porque os mesmos também só podem ser adquiridos mediante a experiência, para ele, alguns dos princípios considerados como universais não o são devido ao fato de boa parte da humanidade ignorá-los.

Locke (1978) deixa claro que as capacidades são inatas, no entanto, o conhecimento é adquirido, pois através do uso da razão somos capazes de alcançar certos conhecimentos e

com eles concordar, mas não descobri-los. Locke diz que "[…] se os homens têm verdades inatas impressas originalmente, e antes do uso da razão, permanecendo delas ignorantes até atingirem o uso da razão, consiste em afirmar que os homens, ao mesmo tempo, as conhecem e não as conhecem" (LOCKE, 1978, p. 40).

Locke (1978, p, 40) segue afirmando que "[...] as demonstrações matemáticas, e outras verdades que não são inatas, não são aceitas tão logo propostas, distinguindo-se, assim, destas máximas e de outras verdades inatas". Ele explica, de modo breve, que estas máximas e as demonstrações matemáticas diferem nisto: "uma tem necessidade da razão, do uso de provas, para demonstrá-la e receber o nosso assentimento, a outra, porém, tão logo entendida, é, sem o menor raciocínio, compreendida e assentada".

> Quem se propuser refletir sem muita atenção acerca das operações do entendimento descobrirá que o pronto assentimento da mente com referência a algumas verdades não depende de uma inscrição natural ou do uso da razão, mas de uma faculdade da mente bem distinta das duas. [...] a razão, portanto, não contribui para ocasionar nosso assentimento a estas máximas, e afirmar que os "homens sabem e concordam com elas, quando chegam ao uso da razão", querendo com isso dar a entender que o uso da razão nos auxilia no conhecimento destas máximas, é inteiramente falso; e, se isso fosse verdadeiro, provaria que elas não são inatas (LOCKE, 1978, p. 40).

No século XX, ganhou espaço no meio educacional, uma nova corrente de pensamento, a interacionista/construtivista, a qual teve como precursor Jean Piaget (1896 – 1980). Kamii (1986) relata que este teórico observou elementos verdadeiros tanto no empirismo, quanto no racionalismo, considerava importante não somente a informação sensorial, mas também a razão, entretanto, a sua postura se aproximava mais da concepção racionalista. De certo modo, a concepção construtivista de Piaget rompe com os modelos de ensino baseados no racionalismo e no empirismo, e apesar de muitas críticas, foi inspiração para muitos estudiosos, inclusive no Brasil.

Conforme Vasconcelos (1996), a divulgação das ideias de Piaget no Brasil tem início no final da década de vinte, no contexto do Movimento da Escola Nova, sendo que a crença liberal escola novista de que a escola seria o instrumento adequado à criação de uma sociedade solidária e fraterna, levou os educadores progressistas, do início do século a acreditarem na proposta de que a realização de inovações pedagógicas poderia mostrar melhores resultados do que os obtidos pela escola tradicional, que não consolidara objetivos sociais e democráticos.

Niemann e Brandoli (2012) explicam que embora os estudos de Jean Piaget não tenham sido feitos para uso em sala de aula, os principais pressupostos de sua teoria

epistemológica revolucionaram a maneira de conceber o desenvolvimento humano e contribuíram na construção de novas teorias pedagógicas, a medida em que o sujeito passa a ser visto como capaz de construir o conhecimento na interação com o meio físico e social. Assim, a concepção de inteligência "[...] como desenvolvimento de uma atividade assimiladora cujas leis funcionais são dadas a partir da vida orgânica e cujas sucessivas estruturas que lhe servem de órgãos são elaboradas por interação dela própria com o meio exterior" (PIAGET, 1987, p. 336), fundamenta teoricamente muitas investigações no campo educacional em busca de novas práticas pedagógicas embasadas no construtivismo.

Nessa concepção, segundo Vasconcelos (1996), o conhecimento tem sua origem a partir da interação entre o mundo do sujeito e o mundo do objeto, interação ativada pela ação do sujeito, que é considerado um ser essencialmente ativo. É importante destacar as duas correntes teóricas principais do construtivismo/interacionismo: a elaborada por Piaget, que valoriza os aspectos psicogênese do conhecimento, e a desenvolvida por Vigotski, que acentua a contínua interação entre as estruturas orgânicas da criança e as condições sociais em que ela vive. A relação entre sujeito e objeto nessa concepção é representada pelo esquema seguinte:

SUJEITO ↔ OBJETO

Becker (1994), ressalta que essa concepção epistemológica supera as anteriores e enfatiza que teóricos como Piaget, Paulo Freire, Freud, Vigotski, Wallon, Luria, Baktin e Freinet possuem um ponto de vista em comum: a ação do sujeito, tratada frequentemente como prática ou práxis, colocada no cerne do processo de aprendizagem. Este autor salienta que essa corrente, não pode ser considerada como uma prática, nem um método, nem uma técnica de ensino, nem uma forma de aprendizagem, nem um projeto escolar, mas sim, uma teoria que permite reinterpretar todas estas citados.

Na pedagogia quando sustentada pela epistemologia interacionista, o professor acredita que o aluno só aprenderá alguma coisa, isto é, construirá algum conhecimento novo, se ele agir e problematizar a sua ação e esse processo far-se-á por reflexionamento e reflexão. Aprendizagem é, por excelência, construção: ação e tomada de consciência da coordenação das ações (BECKER, 1993). Nesse sentido, pode-se afirmar que a concepção contrutivista influenciou muitas tendências pedagógicas, contribuindo na modenização do ensino, inclusive no ensino da Matemática, oferecendo um modo diferenciado do ensino tradicional, passando de uma prática mecânica para uma prática voltada para a construção do conhecimento.

Fiorentini (1995, p. 19), faz uma análise da influência das concepções racionalista, empirista e construtivista/interacionista na Educação Matemática e destaca que "epistemologicamente, essa tendência nega a teoria racionalista de conhecimento, na qual se assentava o formalismo clássico e, sobretudo, o moderno". Na concepção desse autor, o conhecimento matemático, para os racionalistas, partia sempre do sujeito e se produzia por ele de forma isolada do mundo ou da realidade em que vive, isto é, o conhecimento se dava mentalmente, levado a efeito por meio da dedução ou indução lógica.

Ainda conforme Fiorentini (1995), os racionalistas negavam a teoria empirista que sustenta que o conhecimento apenas ocorre mediante os recursos da experiência e dos sentidos, ou seja, a fonte do conhecimento matemático seria o mundo físico e não o sujeito reflexivo. Já para os construtivistas, acrescenta Fiorentini, "o conhecimento matemático não é resultado nem diretamente do mundo físico nem de mentes humanas isoladas do mundo, mas sim da ação interativa/reflexiva do homem com o meio ambiente e/ou com atividades" (FIORENTINI, 1995, p. 20).

Desta forma, tais atividades podem ser desenvolvidas por meio de práticas pedagógicas que proporcionem ao estudante ser um sujeito ativo e participativo nas atividades. A resolução de problemas surge como opção nessas práticas e pode oportunizar a construção de sentido dos conceitos matemáticos, contudo, não se aprende Matemática apenas resolvendo problemas, é necessário, além disso, a reflexão sistemática diante de cada situação e a análise dos procedimentos utilizados para resolvê-los. Assim, evidencia-se a ideia de que primeiro as noções matemáticas sejam usadas como ferramentas na resolução de problemas, para, então, favorecer a construção do sentido, depois essas ferramentas podem ser tomadas como objeto de estudo. Nessa perspectiva, "o aluno deve ser capaz não só de repetir ou refazer, mas também de resignificar em situações novas, de adaptar, de transferir seus conhecimentos para resolver novos problemas" (CHARNAY, 1996, p. 38).

Pozo (1998, p. 09) discorre sobre a resolução de problemas e assinala que:

> Um dos veículos mais acessíveis para levar os alunos a aprender a aprender é a ***solução de problemas***. Diante de um ensino baseado na transmissão de conhecimentos, a solução de problemas pode constituir não somente um conteúdo educacional mas também, e principalmente, um enfoque ou uma forma de conceber as atividade educacionais. A solução de problemas baseia-se na apresentação de situações abertas e sugestivas que exijam dos alunos uma atitude ativa e um esforço para buscar suas próprias respostas, seu próprio conhecimento [grifo do autor].

Em concordância com o autor, salientamos que o ensino baseado na solução de problemas pressupõe encaminhar o aluno para o domínio de técnicas e procedimentos que

mobilizem os conhecimentos e o leve a solução do problema. Nesse sentido, apresentamos na sessão que segue algumas reflexões acerca dos pressupostos teóricos que envolve o processo de resolução de problemas.

1.2 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

No intuito de vincular teoricamente a Resolução de Problemas Matemáticos a uma das concepções de ensino aprendizagem tratadas na seção anterior, faremos uma breve reflexão acerca das bases teóricas as quais esta tendência está mais fortemente ligada. Lambdin e Walcott (2007), citadas por Onuchic (2011), fazem uma relação entre as fases da Educação Matemática e as teorias psicológicas da aprendizagem. As autoras citam que, durante o século XX e até atualmente, o ensino de matemática "experienciou seis fases identificáveis com diferentes ênfases: (1) Exercício e prática; (2) Aritmética significativa; (3) Matemática Moderna; (4) Volta às bases; (5) Resolução de problemas; e, atualmente, (6) Padrões e responsabilidade" (ONUCHIC, 2011, p. 76).

Onuchic (2011) esclarece que a quinta fase que corresponde a Resolução de problemas se deu aproximadamente a partir dos anos 1980 e suas ideias,

> […] apoiavam-se, especialmente, nos fundamentos do construtivismo e na teoria sociocultural, que tem Vygotsky como principal teórico. O foco, nessa fase, foi colocado sobre os processos de pensamento matemático e de aprendizagem por descoberta, no contexto da resolução de problemas. Nessa fase, muitos recursos foram desenvolvidos na forma de coleções de problemas, listas de estratégias, sugestões de atividade e orientações para avaliar o desempenho dos alunos nessa área, sempre visando ao trabalho em sala de aula. Muito desse material contribuiu para que os professores fizessem da **resolução de problemas** o ponto central de seu trabalho (ONUCHIC, 2011, p. 78 – grifo nosso).

Vigotski faz referência à importância do papel do problema nas discussões a respeito do processo de formação de conceito. Na obra de Vigotski (2005) é notória a ênfase dada ao processo de formação de conceitos. Estes são entendidos pelo autor como signos, os quais são construções sociais realizadas em um determinado período histórico, e constituem um sistema de relações e generalizações contido nas palavras e determinado por um processo histórico-cultural. O autor afirma que:

> Todas as funções psicológicas elementares, que costumam ser apontadas, participam do processo de formação de conceitos, mas participam de modo inteiramente diverso como processos que não se desenvolvem de maneira autônoma, segundo a lógica das suas próprias leis, mas **são mediados pelo signo ou pela palavra e orientados para a solução de um determinado problema**, levando a uma nova combinação, uma nova síntese, momento único em que cada processo participante adquire o seu

> verdadeiro sentido funcional (VYGOTSKY, 2001, p. 169-170 – grifo nosso).

Gehlen e Delizoicov (2012), ao investigarem a função e a noção de problema na obra de Vigotski e suas contribuições para o processo de ensino-aprendizagem em ciências, salientam que este teórico não faz referência ao que se denominou, no contexto didático-pedagógico, de classe de problema, ou seja, não explicita quais características os problemas necessitam ter no processo de ensino-aprendizagem. Quando apresenta alguma indicação do que seria um problema, Vigotski está se referindo ao desenvolvimento cognitivo do sujeito, mas não no sentido de planejar, organizar uma prática pedagógica. Eles ainda acrescentam que, o autor não apresenta os critérios de seleção dos problemas, apenas os produtos do seu enfrentamento, isto é, a conceituação científica, dado o papel que ela desempenha no desenvolvimento cognitivo.

Esse vículo que Vigotski faz entre problema e o desenvolvimento cognitivo do sujeito é o que direciona pesquisadores como Gehlen (2009); Mendoza (2010); Poffo (2011); Gehlen e Delizoicov (2012); Alvarenza (2014) e outros a vincularem suas pesquisas que tratam sobre resolução de problemas à concepção teórica deste autor.

1.2.1 Interesse pela resolução de problemas e o conceito de Problema na Educação Matemática

O ensino da Matemática, no início do século XX, tinha como principal característica um trabalho apoiado na repetição, no qual o recurso à memorizaçãoo de fatos básicos era considerado importante. Após alguns anos, já sob outra orientação, os alunos deveriam aprender com compreensão, ou seja, os alunos deveriam entender o que faziam. Porém, essas duas formas de ensino não apresentaram sucesso quanto a aprendizagem dos alunos, alguns aprendiam, mas a maioria não (ONUCHIC E ALLEVATO, 2009).

Nos EUA, durante a década de 1980, educadores matemáticos que acreditavam no potencial da resolução de problemas, trabalhavam na busca de um ensino e aprendizagem com compreensão e significado. Exatamente em 1980, o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) publica um documento intitulado *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics in the 1980's*, com a indicação de que a "resolução de problemas deve ser o foco da matemática escolar" (ONUCHIC, 1999, p. 204).

Iniciou-se então, o interesse pela resolução de problemas na Educação Matemática. Segundo Huete e Bravo (2006, p. 117), "[...] a importância dada ao tema surge devido à falha dos programas feitos anteriormente para o ensino da matemática". Na busca de corrigir essas

falhas, criam-se novos modelos de ensino, surgindo diferentes movimentos, como por exemplo, a "Nova Matemática", o qual recebeu muitas críticas, chegando a ser rejeitado, tendo em vista que não foram apresentados avanços no rendimento acadêmico para a aprendizagem da Matemática. A impressão geral, segundo os críticos, é a de que a Nova Matemática foi muito pior que o ensino, o qual vinha substituir (HUETE E BRAVO, 2006).

Na época, a recomendação, segundo Onuchic (1999), era que na década de 1980 a resolução de problemas fosse o principal objetivo do ensino da matemática. Que o desenvolvimento da habilidade de resolver problemas deveria passar a ser o foco dos profissionais da educação matemática por toda a década e que o desempenho em saber resolvê-los iria avaliar as eficiências de umas das competências em Matemática. Onuchic (1999) ainda relata que no decorrer da década de 1980, foram desenvolvidos inúmeros meios de resolução de problemas para o trabalho em sala de aula: coleções de problemas, listas de estratégias, sugestões de atividades e orientações com o objetivo de avaliar o desempenho na resolução de problemas. Todo esse material incentivou, naquela época, os professores a terem a resolução de problemas como foco do seu trabalho.

Entretanto, os resultados não foram os esperados, tendo em vista que faltou a todos os profissionais envolvidos no processo, coerência em suas ações. Segundo a autora, esse fracasso se deu pelo fato das pessoas ou grupos de pessoas terem concepções diferentes sobre o significado da resolução de problemas. "A resolução de problemas surge como um aspecto central da matemática no ensino fundamental para facilitar a transição de nossos estudantes para o século XXI. Porém, traduzir essa aspiração para as aulas práticas chega, muitas vezes, a produzir consternação e preocupação" (ROSENBAUM E COLS, 1989, p. 7).

Algumas características que dominavam os enfoques do ensino da matemática e resolução de problemas nos anos de 1980 foram relatadas por Santos e Trigo (1996, p. 76 – 77):

- A existência de um tópico situado ao final de uma unidade ou de um ano escolar que era identificado como 'resolução de problemas'. Nessa parte, criava-se uma discussão explícita sobre algumas estratégias e seu papel na resolução de problemas.
- A apresentação dos conteúdos aos estudantes com a posterior seleção de um problema.
- Os professores decidiam iniciar o conteúdo de determinado conteúdo matemático por meio da resolução de algum problema.
- A resolução de problema era apresentada como uma arte que dava lugar a que os estudantes discutissesm uma variedade de problemas, incluindo os não-rotineiros.

No Brasil, foram criados os PCNs – Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL,

1997, 1998, 1999), que apontam como um dos propósitos do ensino de Matemática o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, explorá-los, generalizá-los e até propor novos problemas a partir deles; indicam a resolução de problemas como ponto de partida das atividades matemáticas e discutem caminhos para a Matemática na sala de aula.

> Não somente em Matemática, mas até particularmente nessa disciplina, a resolução de problemas é uma importante estratégia de ensino. Os alunos, confrontados com situações-problema, novas mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégia de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem autoconfiança e sentido de responsabilidade; e, finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação (BRASIL, 2000, p.52).

Onuchic e Allevato (2009) salientam em uma de suas obras, que grande parte dos relevantes conceitos e procedimentos matemáticos podem ser ensinadas por meio da resolução de problemas e que os alunos tornam-se capazes de compreender os conceitos de forma mais significativa. Na década de 1990, a resolução de problemas como metodologia de ensino passa a ser tema discutido em pesquisas. "[...] os problemas são importantes não somente como um propósito de se aprender matemática mas, também, como um primeiro passo de fazer isso" (ONUCHIC, 1999, p. 207).

A perspectiva metodológica da resolução de problemas, segundo Diniz (2001, p. 90), tem como característica principal "considerar como problema toda situação que permita alguma problematização. As situações podem ser atividades planejadas, jogos, busca e seleção de informações, resolução de problemas não convencionais e mesmo convencionais", desde que possibilitem o processo investigativo.

Pozo (1998, p. 09 – *grifo do autor*) defende que "um dos veículos mais acessíveis para levar o aluno a aprender a aprender é a *solução de problemas"*. Um ensino centrado na transmissão de conhecimento, na memorização de fórmulas e na repetição, não prepara o aluno à adaptar-se às mudanças culturais e tecnológicas e nem tampouco para enfrentar situações de tomada de decisão, que certamente serão expostos enquanto profissionais. Sobre a solução de problemas, esse autor ainda esclarece:

> A solução de problemas baseia-se na apresentação de situações abertas e sugestivas que exijam dos alunos uma atitude ativa e um esforço para buscar suas próprias respostas, seu próprio conhecimento. O ensino baseado na solução de problemas pressupõe promover nos alunos o domínio de procedimentos, assim como a

> utilizaçãoo dos conhecimentos disponíveis, para dar resposta a situações variáveis e diferentes (POZO, 1998, p. 09).

Sabe-se que um dos objetivos primordiais da educação é desenvolver a inteligência, isto é, ensinar o indivíduo a pensar. Desta forma, vemos o esforço das ciências na busca por esse desenvolvimento e a matemática assume um importante papel nessa busca, com destaque na Resolução de Problemas, uma vez que esta atividade implica ação em nível de processos cognitivos – atenção, percepção, memória, raciocínio lógico, concentração, inteligência, esquemas, entre outros – ou, como ressalta Sternberg (2003), um esforço para superar obstáculos que estejam no caminho para uma solução.

Há uma infinidade de relações e controvérsias acerca da definição de problema matemático e da resolução de problemas como uma tendência de ensino-aprendizagem na matemática. Diferentes teóricos abordam, conceituam e caracterizam esse enfoque sob diversos pontos de vista e trazemos, a seguir, as contribuições de alguns autores, como Leontiev (1978); Rubinstein (1966); Huete e Bravo (2006); Esaulov (1972); G. A. Ball (1970); Majmutov (1983); Sternberg e Grigorenko (2003), que abordam essa temática a partir de uma perspectiva psicológica.

Leontiev (1978) assinala que deve-se entender por problema um fim dado em determinadas condições e segue explicando que todo problema apresenta a quem o resolve a necessidade de obter determinado produto (fim) que não pode ser alcançado por qualquer via, mas somente por aquela que as condições do problema permite.

Rubinstein (1966, p. 109), citado por Huete e Bravo (2006, 125), destaca o caráter ativo do sujeito e descreve que um problema deve ser compreendido como determinada situação problemática de que o sujeito tem consciência. O autor "parte do estabelecimento de uma diferença entre a situação problemática e o próprio problema, compreendendo-se a primeira como aquela situação que apresenta elementos desconhecidos ou explícitos". Rubinstein admite que o problema surge precisamente a partir da situação problemática e, ao contrário dela, caracteriza-se pela forma consciente do sujeito em tentar alcançar um determinado objetivo. Desta forma, organiza e desenvolve sua atividade mental na busca de resolver o problema.

Esaulov (1972) e G. A. Ball (1970) expressam definições muito próximas entre si, ambos percebem o aspecto psicológico como elemento central. Esaulov salienta que todo problema é resultado de uma falta de correspondência ou contradição entre processos informativos e cabe a quem resolve, realizar as transformações para eliminar essa contradição. Por outro lado, G. A. Ball, caracteriza o problema como aquela situação que necessita a

realização de determinadas ações, sejam elas, práticas ou mentais (*Apud* HUETE E BRAVO, 2006, p. 125).

Já Majmutov (1983), tem uma compreensão mais próxima de Esaulov quando admite que na literatura científica, com muita frequência, se identifica o problema como um dilema e ainda acrescenta que um problema se diferencia de dilema pela sua importância e complexidade na solução. Este autor conceitua problema e enfatiza que no idioma russo literário contemporâneo, "[...] a palavra problema significa uma questão complexa (ou uma tarefa), que exige sua solução ou investigação" (p. 57).

Segundo Sternberg e Grigorenko (2003), após décadas de discussões, os psicólogos chegaram a um consenso razoável em relação aos processos de ordem superior usados na resolução de problemas. "Os nomes desses processos podem diferir para diferentes psicólogos, mas os processos, não" (p. 50). O Quadro 1 apresenta uma versão desse conjunto de processos. "Essa lista de seis habilidades apresentadas não é exaustiva, nem são as habilidades mutuamente exclusivas. Mas os processos da lista representam o que as pessoas fazem quando resolvem problema" (STERNBERG E GRIGORENKO, 2003, p. 50).

QUADRO 1: Seis habilidades de solução de problemas

1 -	Identificar o problema
2 -	Alocar recursos
3 -	Representar e organizar as informações
4 -	Formular as estratégias
5 -	Monitorar as estratégias de solução de problemas
6 -	Avaliar as soluções

Fonte: Sternberg (2003).

Sternberg (2003) explica cada uma dessas habilidades:

1- A identificação do problema, implica reconhecer um objetivo a ser alcançado, consiste em identificar os conteúdos envolvidos no enunciado que, por sua vez, determinarão as estratégias que possibilitarão a solução do problema;
2- Alocação de recursos, tais como tempo ou mesmo recurso mental - Sternberg admite que alguns problemas demandam maior quantidade de tempo para serem resolvidos que outros. No entanto, os melhores alunos têm mais probabilidades de passar mais tempo na fase inicial, decidindo como resolver um problema, e menos de fato o resolvendo. Ao gastar mais tempo antecipadamente pensando no que fazer, os

estudantes eficazes têm menos probabilidade de serem vítimas de falsos começos, de caminhos tortuosos e de todos os tipos de erros;

3- Organização das informações, isto é, integrar todas as informações que acredita precisar para realizar a tarefa de forma eficaz. Muitas vezes problemas não são resolvidos, por não se darem conta das informações que se tem ou de como elas se encaixam;
4- A construção de estratégias, que pode envolver a análise, ou seja, desmembrar o todo de um problema complexo em elementos gerenciáveis, ou pode envolver o processo complementar de síntese, isto é, juntar vários elementos para organizá-los em algo útil. As estratégias complementares envolve o pensamento divergente, onde se tenta gerar um conjunto diversificado de soluções alternativas possíveis para um problema; entretanto, após examinar as possibilidades, deve-se desenvolver o pensamento convergente, para afunilar as várias possibilidades e convergir para a melhor resposta possível;
5- Monitorização do processo de solução, significa fazer várias verificações ao longo do caminho para se certificar da proximidade do objetivo desejado;
6- Avaliação, processo onde muitas vezes avanços fundamentais acontecem e novos problemas podem ser reconhecidos. É nesta etapa que o problema pode ser redefinido e é possível que surjam novas estratégias. Novos recursos também podem tornar-se disponíveis ou os já existentes podem ser usados mais eficazmente. Dessa forma, o ciclo se completa quando leva a novas ideias e recomeça.

Observamos uma relação muito próxima entre a lista dessas seis habilidades de solução de problemas desenvolvidas por Sternberg com as etapas de solução de problemas criada por Polya, as quais serão apresentadas e discutidas ainda nesse trabalho. Afinal, inúmeros estudiosos quando estudam resolução de problemas se apoiam nos pressupostos teóricos de Polya, que é uma referência nessa abordagem.

Sem levar em consideração o aspecto psicológico, outros teóricos discutem sobre problema matemático e resolução de problemas. Trazemos para reflexão, as contribuições de Fridman (1977); Mayer (1986); Echeverría e Pozo (1998); Onuchic (1999); Marco (2004); Stewart (2006); Dante (2010); Onuchic e Alevato (2011); Onuchic e Alevato (2013); dentre outros. Fridman (1977) define ‘Problema’ simplesmente como ‘Matemática’, para ele o problema é visto como determinado sistema material, sem que haja a intervenção do psicológico (*Apud* HUETE E BRAVO, 2006, p. 125).

Segundo Mayer (1986, p. 19), qualquer definição de problema deveria consistir em três ideias: primeira, o problema está atualmente em um estado; segunda, deseja-se que o problema esteja em um outro estado e terceira, não há caminho direto e óbvio para se realizar a mudança. Para Echeverría e Pozo (1998), uma situação apenas é definida como problema a medida em que existe um reconhecimento dela como tal, e na medida em que não dispomos de procedimentos para resolvê-la de maneira rápida, ou seja, necessita de uma reflexão ou tomada de decisão sobre a ordem dos passos que devem ser seguidos.

Dante (2010), conceitua problema como um obstáculo a ser vencido, algo que necessita de solução e requer o pensar consciente do sujeito para resolvê-lo. Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática também trazem a definição para problema:

> [...] uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, no entanto é possível construí-la. Em muitos casos, os problemas usualmente apresentados aos alunos não constituem verdadeiros problemas, porque, via de regra, não existe um real desafio nem a necessidade de verificação para validar o processo de solução (BRASIL, 1997b, p. 44).

Echeverría e Pozo (1998), advertem que encaminhar o currículo para a resolução de problemas significa pesquisar e organizar situações abertas a fim de que o aluno seja levado a buscar e criar suas próprias estratégias para a solução dos problemas, isso o deixará preparado para dar resposta às perguntas escolares e também às diferentes situações da realidade cotidiana. Poggioli (2001), compara a solução de um problema com uma meta a ser alcançada, nesse sentido, a autora afirma que a meta está associada a uma situação inicial e que as atividades desenvolvidas pelos sujeitos nesse percurso têm por objetivo operar sobre a situação inicial para transformá-la em meta. Ou seja, na concepção da autora, existe um percurso que vai da compreensão do problema até ao cumprimento da meta estabelecida para solucioná-lo.

Há autores que embora concordem que não existam regras rígidas que garantam a solução de uma problema, estabelecem alguns princípios, habilidades, etapas ou caminhos a serem seguidos para que o estudante perpasse por esse percurso. Sternberg (2006), já referendado nesse trabalho, descreve seis habilidades para a resolução de problemas; Polya na sua obra "A arte de resolver problemas", aponta quatro etapas para solucionar problemas. Reconhecido como primeira referência na explicitação de etapas, Polya (1978), promove mudanças que implicaram em uma reelaboração de estratégias metodológicas por educadores matemáticos no que diz respeito a resolução de problemas, foi um dos precursores no estudo deste tema. Onuchic e allevato (2011, p. 34) destacam que "[…] Em seu trabalho, Polya

preocupou-se em descobrir como resolver problemas e como ensinar estratégias que levassem a enxergar caminhos para resolver problemas".

Muitos estudiosos seguem sua abordagem, defendem a ideia de que, a fim de atender às peculiaridades presentes na tarefa de solucionar situações-problema, é preciso que se adotem estratégias que possam facilitar uma orientação de como se resolve tal situação. A seguir, apresentamos em forma de quadro, as etapas desenvolvidas por Polya para a resolução de problema com uma breve descrição de cada uma.

QUADRO 2: Etapas para resolução de problemas segundo Polya

Etapa	Breve Descrição
1ª - Compreensão do problema	Nessa etapa é necessário ficar claro para o aluno qual a incógnita, quais os dados, qual é a condicionante, etc.
2ª - Estabelecimento de um plano	Aqui o aluno deve estabelecer relação entre as variáveis do problema e o que pretende atingir.
3ª - Execução do plano	A partir da análise do plano elaborado, o aluno deve colocar o plano em ação, ou seja, fazer esquemas, desenvolver cálculos, pesquisar solução de outros problemas semelhantes, encontrar a asolução do problema.
4ª - Análise da solução	Revisão da solução e correçãoo de possíveis erros.

Fonte: Adaptado de Polya (1995).

O modelo criado por Polya foi e continua sendo um método muito eficaz e serve de inspiração para muitos teóricos, uma vez que este autor não preocupou-se apenas com a resposta do problema, mas sobretudo, nas estratégias a serem usadas pelo sujeito que se interessa na solução de problemas matemáticos. Ele apresenta as quatro etapas, entretanto não obriga que as mesmas sejam seguidas na sequência dada por ele, caso necessário, pode-se transpor a sua ordem ou até mesmo alterar. Assim, para melhor compreensão apresentamos com mais detalhe o modelo de Polya (1995, p. XII e XIII):

1- Primeiro – é necessário compreender o problema: Qual é a incognita? Quais são os dados? Qual é a condicionante? É possível satisfazer a condicionante? A condicionante é suficiente para determinar a incognita? ou é insuficiente? Ou redundante? ou contraditória? Ainda é recomendável que: Trace uma

figura; adote uma notação adequada; separe as diversas partes da condicionante. É possível anotá-las?

2- Segundo – no estabelecimento de um plano é necessário que: encontre a conexão entre os dados e a incógnita; é possível que seja obrigado a considerar problemas auxiliares se não puder encontrar uma conexão imediata; é necessário chegar afinal a um plano para a resolução. Já viu o problema antes? ou já viu o mesmo problema apresentado sob uma forma ligeiramente diferente? conhece um problema correlato? conhece um problema que lhe poderia ser útil? "Considere a incógnita e procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante". Encontrando um problema correlato e já antes resolvido, "[…] é possível utilizá-lo? É possível utilizar o seu resultado? é possível utilizar o seu método? Deve-se introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível a sua utilização?"

3- Terceiro – na execução do plano de resolução, veirifique cada passo. "É possível verificar claramente que o passo está correto? É possível demonstrar que ele está correto?"

4- Quarto – examine a solução obtida: Tem como verificar o resultado? E o argumento, é possível verificar? "[…] É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível perceber isto num reliance? É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?"

Onuchic (1999, p. 210), refletindo sobre o método desenvolvido por Polya escreveu que:

> 'Resolver problemas' era o tema mais importante para se fazer matemática e 'ensinar o aluno a pensar' era a sua importância primeira. Um tema que fundamenta a investigação e resolução de problemas em matemática é 'como pensar'. Polya insistia que se tomasse muito cuidado nos esforços feitos para se ensinar a 'como pensar' e que, na resolução de problemas, não se transformasse em ensinar 'o que pensar' ou 'o que fazer' (ONUCHIC, 1999, p.210).

Alguns autores, como Mayer citado por Echeverría (1998, p. 51), defendem que as quatro etapas definidas por Polya podem ser reduzidas a duas: compreensão e solução do problema, uma vez que, o aluno compreendendo o problema já traduz em expressão, passando para a linguagem matemática para proceder a solução, ou seja, essa ideia despreza o processo e preocupa-se apenas com o resultado final. Contudo, outros teóricos defendem que as etapas

descritas por Polya, ao invés de serem reduzidas, devem serem ampliadas, um exemplo foi o trabalho desenvolvido por Marco (2004) na sua pesquisa de mestrado.

Marco (2004) amplia a visão de resolução de problemas sugerida por Polya (1995) e apoiada em Caraça (2000) propõe a construção de conceitos matemáticos para a resolução de problema, a autora estabelece um momento anterior à primeira etapa descrita por Polya:

> […] o estabelecimento do **inesperado,** que se caracteriza como o momento nebuloso em que o sujeito se depara com o problema e este passa a ser seu, ou seja, o sujeito está no problema de forma integral: com suas emoções, ansiedades, sentimentos, hesitações, alegrias e com a possibilidade de rever seus pensamentos (MARCO, 2004, p. 28 – *grifo da autora*).

Compartilhamos plenamente com o ponto de vista de Marco (2004) e acreditamos na necessidade de uma etapa que antecede à compreensão do problema, o momento em que o aluno precisa estar consciente da situação a qual irá se debruçar. Compreendemos também a importância do papel do professor nessa etapa, este deverá promover o envolvimento do aluno com o problema, de modo que ele sinta-se atraído e predisposto a resolvê-lo. Sobre isso, Majmutov (1983) assegura que a busca mental para a resolução de um problema inicia-se a partir das condições de uma situação problema aceita pelo estudante, isto é, o sujeito deve aceitar a contradição objetiva da tarefa como problema.

Stewart (2006) no seu livro de Cálculo, Volume I, trabalha basicamente todos os conteúdos partindo de uma situação problema, esse autor explica que não existem regras rígidas para garantir sucesso na solução de problemas, mas, segundo ele, é possível esboçar alguns passos gerais no processo de resolução. “Esses passos e princípios são tão-somente o senso comum tornado explícito”. Adaptado de Polya, os passos descritos por Stewart (2006, p. 80) são:

1º) **Entendendo o problema**: é necessário ler e assegurar que entendeu claramente o problema, o que é desconhecido? quais são as quantidades dadas? quais são as condições dadas? para muitos problemas é proveitoso fazer um diagrama, introduzir uma notação apropriada;

2º) **Planejando**: “encontre uma conexão entre a informação dada e a pedida que o ajudará a encontrar a desconhecida. Em geral ajuda a perguntar-se explicitamente: ‘Como posso relacionar o que foi dado com o que foi pedido?’

3º) **Cumprindo o plano**: a partir do plano delineado na etapa anterior, para cumpri-lo deve-se verificar cada etapa do plano e escrever os detalhes que provam a correcão de cada

etapa.

4º) **Revendo**: tendo completado a solução, é prudente revisá-la, por três motivos, primeiro, para verificar se foram cometidos erros; segundo, para ver se não há uma forma mais fácil de resolver o problema e terceiro, é que a revisão deixa o sujeito familiarizado com o método de solução que poderá ser útil na solução de futuros problemas (STEWART, 2006, p. 80 – 81).

Envolvidos com o tema Resolução de Problemas, e assumindo a concepção de trabalhar Matemática através dessa tendência, o Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas (GTERP), criado por volta de 1989 e coordenado pela Profa. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic, na UNESP – Rio Claro/SP, tem sido um núcleo gerador de atividades de aperfeiçoamento, de investigações e de produção científica na linha de Resolução de Problemas. Esse grupo adotou um processo de trabalho o qual designou de Forma pós-Polya de ver a resolução de problemas. O grupo passou a empregar a palavra composta ensino-aprendizagem-avaliação, dentro de uma dinâmica de trabalho para a sala de aula, compreendida como uma metodologia (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011).

> Ao considerar o ensino-aprendizagem-avaliação, isto é, ao ter em mente um trabalho em que estes três elementos ocorrem simultaneamente, pretende-se que, enquanto o professor *ensina*, o aluno, como um participante ativo, *aprenda*, e que a avaliação se realize por ambos. O aluno analisa seus próprios métodos e soluções obtidas para os problemas, visando sempre à construção de conhecimento. Essa forma de trabalho do aluno é consequência de seu *pensar matemático*, levando-o a elaborar justificativas e a dar sentido ao que faz. De outro lado, o professor avalia o que está ocorrendo e os resultados do processo, com vistas a reorientar as práticas de sala de aula, quando necessário (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 81 – *grifo das autoras*).

Na metodologia desenvolvida pelo GTERP, conforme Onuchic e Allevato (2011), "os problemas são propostos aos alunos antes de lhes ter sido apresentado, formalmente, o conteúdo matemático necessário ou mais apropriado à sua resolução que, de acordo com o programa da disciplina para a série atendida, é pretendido pelo professor" (p. 85). Dessa forma, explica Allevato e Onuchic (2009), o ensino-aprendizagem de um conceito matemático inicia com um problema que expressa aspectos-chave desse tópico, devem ser desenvolvidas técnicas matemáticas na busca de respostas razoáveis ao problema dado. A avaliação do desempenho dos alunos é realizada de forma contínua, durante a resolução do problema. .

Nessa pesquisa, elaboramos uma estratégia para trabalhar os conceitos de Cálculo Diferencial e Integral no ensino superior utilizando a resolução de problemas como ponto de partida e orientação para aprendizagem de cada conceito estudado. Essa estratégia se

apresenta como uma combinação dos passos descritos por Polya (1978) para solução de problemas e as etapas descritas por Galperin na teoria da formação por etapas das ações mentais, a qual "[...] objetivava organizar e estruturar o ensino de forma tal que favorecesse a aprendizagem dos conceitos" (LONGAREZI E PUENTES, 2013, p. 293). Nesse sentido, ampliando as considerações dadas por Polya (1978) para a resolução de problemas, e ponderando o aspecto psicológico das etapas descritas por Galperin em sua teoria, apresentamos uma proposta de resolução de problemas que denominamos *Tarefas de Compreensão Conceitual* a qual será detalhada no Capítulo 3.

É interessante ressaltar os pontos positivos do trabalho docente com o uso da resolução de problemas. Muitos autores citam os benefícios que essa estratégia podem trazer ao estudante, dentre os quais, citamos Dante (2010), que enuncia esses benefícios em vários aspectos: desenvolve o poder de comunicação do aluno quando os problemas são trabalhados oralmente; valorizam os conhecimentos prévios dos alunos; faz o aluno pensar produtivamente; desenvolve o raciocínio do aluno; ensina o aluno a enfrentar situações novas; dar aos alunos a oportunidade de se envolver com aplicações da matemática e torna as aulas mais desafiantes e interessantes

Apesar desses benefícios citados por Dante (2010) e ainda muitos pontos positivos que se observam na resolução de problemas, formular problemas matemáticos não é uma tarefa fácil, exige habilidades que nem sempre o professor possui, no entanto, se este tem com clareza os objetivos que pretende alcançar, já é um passo importante. Compreender teoricamente essa abordagem de ensino, também é imprescindível ao professor para que não cometa erros e saiba selecionar atividades que se constituem como um problema matemático e não apenas como um exercício.

Sobre esse aspecto, Echeverría e Pozo (1998), assinalam que um problema se diferencia de um exercício a medida em que, nos exercícios, dispomos de mecanismos que nos levam imediatamente à solução, enquanto que nos problemas, não dispomos de procedimentos automáticos que permitam a solução, exige de alguma forma, um processo de reflexão ou uma tomada de decisão sobre a sequência de passos a serem seguidos.

> […] Por isso, é possível que uma mesma situação represente um problema para uma pessoa enquanto que para outra esse problema não exista, quer porque ela não se interesse pela situação, quer porque possua mecanismos para resolvê-la com um investimento mínimo de recursos cognitivos e pode reduzi-la a um simples exercício (ECHEVERRÍA E POZO, 1998, p. 16)

Esses autores ainda esclarecem que, a solução de problemas e a realização de

exercícios "constituem um *continuum* educacional cujos limites nem sempre são fáceis de estabelecer" (p. 17). No entanto, é importante salientar que nas atividades de sala de aula a distinção entre exercícios e problemas deve ser bem definida, e sobretudo, esclarecido para o aluno que as tarefas exigem algo mais de sua parte do que um simples exercício repetitivo (ECHEVERRÍA E POZO, 1998).

Podemos perceber diante das reflexões, discussões e conceitos tratados no âmbito da resolução de problemas, que houve algumas mudanças atingindo as salas de aula, entretanto ainda é possível encontrar professores que não utilizam essa abodagem de forma correta; como cita D'Ambrosio (2008), o professor propõe ao aluno que resolva determinado problema, aplicando uma sequência de cálculos, conforme o modelo ensinado anteriormente, uma mera repetição do que foi ensinado, recaindo em um ensino meramente tradicional e racionalista que privilegia a repetição em detrimento da compreensão dos conceitos estudados. Huete e Bravo dissertam sobre isso:

> Em torno de 70% dos sujeitos apresentam dificuldades para a resolução de problemas matemáticos. Observa-se neles a tendência geral de imitar modelos realizados anteriormente, articulando perguntas que deixam a descoberto sua falta de segurança e compreensão dos conceitos básicos (HUETE e BRAVO, 2006, p.110).

Por outro lado, há educadores matemáticos, livros didáticos e programas de ensino preocupados em relacionar os conhecimentos matemáticos com problemas que podem ser encontrados no dia-a-dia do estudante e até mesmo em outras áreas do conhecimento. Como exemplo, citamos a preocupação de Stewart (2006), o qual descreve que na elaboração dos problemas propostos em seu livro de Cálculo, despendeu junto com seu assistente um bom tempo em "bibliotecas, contatando companhias e agências governamentais e procurando na internet por dados do mundo real para introduzir, motivar e ilustrar conceitos do Cálculo" (p. ix). Essas iniciativas podem desenvolver nos alunos a criatividade, a capacidade crítica e a independência para criar novos modelos de resoluções, possibilitando-lhes compreender os conceitos matemáticos de forma mais significativa.

Dadas as reflexões aqui discutidas sobre o conceito de problema matemático e resolução de problemas, a seção que segue apresenta questões relacionadas ao Cálculo Diferencial e Integral, explicitando aspectos históricos e epistemológico do Cálculo, bem como destacando questões relacionadas ao seu ensino.

1.3 CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

1.3.1 Aspectos Históricos e Epistemológicos

Nessa seção apresentamos de forma breve alguns aspectos relacionados as origens primitivas do Cálculo Diferencial e Integral. Segundo Batista (2010), historicamente, é difícil situar com precisão as origens do Cálculo. Problemas de quadratura de figuras planas, a delimitação de terrenos destinados ao plantio nas margens dos rios, o cálculo do volume de um silo ou ainda questões financeiras, envolvendo valores pagos sobre um empréstimo, são antigas questões as quais suscitaram ideias que, sem dúvida, desempenharam um papel importante no seu desenvolvimento.

Campos (2006) relata que o surgimento do cálculo infinitesimal é um assunto que provoca um interesse especial entre os historiadores da ciência, esse interesse, segundo o autor, se dá, principalmente, pelas controvérsias que circundam o seu desenvolvimento. O cálculo surge em um período em que o modelo de matemática herdado da antiguidade vinha sofrendo questionamentos e modificações.

> O século XVII registra uma grande efervescência na produção matemática, quando inúmeras novas teorias vinham surgindo, às vezes ao mesmo tempo em lugares diferentes. E é exatamente este tipo de controvérsia, quanto à prioridade na invenção, que caracteriza o surgimento do cálculo e que lança muitas questões sobre a análise histórica do desenvolvimento da ciência, sendo que este evento explicado de diferentes maneiras (CAMPOS, 2006, p. 53 – 54).

As discussões filosóficas, segundo Campos (2006), a respeito da relação entre considerações de quantidades infinitamente pequenas e conceitos de espaço e tempo, sobre a natureza de entes contínuos e a possibilidade de sua divisão infinita, foram ideias que originaram o Cálculo. Daí o nome Cálculo Infinitesimal. Segundo o autor, "esta noção de infinitésimos e os problemas lógicos provocados por ela, seguiram o desenvolvimento do Cálculo até o século XIX. Neste período houve uma restruturação das bases do Cálculo, que substituiu as quantidades infinitamente pequenas, pelos conceitos de número e limite" (CAMPOS, 2006, p. 56).

A história do Cálculo é marcada pelo esforço intelectual de grandes nomes da história: Arquimedes de Saracusa (287-212 a. C.), René Descartes (1596-1650 d. C.), Pierre de Fermat (1601-1665), Isaac Newton (1642-1727 d. C.), Gottfried Wilhem Leibniz (1646-1716 d. C), entre outros. Boyer (1974), relata que a história do Cálculo inicia com um importante personagem, Arquimedes de Saracusa (287-212 a. C.), tido como o maior matemático da antiguidade. Embora a matemática grega tenha sido descrita como essencialmente estática, "[…] Arquimedes, em seu estudo da espiral, parece ter achado a tangente a uma curva por

considerações cinemáticas aparentadas ao cálculo diferencial" (BOYER, 1974, p. 93).

> Pensando num ponto sobre a espiral $r = a\theta$ como sujeito a um duplo movimento – um movimento radial uniforme, afastando-se da origem das coordenadas e um movimento circular uniforme em torno da origem – ele parece ter achado (através do paralelogramo de velocidades) a direção do movimento (logo da tangente à curva) observando o resultado dos dois movimentos componentes. Parece ser esse o primeiro caso em que foi achada a tangente a uma curva que não era um círculo (BOYER, 1974, p. 93 – 94).

A obra *Sobre Espirais*, foi considerada a mais difícil de todas as obras de Arquimedes, embora tenha sido muito admirada, foi pouco lida. Como contribuição ao Cálculo Integral, Arquimedes conseguiu resolver a questão de quadrar uma secção cônica – um segmento de parábola. Pelo método de exaustão, embora a prova seja longa e elaborada, Arquimedes provou com rigor que a área *K* de um segmento parabólico é quatro terços da área de um triângulo *T* com a mesma base e mesma altura (BOYER, 1974).

Boyer (1992, p.7) declara que:

> Ninguém no mundo antigo iguala-se a Arquimedes, quanto à invenção e à demonstração, ao lidar com problemas relacionados ao Cálculo. No entanto, o teorema geral mais antigo em Cálculo não se deve a Arquimedes, mas a matemáticos gregos que viveram, provavelmente, meia dúzia de séculos mais tarde.

A partir do segundo terço do século XVII, segundo Boyer (1974), a França veio a ser o indisputado centro da matemática e as figuras principais foram René Descartes (1596 – 1650) e Pierre de Fermat (1601 – 1665). Uma das principais descobertas de Fermat não foi publicada durante sua vida, em um tratado chamado *Método para achar máximos e mínimos*, Fermat "considerando lugares dados (em notação moderna) por equações da forma $y = x^n$; por isso elas são frequentemente hoje chamadas 'parábolas de Fermat' se *n* é positivo ou "hipérboles de Fermat' se *n* é negativo" (BOYER, 1974, p. 255). Foi interessado nas questões que envolvem a geometria analítica de curvas planas de grau superior, que Fermat foi mais além e desenvolveu o processo hoje chamado diferenciação, pois o método que Fermat desenvolveu para achar máximos e mínimos de um polinômio equivale a achar $\lim_{E\to 0} \frac{f(x+E)-f(x)}{E}$ e igualar isso a zero.

Ainda buscando desenvolver a sua geometria analítica, Fermat descobriu também como aplicar seu processo de valores vizinhos para achar a tangente a uma curva algébrica da forma $y = f(x)$. Além disso, algum tempo depois de 1629, Fermat chegou a um teorema sobre a área sob as curvas da forma $y = x^m$. "[…] Para achar a área Fermat a princípio parece ter usado fórmulas para as somas das potências dos inteiros, ou desigualdades da forma

$1^m + 2^m + 3^m + \cdots + n^m > \frac{n^{m+1}}{m+1} > 1^m + 2^m + 3^m + \cdots + (n-1)^m$, para estabelecer o resultado para todos os valores inteiros positivos de *m*" (BOYER, 1974, p. 256). A contribuição de Fermat, segundo Boyer (1974, p. 245), levou Laplace a assegurar: "Fermat, o verdadeiro inventor do Cálculo Diferencial".

Apesar do reconhecimento por parte dos historiadores da matemática acerca das contribuições dadas ao Cálculo por Arquimedes, Descartes, Fermat e seus contemporâneos, Newton e Leibniz que são apontados como os maiores responsáveis pelo desenvolvimento do Cálculo. Conforme Boyer (1974, p. 291), "Newton tornou-se o efetivo inventor do Cálculo porque foi capaz de explorar a relação inversa entre inclinação e área através de sua nova análise infinita". É claro que as principais ideias que envolvem o Cálculo já eram conhecidas pela comunidade matemática, como por exemplo, o método dos indivisíveis (infinitésimos) e o método da exaustão, que embora bem sucedidos não foram sistematizados como um procedimento geral que viessem a possibilitar a resolução de problemas com mais eficiência. Foi exatamento nesse ponto as contribuições de Newton e Leibniz, os quais aperfeiçoaram as técnicas associadas ao Cálculo e deram origem aos fundamentos mais importantes para o ensino de Cálculo, como a formalização das Derivadas e as Integrais.

Sobre isso Boyer (1974, p. 292) relata: "Newton não foi o primeiro a diferenciar ou integrar, nem a ver a relação entre essas operações no Teorema Fundamental do Cálculo. Sua descoberta consistiu na consolidação desses elementos num algoritmo geral aplicável a todas as funções, sejam algébricas, sejam transcedentes". Grattan-Guiness (1997), assinala que as histórias e os livros-texto concordam que Newton e Leibniz inventaram o Cálculo e apontam para o "Teorema Fundamental, o princípio de que diferenciação e integração são processos inversos, como principal fonte de avaço: $\frac{d}{dx}\int f(x)dx = \int \frac{d}{dx} f(x)dx = f(x)$, para expressar o problema do simbolismo moderno"

> Contudo, este teorema é somente parte de sua contribuição, e a segunda parte dela. Estes dois matemáticos primeiramente perceberam que a finalidade do Cálculo era encontrar novas funções ou relações das variáveis de uma dada função ou relação: df(x)/dx, ou algo análogo, para diferenciação, e a função integral indefinida $\int f(x)dx$, para integração (GRATTAN-GUINESS, 1997, p. 70).

Com base nos dados históricos sobre o surgimento do Cálculo, é importante observar que a ordem apresentada nos livros didáticos, textos e programas de cursos que envolvem o assunto é diferente do desenvolvimento histórico do Cálculo. Como vimos, inicialmente houve o surgimento do Cálculo Integral e muito tempo depois, surgiram os conceitos do Cálculo Diferencial. Sobre isso, afirma Eves, 2004.

> [...] A ideia de integração teve origens em processos somatórios ligados ao cálculo de certas áreas e certos volumes e comprimentos. A diferenciação, criada bem mais tarde, resultou de problemas sobre tangentes a curvas e questões sobre máximos e mínimos. Mais tarde ainda, verificou-se que a integração e a diferenciação estão relacionadas entre si, sendo cada uma delas operação inversa da outra. (EVES, 2004, p. 417).

Os problemas de determinação de tangentes e áreas foram ligados pelo teorema fundamental do cálculo, que uniu estes dois conceitos em uma única teoria, porém essa união somente ocorreu após serem estudados por muito séculos separadamente. O Cálculo Diferencial já se tornara um instrumento indispensável nos diversos campos da ciência, pela sua grande aplicabilidade e o Cálculo Integral é muito utilizado em áreas do conhecimento humano e aplicado em soluções de problemas em diferentes áreas de estudo, como Economia, Engenharia, Medicina, Química, Física e Astronomia.

No Brasil, os conteúdos do Cálculo Diferencial e Integral já fez parte do currículo por duas vezes, segundo Carvalho (1996): a primeira em 1891, com a reforma proposta por Benjamim Constant no início da República e uma segunda vez, no governo de Getúlio Vargas, na Reforma Capanema, em 1942, constando do currículo escolar oficialmente até 1961. Atualmente faz parte do currículo de diversos cursos superiores, tais como as Engenharias, Arquitetura e Urbanismo, licenciaturas e Bacharelados em Matemática, Química, Física e Biologia, dentre outros.

1.3.2 Breve análise do Ensino de Cálculo Diferencial e Integral

Como já citado na parte introdutória dessa tese, a nossa motivação em desenvolver a pesquisa no ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral se deu em função da nossa experiência como professora dessa disciplina e por constatar inúmeras dificuldades de aprendizagem. Acreditamos, no entanto, que os problemas que enfrentamos, enquanto docente, não são muito diferentes daqueles de outras universidades do país. Essas dificuldades de aprendizagem no ensino de Cálculo são evidentes e há uma busca tanto no campo pedagógico, quanto no âmbito da pesquisa, pela solução dessa problemática que se arrasta ao longo de décadas.

Rezende (2003), em sua tese de doutorado sobre o ensino de Cálculo, declara que se investigarmos a origem do fracasso do ensino dessa disciplina, "[…] verificaremos que este tem início desde o momento em que se começa a ensinar Cálculo" (p. 1). O autor defende em sua tese que "parte significativa dos problemas de aprendizagem do 'atual' ensino de Cálculo

é de natureza essencialmente epistemológica, está além dos métodos e das técnicas de ensino, sendo inclusive anterior ao seu próprio tempo de realização" (p. 9). Suas análises o levaram a concluir que no contexto do ensino superior, ficou evidenciada a existência de uma crise de identidade no ensino de Cálculo, "[…] caracterizada basicamente pela subordinação do ensino de Cálculo a uma espécie de preparação para a Análise e pela excessiva caracterização algébrica de suas ideias fundamentais" (REZENDE, 2003, p. 441).

Rezende ainda acrescenta que essa subordinação do ensino de Cálculo como preparação para a Análise é responsável pelo uso de demonstrações evasivas e desnecessárias, as quais acabam influenciando no processo de significação das ideias básicas do Cálculo. Complementa o pensamento salientando que é necessário rediscutir o papel do ensino de Cálculo nos cursos superiores, entretanto alerta que, "o sucesso do ensino superior de Cálculo está condicionado a uma preparação das idéias básicas do Cálculo no ensino básico de matemática" (2003, p. 441).

Barufi (1999), em sua tese de doutorado, nos revela alguns dados sobre o que ele chama de crise no ensino de Cálculo, cita como exemplo o índice de não-aprovação em cursos de Cálculo Diferencial e Integral oferecidos aos alunos da Escola Politécnica da USP, no período de 1990 a 1995. O resultado varia de 20% a 75% de não-aprovação, enquanto que no universo dos alunos do Instituto de Matemática e Estatística o menor índice não é inferior a 45%, isto é, não se aprova mais do que 55% em uma turma de Cálculo. Wrobel e Zeferino (2013), também apresentam, em um de seus estudos sobre o ensino de Cálculo na universidade em que trabalham, resultados insatisfatórios:

> Na Universidade Federal do Espírito Santo (UFES), dos 330 alunos matriculados nas disciplinas de Cálculo I (MAT09570) nas engenharias ambiental, civil, elétrica e mecânica no semestre 2011/2, 152 alunos, ou seja, quase a metade, foram não-aprovados. No semestre 2012/2, 32% dos alunos de Cálculo I nas engenharias ambiental, civil, computação, elétrica, mecânica e produção obtiveram menos que 3,0 pontos na primeira avaliação que valia 10,0 pontos (WROBEL E ZEFERINO, 2013, p. 2).

As pesquisas que mostram esses resultados também preocupam-se com as origens de tantas reprovações. Wrobel e Zeferino (2013) destacam, baseados nos estudos de Mendes; Giostri, 2008; Curi, 2008 e Farias, 2008, que o foco do problema é o aluno, a falta de base, de motivação e, até mesmo, de boas estratégias de estudos contribuem para a não-aprovação em Cálculo. Entretanto, assinalam os autores, há trabalhos que apontam o foco para o professor, ou para a sua metodologia de ensino. Rezende (2003), ressalta que há três diferentes respostas e encaminhamentos apresentados por pesquisadores sobre a dificuldade de aprendizagem dos alunos em Cálculo: 1) **a psicologia cognitiva** – a dificuldade tem caráter psicológico; 2)

dificuldades decorrentes do processo didático – deve-se encontrar uma forma apropriada para ensinar a disciplina de Cálculo; 3) **dificuldade de natureza epistemológica** – as raízes do problema estão além dos métodos e das técnicas.

Há outras razões apontadas pelas pesquisas sobre as dificuldades de aprendizagem em Cálculo. Tall (1991), ressalta a falta de domínio do pensamento matemático avançado como uma das causas para um resultado insatisfatório dos alunos nas disciplinas de Cálculo, o autor afirma que "[...] a mudança do pensamento matemático elementar para o avançado envolve uma transição significativa: da descrição para a definição, do convencimento para a demonstração de uma maneira lógica, baseada naquelas definições" (TALL, 1991, p.20). O professor Geraldo Ávila, em entrevista concedida a Reis (2001), afirma que a alta reprovação nesta disciplina é decorrente de problemas de ordem institucional (turmas numerosas de alunos) e didática.

Além de apontar as causas das dificuldades dos alunos em Cálculo, pesquisas apresentam alternativas para a melhoria do ensino e aprendizagem nessa disciplina. A inclusão de disciplinas de Matemática Básica (também chamadas de pré-Cálculo ou Cálculo 0), tem sido apresentada nas pesquisas como uma estratégia para a elevação dos índices de aprovação em Cálculo, como cita Vieira (2013, p. 51), "Para tentar minimizar os resultados catastróficos dos cursos de Cálculo no Ensino Superior, é comum a realização de cursos 'preparatórios' pelas IES, também chamados de 'Pré-Cálculo', 'Cálculo Zero', 'Matemática Básica', entre outros". Em alguns casos, são oferecidas atividades concomitantes de monitoria ou mesmo cursos de Fundamentos ou Complementos de Cálculo.

Araújo e Moreira (2005) destacam o papel do monitor de Cálculo, como figura primordial para o sucesso de um curso, uma vez que estimula e orienta o aluno que apresenta dificuldades, facilitando-lhes às situações de aprendizagem. Os autores acreditam que o trabalho de monitoria traz um diferencial para a instituição, como:

> [...] atividade extra-classe, atua como fonte de auxílio, a fim de suprir deficiências de conhecimentos necessários para o perfeito entendimento de conceitos do curso, numa situação em que a população estudantil assistida ganha, qualitativamente, pois o monitor, por ser um integrante da mesma categoria da população alvo, reúne favoráveis condições de se tornar um vetor motivacional no processo de ensino aprendizagem (ARAÚJO E MOREIRA, 2005, p.2).

O professor Geraldo Ávila[4] também sugere como alternativa de solução para as altas taxas de não-aprovação e dificuldades dos alunos em Cálculo, o auxílio de monitores, além de

[4] Em entrevista concedida a Reis (2001).

uma metodologia centrada na resolução de problemas:

> *Aprender matemática se faz através de resolver problemas. Quanto mais o aluno resolve problemas, mais ele aprende. E ele vai buscar teoria à medida em que ele encontra dificuldade nos problemas. Então, se nós pudéssemos mudar o enfoque do ensino para esta direção, certamente muito progresso seria feito e muito dessa reprovação no Cálculo cairia (Entrevista Ávila – REIS, 2001, p. 184).*

Essa declaração dada pelo professor Geraldo Ávila há quase 15 anos ainda repercute nos dias atuais. Pesquisas como as de Ribeiro (2010); Barrichello (2005); Rossi e Allevato (2012) entre outras, buscam na resolução de problemas alternativas para tornar o ensino de Cálculo mais acessível para o aluno. A nossa pesquisa possui essa característica, mas com o diferencial de olhar o ensino por meio das bases teóricas da Teoria de Formação por Etapas das Ações Mentais de Galperin. Essa teoria possui embasamento na Psicologia Histórico-Cultural que tem Lev S. Vigotski como precursor. No intuito de formatar esse referencial teórico, apresentamos no próximo capítulo algumas concepções teóricas sobre essa teoria.

CAPÍTULO II: PRESSUPOSTOS TEÓRICOS DA TEORIA HISTÓRICO CULTURAL DE VIGOTSKI

Esse capítulo tem por objetivo apresentar os principais pressupostos da Teoria Histórico Cultural proposta por Vigotski, destacando os pontos de aproximação dessa teoria com a Educação Matemática. A Teoria Histórico Cultural foi elaborada na antiga União Soviética, entre as décadas de 1920 e 1930, a partir dos estudos de Lev Semenovich Vigotski. Há alguns anos vem se inserindo nos meios educacionais dos mais diferentes países, inclusive o Brasil. O princípio fundamental da Teoria Histórico Cultural de Vigotski é que para compreender o ser humano e seu desenvolvimento psicológico é necessário entender e analisar as relações sociais as quais este se desenvolve. Ao considerar que a mente humana é cultural e construída socialmente, esta teoria abriu novas perspectivas de análise do próprio processo de conhecimento.

2.1 A TEORIA HISTÓRICO CULTURAL DE VIGOTSKI

A proposta de trabalho de Vigotski é extremamente complexa, sua elaboração tem por objetivo à constituição de um projeto de psicologia que analisa os problemas de aplicação prática do homem, em atendimento às necessidades emergentes da nação russa que acabava de nascer após a revolução socialista de 1917. Seu trabalho teve influência de grandes pensadores: Marx, Engels, Darwin, Pierre Janet, entre outros. Viveu apenas 37 anos, entretanto, sua produção intelectual foi bastante intensa e relevante, tendo em vista que chegou a elaborar cerca de 180 estudos científicos sobre temas diversificados (LUCI, 2006).

Rego (2014) descreve essa diversidade de estudos desenvolvidos por Vigotski destacando: a crise da psicologia, as diferenças entre o psiquismo animal e humano, gênese social das funções psicológicas superiores, as relações entre o pensamento e linguagem, a questão da mediação simbólica, as relações entre desenvolvimento e aprendizagem e os processos de aprendizagem ocorridos no contexto escolar e extraescolar, o problema das deficiências física e mental, o papel das diferentes culturas no desenvolvimento das funções psíquicas, a questão do brinquedo, a evolução da escrita na criança e a psicologia da arte.

Vigotski, no desenvolvimento dos seus estudos, contou com Alexander Romanovich Luria (1902 – 1977) e Alexei Nikolaievich Leontiev (1904 – 1979), seus principais colaboradores. Luria e Leontiev o acompanharam até a sua morte, os três constituíram a

chamada "Troika"[5], que simbolizava o idealismo e a efervescência cultural de uma sociedade pós-revolucionária (REGO, 2014).

Não se pode negar quão significativa fora a variedade de questões tratadas por Vigotski e seus colaboradores nos últimos dez anos de sua vida profissional. Em síntese, seus trabalhos buscavam compreender os diferentes aspectos da conduta humana através do esforço em reunir distintas informações. Seus seguidores admitiam que Vigotski firmou com coerência sua teoria, entretanto, alguns teóricos, como Blanck (1996) e Davis (1993) discordam, e dizem haver antagonismos irreparáveis nas suas obras. Davis (1993) não concorda que os postulados de Vigostski constituam uma escola de psicologia, mas sim, um delineamento geral de uma psicologia de inspiração materialista-dialética.

Apesar das críticas, nas últimas décadas, os estudos desenvolvidos por Vigotski vêm despertando o interesse de pesquisadores de diferentes áreas. Petrovski (1980); Wetsch (1985); (1988); Mellin-Olsen (1986); Forman e Cazden (1988); Bogayavlensky e Menchiskaya (1991); Kostiuk (1991); Freitas (1992); Valsiner (1993); Braslavsky (1993), citados por Moysés (1997), reconhecem o valor do enfoque sócio-histórico para educação, enfatiza que muitos dos seus princípios vêm sendo objeto de estudo com relação à questão pedagógica. "No Brasil a sua penetração se dá com uma crescente intensidade e de uma forma cada vez mais disseminada. […] há mesmo um entusiasmo geral acerca das ideias contidas nesse enfoque teórico" (MOYSÉS, 1997, p. 11).

Vigotski juntamente com Luria e Leontiev, seus principais colaboradores, tinham interesse particular no funcionamento cognitivo do ser humano, enquanto parte de uma realidade histórico-cultural, desenvolveram seus trabalhos por todas as disciplinas que propiciassem o entendimento desse ser psicológico. Centrados numa temática diretamente ligada à psicologia cognitiva (percepção, memória, atenção, solução de problemas, fala, atividade motora), estudaram desde processos neurofisiológicos até relações entre funcionamento intelectual e cultura das quais os indivíduos fazem parte, trabalharam arduamente não só com temas relacionados a psicologia do desenvolvimento, mas também com as relações entre linguagem e pensamento. Isso implica que suas obras trouxeram contribuições para diferentes áreas, incluindo a educação (VIGOTSKI, *et al*, 2010).

A mediação, que caracteriza a relação do homem com o mundo e os outros homens, é um dos temas centrais formulados por Vigotski. Possui grande relevância porque é por meio deste processo que as funções psicológicas superiores, especificamente humanas, se

[5] A Troika representa as bases conceituais que constituem o alicerce da abordagem histórico-cultural.

desenvolvem. Os elementos básicos responsáveis por essa mediação, segundo Vigotski (2010), são o instrumento e o signo, o homem "por meio do uso de instrumentos, modifica a natureza, e ao fazê-lo, acaba por modificar a si mesmo" (MOYSÉS, 1997, p. 23). O signo mediatiza o pensamento e o próprio processo social humano, nele está incluído a linguagem, os vários sistemas de contagem, as técnicas mnemônicas, os sistemas simbólicos algébricos, os esquemas, diagramas, mapas, desenhos, e todo tipo de signos convencionais.

Sobre isso, Palma (2010, p. 29), enfatiza: "Vigotski acreditava que o ser humano, ao longo de sua história, constrói artefatos mediadores — signos, símbolos e instrumentos —, que não mudam apenas a realidade, mas ao próprio homem interna e externamente". E partindo da noção Estímulo – Resposta, Vigotski (2001) acrescenta um novo elemento, o instrumento psicológico, e assim a relação dual passa a ser triangular. Esse novo instrumento, Moysés (2010, p. 24) exemplifica como: "uma marca num papel para recordar uma palavra, um barbante amarrado no dedo para se lembrar algo, uma figura associada a algo que precise ser lembrado, etc". Rego (2014, p. 52), salienta que esses instrumentos psicológicos auxiliam o homem nas suas atividades psíquicas, portanto, internas ao próprio indivíduo.

A linguagem é outra questão que Vigotski (2001) dedicou particular atenção, elaborada no curso da história social, "que organiza os signos em estruturas complexas e desempenha um papel imprescindível na formação das características psicológias humanas" (REGO, 2014, p. 53), é compreendida como um sistema simbólico fundamental em todos os grupos humanos.

Rego (2014) esclarece que o surgimento da linguagem fez com que ocorresse três mudanças esseciais nos processos psíquicos do homem. A primeira mudança diz respeito ao fato da linguagem permitir lidar com objetos do mundo exterior, a segunda, se refere ao processo de abstração e generalização que a linguagem possibilita, e a terceira, está relacionada à função da comunicação entre os homens, esta última garante, como consequência, a preservação, transmissão e assimilação de experiências acumuladas ao longo da história pela humanidade.

> A linguagem é um sistema de signos que possibilita o intercâmbio social entre indivíduos que compartilhem desse sistema de representação da realidade. Cada palavra indica significados específicos […]. É justamente por fornecer significados precisos que a linguagem permite a comunicação entre os homens (REGO, 2014, p. 54).

Essa comunicação ou interação entre os homens pode ocorrer, conforme Vigotski (2001), não somente pela linguagem falada e sim, também, pela escrita. A aprendizagem da linguagem escrita representa um considerável avanço no desenvolvimento das pessoas, o

domínio da escrita oferece um novo sistema de pensamento, pois aumenta a capacidade de memória e possibilita o registro de informações. Além do mais, permite o acesso a patrimônios culturais que se encontram em livros e em outras formas de registros.

Dessa forma, observa-se a importância da linguagem no processo de mediação estudado por Vigotski (1998) que apresenta inúmeros exemplos de como ocorre a mediação em diferentes processos psíquicos. Segundo Moysés (1997), entre as décadas de 1920 e 1930, Vigotski e seus colaboradores realizaram muitos experimentos, com destaque para a questão da mediação pela linguagem oral. Desde essa época, a relação entre pensamento e linguagem era foco de estudos, atualmente essas questões ainda fazem parte das preocupações de pesquisadores, tanto no campo da psicologia, como no da linguística e no da educação. Esses estudos levaram a uma outra questão, também considerada central na teoria de Vigotski: o processo de internalização ou interiorização.

Vigotski ao estudar sobre a gênese das funções mentais superiores, esclareceu que a ideia de internalização de comportamentos externos já era tema de estudos de outros autores e cita, Pierre Janet James Mark Baldwin, Ernst Kretschmer, Charlotte Buthler e Jean Piaget. Reconhece que, "traz o germe daquela concepção, a ideia de Piaget segundo a qual a argumentação lógica primeiro aparece entre as crianças e só em uma etapa posterior é internalizada pelo indivíduo" (MOYSÉS, 1997. p. 27).

Vigotski e seus colaboradores realizavam experimentos com vistas a aprofundar e sistematizar essas e outras concepções, partindo sempre da mesma ideia central: o desenvolvimento das funções psíquicas superiores ocorre por meio da interação social e do uso dos signos. Centrado nessa ideia, mais especificamente no da linguagem egocêntrica, que o conceito de internalização foi comprovado empiricamente no campo da linguagem. Sobre essa linguagem, explica Moysés, "Piaget atribuia essa expressão ao fato de a criança 'falar para si mesma', ainda que estivesse acompanhada. O termo *egocentrismo*, como ele próprio iria explicar mais tarde, significava a incapacidade da criança em se deslocar da sua perspectiva mental" (MOYSÉS, 1997. p. 27). Com o passar dos tempos, por meio da socialização, a criança deixaria de ser egocêntrica.

A internalização é um processo gradual o qual os sujeitos se apropriam dos instrumentos socialmente construídos e a interiorização progressiva das operações psicológicas constituídas inicialmente na vida social. O processo de internalização não diz respeito somente a acumulação de domínios sobre os instrumentos variados, com um caráter puramente aditivo, é também um processo de reorganização da atividade psicológica do sujeito como produto de sua participação em situações sociais específicas.

O desenvolvimento cultural se processa primeiramente no nível social, entre as pessoas, interpsicologicamente; posteriormente ocorre no interior dos indivíduos, no nível intrapsicológico. Segundo Vigotski (1998), o processo de internalização inicia-se por intermédio de uma atividade externa, reconstrói-se e começa a suceder internamente. É um processo interpessoal que se transforma em intrapessoal; a transformação desse processo é o resultado de uma série prolongada de acontecimentos evolutivos.

A internalização não é uma "cópia" de conteúdos externos no interior da consciência, ela é criadora da própria consciência. É a reorganização interior de uma operação psicológica posta em jogo no meio social. No âmbito da educação escolar, os professores, ao receberem a influência da cultura externa, desenvolvem-se internamente, isto é, processam esse conteúdo no seu interior e voltam-se para o meio cultural em que atuam, por exemplo a sala de aula, produzindo uma nova cultura.

Para Vigotski (1998), há três momentos que constituem o processo de internalização: **Primeiro** - "uma operação que inicialmente representa uma atividade externa é reconstruída e começa a ocorrer internamente" (p.75). A partir de uma situação social de interação, o sujeito mais experiente expõe, de modo espontâneo ou acompanhado, uma acepção de um conceito, conforme esse se apresenta em seu grupo social. Retratando o contexto da sala de aula, a apresentação de um conceito científico ou sistematizado ocorre de modo explícito e proposital. O professor, exercendo o papel social que lhe cabe a partir do uso de instrumentos mediadores, apresenta um conceito ao aluno e o aluno, assumindo seu papel nessa relação social, começa a reconstruir o conceito de modo próprio, apreendendo os significados estáveis, convencionados e os distintos sentidos que são possíveis nesse grupo social.

Segundo - "um processo interpessoal é transformado num processo intrapessoal" (p.75). Nesse momento, o processo é idiossincrático, ocorrendo a "sedimentação" do conhecimento. O aluno é capaz de distinguir as diferentes significações e os sentidos dados aos objetos de conhecimento, transforma o que o outro fala em suas próprias palavras, criando uma expressão particular do conceito aprendido, formando assim, seu conceito sobre as coisas, significando-as de modo próprio. Há, portanto, a reconstrução ativa pelo sujeito e não apenas a transferência de conceitos.

Terceiro - "a transformação de um processo interpessoal num processo intrapessoal é resultado de uma longa série de eventos ocorridos ao longo do desenvolvimento" (p.75). Ao longo de suas experiências, das interações com outros sujeitos, o indivíduo elabora e reelabora os conceitos, responde e aprende a aplicá-los em outras situações de interação do cotidiano ou

da sala de aula, o que demonstra que a elaboração conceitual é uma produção social que tem origem na atividade humana.

Além do conceito de internalização, Vigotski (2001) estudou outros conceitos importantes, os quais se destacam como contribuições de sua teoria para a educação: a relação entre a aprendizagem e o desenvolvimento, a zona de desenvolvimento proximal e a mediação semiótica da linguagem. Para Vigotski (2001), a aprendizagem é a grande propulsora do desenvolvimento das funções psicológicas superiores e esse processo se dá por meio da interiorização da cultura a qual é produzida historicamente pelo próprio homem através de sua interação com o mundo, ou seja, o autor defende que nas relações com outros sujeitos é que o homem se desenvolve, assimila conhecimento e compreende as funções sociais.

Ao investigar a ligação existente entre o desenvolvimento e a aprendizagem, Vigotski (1988, p. 114) descobriu que há "uma relação entre o determinado nível de desenvolvimento e a capacidade potencial de aprendizagem". Essa descoberta o levou a conceituar dois níveis de desenvolvimento: o real e o potencial. O nível de desenvolvimento real corresponde aquilo que o sujeito já sabe e é caracterizado pela solução de situações problemas de modo independente. Já o nível de desenvolvimento potencial se refere aos processos ainda em estado incipiente, nesse nível a solução de problemas ocorre sob a orientação de uma pessoa experiente na área. A zona de desenvolvimento proximal (ZDP) é exatamente a distância que existe entre esses dois níveis. Assim é importante salientar que a aprendizagem escolar deve ocorrer por meio de intervenções feitas por professores na ZDP, pois é exatamente nesta zona que a aprendizagem vai ocorrer.

A curiosidade de Vigotski por esses conceitos surgiu a partir do seu interesse pelo processo de ensino e aprendizagem. Valsiner e Verr (1991) explicam que o conceito de zona de desenvolvimento proximal se estabeleceu a partir de três contextos diferentes. O primeiro contexto diz respeito ao diagnóstico de desenvolvimento infantil, é baseado no uso de testes e relaciona a ZDP à diferença do escore obtido pela criança ao realizar uma tarefa sozinha e quando realiza com a ajuda de um adulto ou de uma criança mais adiantada e que a orienta.

O segundo contexto aparece a partir de suas preocupações com o processo ensino e aprendizagem, está muito relacionado ao primeiro, porém não leva em conta a questão quantitativa. Descreve de forma geral o desempenho da criança nas tarefas em que realiza sozinha e naquelas que ela é socialmente assistida. O terceiro contexto é o do jogo, Vigotski (2010) acredita que no jogo a criança sempre está além de sua média de idade, é como se ela estivesse sempre querendo saltar acima do nível do seu comportamento habitual.

Vigotski (2001) baseado em seus estudos sobre ZDP, faz uma proposta para o ensino e

aprendizagem e se coloca em oposição a outras teorias sobre o processo ensino- aprendizagem e desenvolvimento da criança. Para ele, o bom ensino se adianta ao desenvolvimento (VYGOTSKY *et al*., 2010), assim pode-se inferir, baseado nos pressupostos teóricos de Vigotski, que o desenvolvimento psicológico/mental, depende da aprendizagem na medida em que se dá o processo de internalização dos conceitos. Em termos cognitivos, o professor ao criar zonas de desenvolvimento proximal, estaria acelerando o surgimento de funções ainda pouco desenvolvida, isso poderia ocorrer por meio de questionamentos e da correção das atividades do aluno no intuito de provocar um desequilíbio na sua estrutura cognitiva fazendo-o avançar à uma reestruturação mais elaborada. Como assinala Moysés (1997, p. 37), "[…] em termos cognitivos o questionamento e a correção, por parte de quem ensina, desempenham um relevante papel na aprendizagem".

Vigotski em seus estudos buscou aplicar o conceito de ZDP, e dentre essas aplicações, destaca-se a formação de conceitos, tema de bastante relevância nas suas proposições. Essa questão foi trabalhada por Vigotski e seus colaboradores, em especial Luria, como uma extensão das suas próprias pesquisas em que tratava sobre internalização, os principais resultados encontrados surgiram do confronto que estabeleceu entre desenvolvimento dos conceitos espontâneos e científicos. Para eles, o conceito espontâneo é aquele que a criança aprende no dia-a-dia, a partir do contato que ela possui com alguns objetos ou fenômenos e que ocorre de forma inconsciente. Já o conceito científico, é aquele sistematizado e repassado de forma intencional, geralmente por meio de uma metodologia, na sua maioria, são os conceitos que se aprendem na escola (MOYSÉS, 1997).

Rego (2014) exemplifica esses dois conceitos: no seu dia-a-dia, a criança constroi o conceito "gato", esta palavra resume e generaliza as características deste animal, sem levar em consideração o tamanho, a raça, a cor etc, e o distingue de outras categorias, tais como, livro, estante, pássaro. Na escola, o conceito "gato" pode ser ampliado e tornar-se ainda mais abstrato e abrangente. "Será incluído num sistema conceitual de abstrações graduais, com diferentes graus de generalização: gato, mamífero, vertebrado, animal, ser vivo […]" (REGO, 2014, p. 77). Observa-se que apesar das diferenças, esses dois tipos de conceitos estão muito relacionados, tendo em vista que fazem parte de um único processo, de desenvolvimento e da formação de conceito. Assim, um conceito espontâneo adquirido no transcurso do dia-a-dia serve, muitas vezes, como âncora para a compreensão de um conceito científico.

> O processo de formação de conceitos, fundamental no desenvolvimento dos processos psicológicos superiores, é longo e complexo, pois envolve operações intelectuais dirigidas pelo uso das palavras (tais como: atenção deliberada, memória

> lógica, abstração, capacidade para comparar e diferenciar). Para aprender um conceito é necessário, além das informações recebidas do exterior, uma intensa atividade mental por parte da criança (REGO, 2014, p. 78).

Esse pensamento mostra a fragilidade do ensino mecânico, vazio de significado e que ocorre por meio da repetição, transmitido pelo professor ao aluno, sem necessariamente haver uma atividade mental e nem tampouco uma preocupação com a forma como os conceitos são ou devem ser internalizados pelo aluno. Em Matemática há uma prática muito comum quanto a esse tipo de ensino, onde as fórmulas, geralmente, não são demonstradas, são dadas ao aluno desvinculadas dos conceitos e, quase sempre, são aplicadas de modo mecânico por meio da "decoreba".

Contudo, assinala Rego (2014), existem práticas escolares que estimulam a aprendizagem dos conceitos de forma desafiante e que promove um ambiente propício para o desenvolvimento intelectual do aluno. Na perspectiva Vigotskiana, o ensino escolar deve desempenhar um papel importante na formação dos conceitos de modo geral e dos científicos em particular. A escola "possibilita que o indivíduo tenha acesso ao conhecimento científico construído e acumulado pela humanidade" (REGO, 2014, P. 79).

2.2 A TEORIA HISTÓRICO CULTURAL E O CONHECIMENTO MATEMÁTICO

O nosso interesse nessa sessão é apresentar a influência do pensamento histórico cultural no campo da Educação Matemática com destaque para a resolução de problemas. Há muitas décadas o ensino da matemática sofre críticas, sobretudo, na forma como os conteúdos são ensinados. Precupados com essa realidade, pesquisadores de diferentes países estudam e sugerem novas formas de ensino nessa área. Grande parte das sugestões são pautadas nas atividades em grupo, reconhecendo que a interação é um ponto positivo na construção do conhecimento matemático.

Assim, surge o reconhecimento da potencialidade da Teoria de Vigotski nesse campo do conhecimento, o qual para ele a aprendizagem dos conceitos deveria se originar nas práticas sociais, como já mencionado nesse trabalho. A aproximação da matemática com o pensamento de Vigotski deu início há muitas décadas pelos soviéticos por meio de pesquisas sobre o desenvolvimento das funções mentais superiores. Atualmente esse enfoque psicológico vem sendo pesquisado em outros países, incluindo o Brasil, a exemplo dos grupos de pesquisa do mestrado em Psicologia Cognitiva da Universidade de Pernambuco, com destaque para Terezinha Nunes e Ana Lúcia Schliemann e do Grupo de Pesquisa em

Educação Matemática: uma abordagem histórico cultural - GPEMAHC, dirigido pelo professor Dr Ademir Damazio, além do Grupo de Estudo e Pesquisa sobre a Atividade Pedagógica – GEPAPe da Faculdade de Educação da USP, o Grupo de Estudo e Pesquisa em Didática e Desenolvimento Profissional de Professores – GEPEDI da Universidade Federal de Uberlândia, dentre outros.

No campo da Educação Matemática, Segundo Moysés (1997), a aproximação com o enfoque sociocultural surgiu por ocasião do Terceiro Congresso Internacional de Educação Matemática, na Alemanha, em 1976, e tem se firmado com um dos seus pontos básicos. A Educação Matemática é uma área de pesquisa em expansão em níveis internacionais e congrega um grupo ativo de pesquisadores que além de manter cursos de pós-graduação, realizam pesquisas e promovem eventos.

Dentre diferentes tendências da Educação Matemática, o nosso interesse nesse trabalho está pautado na resolução de problemas. Essa tendência, na perspectiva da teoria histórico-cultural, privilegia a formação de conceitos como processo básico que influencia na formação de novas estruturas de pensamento. Formar conceitos requer que o aluno identifique a origem da construção teórica de um objeto de estudo, bem como também, as relações, funções e contradições que o envolvem, assim o professor é convidado a apresentar tarefa cuja execução exige dos alunos o movimento de pensamento investigativo igual dos cientistas, como destaca Davydov (1988): o professor deve orientar o aluno a ter em mente o caminho percorrido pelos cientistas para chegarem até determinado conceito, dessa forma o aluno compreende como surgiram os conhecimentos e não apenas os recebem prontos.

Vale destacar em que consiste o conceito de problema no ensino desenvolvimental de Davidov. O problema, no ensino desenvolvimental, consiste em algo a ser investigado para que se descubra, mais que sua solução, sua gênese. O problema, posto na tarefa pelo professor, tem íntima relação com o movimento de pensamento que se espera do aluno e com a constituição de um método para lidar com o objeto, em distintas e diversificadas situações. Vitaly Rubtsov (1996, p. 131) ilustra esse aspecto e ressalta que “a aquisição de um método teórico geral, visando à resolução de uma série de problemas concretos e práticos, concentrando-se naquilo que eles têm em comum e não na resolução específica de um entre eles, constitui-se numa das características mais importantes do problema de aprendizagem”.

Esse pensamento nos faz compreender que para o professor não deve interessar que o aluno encontre a solução imediata do problema, mas sim as condições de origem do conceito que estão aprendendo que servirá para a resolução, mas sobretudo, para que adquiram um modo de pensamento. Ou seja, o professor ao elaborar e apresentar aos alunos uma tarefa, no

ensino desenvolvimental essa terefa corresponde à união do objetivo da aprendizagem com a ação de aprendizagem que os alunos devem realizar e as condições para que o façam. Na medida em que os alunos vão cumprindo as ações que compõem a tarefa, vão dominando os procedimentos mentais de formação do conceito.

São três os procedimento mentais e podem ser sintetizados assim: primeiro vem a análise do conteúdo (objeto) para a descoberta da relação geral, governada por uma lei e vinculada às diversas manifestações ou relações particulares do conteúdo (corresponde à construção mental da generalização e da abstração); o segundo procedimento diz respeito à generalização, com base na generalização e na abstração identificadas, o aluno deve deduzir as relações particulares do objeto em sua união com sua totalidade, isto é, a construção mental do núcleo do objeto; e terceiro, por meio desse processo de análise e síntese, o aluno deve dominar o objeto estudado, dominando, portanto o procedimento geral que serviu à sua construção.

As contribuções trazidas pela teoria Histórico Cultural ao ensino são inúmeras, destacamos nessa pesquisa os estudos de P. Ya. Galperin, um dos discípulos de Vigotski, que assim como V. V. Davidov e D. B. Elkonin, trilharam caminhos próprios criando novas teorias.

Sintetizando os principais pontos abordados, podemos afirmar que há pontos que aproximam a educação matemática ao enfoque histórico-cultural da psicologia. Compreendemos que essa abordagem pode ser trabalhada pelos professores como uma das saídas para o problema que inúmeras pesquisas apontam em relação ao conhecimento escolar, em particular, ao conhecimento matemático.

Assim, trazemos no Capítulo III, os principais aspectos da teoria de Formação por Etapas das Ações Mentais de Galperin, desenvolvida a partir dos pressupostos teórico do enfoque histórico-cultural trabalhado por Vigotski e seus colaboradores.

CAPÍTULO III – A TEORIA DA FORMAÇÃO POR ETAPAS DAS AÇÕES MENTAIS

Neste capítulo apresentam-se as bases teóricas desenvolvidas na Teoria de Galperin. Inicialmente destacam-se os pressupostos da Teoria da Formação por Etapas das Ações Mentais enfatizando o contexto da nossa pesquisa e em seguida caracteriza-se as etapas de assimilação conceitual da teoria em questão. A Teoria da Formação por Etapas das ações Mentais considera o estudo como um sistema de determinados tipos de atividade cuja sua efetivação conduz o estudante a novos conhecimentos. Formulada por Galperin no início dos anos 50 tem a ação como foco central, para este estudioso cada tipo de atividade de estudo é um sistema de ações unidas por um motivo que, em seu conjunto, asseguram o êxito do objetivo da atividade.

3.1 BASES TEÓRICAS DA TEORIA DE GALPERIN

A Teoria de Galperin possui suas bases na Psicologia Histórico-Cultural que tem Lev S. Vigotski como precursor, este traz para a Psicologia os fundamentos da mesma matriz que deu os princípios da Revolução de 1917, na Rússia: o materialismo histórico e dialético. Desta forma insere-se, pois, num contexto de revolução social de relações pertinentes ao modo de produção capitalista para socialista. Assim a Psicologia Histórico-Cultural nasce articulada com o processo de construção de uma nova sociedade e de um novo homem. Em consequência disso, surgia uma vinculação ao processo de ensino relativo aos propósitos da Revolução (NÚÑEZ, 2009).

Em pleno processo desse movimento de constituição de uma nova ordem social, é que Vigotski, Leontiev, Lúria, entre outros, debruçam-se em estudar a formação do psiquismo decorrente da atividade tipicamente humana como objeto da psicologia. Assim a atividade passa a ter um lugar central no estudo de desenvolvimento do psiquismo. Conforme Davidov (1988, p. 27):

> A categoria filosófica de atividade é a abstração teórica de toda a prática humana universal, que tem um caráter histórico-social. A forma inicial de atividade das pessoas é a prática histórico-social do gênero humano, isto é, a atividade laboral coletiva, adequada, sensório objetal, transformadora, das pessoas. Na atividade se expressa a universalidade do sujeito humano.

Para Rego (2014), Vigotski foi um dos primeiros a expressar a atividade como elemento de estudo da Psicologia. Isso se manifesta ao adotar o pressuposto materialista

histórico e dialético de que o homem se constitui a partir da sua vida social, histórica e cultural, ou melhor, a consciência se forma num movimento de fora para dentro mediado pelas relações sociais e pela atividade. Pressupõe-se que existe uma unidade dialética entre consciência e atividade e foi a partir dessas premissas que Leontiev (1978) desenvolveu a Teoria da Atividade como objeto de investigação para explicar o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. Segundo ele:

> É a análise da atividade o que constitui o ponto decisivo e o método principal do conhecimento científico do reflexo psíquico, da consciência. No estudo das formas da consciência social está a análise da vida cotidiana da sociedade, das formas de produção próprias desta e do sistema de relações sociais; no estudo da psique individual está a análise da atividade dos indivíduos nas condições sociais dadas e nas circunstâncias concretas que é dado a cada um deles (LEONTIEV, 1978, P. 22).

Enquanto objeto da psicologia, a atividade é considerada a unidade central que é capaz de orientar a vida do indivíduo. Esse estudioso elabora a tese de que a atividade psíquica interna do homem traduz uma atividade externa e materializada, que passa a ser um princípio metodológico fundamental da psicologia histórico-cultural da unidade da atividade e a psique (LEONTIEV, 1978).

Vigotski e Leontiev não se preocuparam em aprofundar o processo de internalização da atividade externa em interna e Galperin percebeu que este processo poderia se constituir como seu objeto de estudo. As preocupações teóricas de Galperin surgiram em decorrência das divergências de opiniões recorrentes no âmbito da pesquisa em Psicologia. Sua referência crítica foi: 1) os métodos de "cortes" (etapas) que possibilita a constatação apenas do nível atingido pela criança; 2) o método da determinação da zona de desenvolvimento próximal com ajuda (GALPERIN, 1987).

Assim, Galperin ancorado num desdobramento das bases teóricas de Vigotski e da teoria da atividade de Leontiev elaborou a Teoria de Ações Mentais. Leontiev (1978) traz o pressuposto de que no processo da evolução humana, isto é, na passagem do status biológico à história social e cultural, a atividade coletiva humana tornou-se complexa, uma vez que sua estrutura foi assumindo cada vez mais a forma mediatizada. Essa passagem da gênese histórica da estrutura mediatizada da atividade social humana trouxe aberturas para o processo social de desenvolvimento da consciência do homem, num contexto de contradições próprias das sociedades divididas em classes sociais com diferentes possibilidades de acesso aos bens produzidos pela humanidade, como também, pela divisão social do trabalho e da propriedade privada.

Duarte (2011), explica que é nesse contexto que tem origem a teoria da atividade, na Psicologia Histórico-Cultural. Vigotski, Leontiev e Luria adotam como unidade de análise o sistema da atividade coletiva orientada, para o objeto, mediada por artefatos, o que se caracteriza como sendo uma relação entre o sujeito individual e a estrutura social. P. Ya Galperin inserido nesse contexto e tomando por referência suas observações críticas dos estudos que adotam o método de "cortes", até então realizados, sobre o desenvolvimento intelectual das crianças, desenvolveu a Teoria da Formação por Etapas das Ações Mentais. A crítica de Galperin sobre esse método é que ele apenas constata aquilo que a criança é capaz de fazer, isto é, o que ela sabe e, desse modo, desconsidera as suas possibilidades futuras. Referindo-se a esse equívoco, Galperin (1987, p. 125) ressalta: "Nós não sabíamos formar conceitos na criança, propúnhamos tarefas (que requeria a formação de um conceito) e achávamos somente aquilo que a criança sabia fazer".

Galperin (1987) também critica o método de "determinação da zona de desenvolvimento próximo", para ele os dados obtidos com esse método não explicitavam as suas forças motrizes, somente indicavam a trajetória do desenvolvimento intelectual. Como consequência, poderiam se formular diferentes ideias a esse respeito, como: as ideias de Vigotski, que o desenvolvimento é antecedido pela aprendizagem; ou pensamento de Piaget, que o desenvolvimento surge espontaneamente.

Essa discussão foi o ponto de partida para Galperin compreender a importância do problema do método ao se estudar o desenvolvimento intelectual da criança, uma vez que, para tal, requer dois tipos de ações: as materiais e as mentais. Há nesses pontos uma concordância com Leontiev, quando diz que a criança deve formar ações mentais adequadas para compreender conceitos, generalizações e conhecimentos. Isso se dá pelo fato que tais ações se organizam de modo ativo. "Inicialmente, assumem a forma de ações externas que os adultos formam na criança, e só mais tarde é que se transformam em ações mentais internas" (LEONTIEV *apud* NUÑEZ e PACHECO, 1991, p. 98).

Galperin (1987) chama o seu método de estudos de "Formação por Etapas das Ações Mentais", ele explica que as ações materiais são relacionadas ao momento em que a criança as executam com apoio somente em objetos externos, ou seja, a criança recorre a manipulações, a partir das suas características e dos estímulos externos. Sobre isso, Rezende e Valdes (2006) alertam que esse tipo de ação possui pouca influência sobre o desenvolvimento do pensamento e acrescentam que ela não se forma de um modo linear, fragmentado e à margem do contexto no qual se insere, mas com base num esquema conceitual em que se articulam,

simultaneamente, as características que lhes são peculiares: orientação, execução, situação-problema e contexto.

A ação mental acontece no momento em que a criança a realiza de modo consciente, quando ela é capaz de abstrair um conceito. Trata-se, pois, segundo Galperin (1987), de um pensamento sobre a ação em que o conteúdo sensorial inicial passa a ser algo distante. Em outras palavras, são "um reflexo psíquico dos processos materiais externos" (GALPERIN e TALÍZINA, 1967, p.273). O reflexo não significa a imagem de algo material fixado na mente, mas como dizem Rezende e Valdes (2006): na ação mental, rompe-se a dissociação entre o pensamento e a ação, que constrói uma mediação viabilizadora da potencialização e do aumento da qualidade de ambos.

Rezende e Valdes (2006, p. 215), explicam que a distinção dos dois tipos de ações não significa que elas se dissociam, para eles elas se complementam:

> Os aspectos materiais e mentais se constituem em elementos de um mesmo e único processo, que se desenvolve no sentido de promover a transformação progressiva dos aspectos materiais em mentais, fomentando a interiorização de conceitos, inicialmente de caráter operacional para uma forma exclusivamente mental, que nunca perderá sua interligação com a prática (REZENDE E VALDES, 2006, p. 215).

Galperin e Talízina (1967) explicam que ao se considerar as ações mentais como um reflexo psíquico dos processos materiais externos, deve-se entender o processo de desenvolvimento de uma forma material externa a um novo ato mental. Numa investigação, o pesquisador não pode tratar esse processo como um simples desenvolvimento sensorial dos indivíduos com foco para a exercitação dos órgãos dos sentidos, em vez disso, a atenção deve ser redobrada para a "assimilação da experiência sensorial social, da cultura sensorial" (GALPERIN, ZAPORÓZHETS, ELKONIN, 1987, p. 304).

A preocupação central de Galperin (1987) foi exatamente em criar um método que contribuísse para a compreensão da transformação de uma ação externa em interna, ressaltando o estudo da formação das ações mentais, isto é, seus verdadeiros conteúdos, suas formas de surgimento, suas funções e mecanismos.

Diante dessa preocupação e do desejo de levar a frente suas ideias, Galperin (1987) apoiou-se em um fato que ele considerava como real, o ensino de diferentes ações que ocorrem na escola. Ele parte da premissa de que essas ações são produzidas não pelo simples desejo de executá-las, mas, sobretudo por esperarem à obtenção de um resultado. Como consequência do tipo de êxito em dadas condições, é que se avalia a capacidade dos estudantes. Assim ele se debruça sobre duas teses, uma sobre a possibilidade da ação

apresentar qualidades diferentes e a outra sobre o objetivo do processo escolar , para ele o objetivo é ensinar a realização de ações, cujas propriedades são previamente determinadas (DUARTE, 2011).

Assim, espera-se que cada estudante, ao realizar uma determinada ação, pode chegar a diferentes compreensões, tendo em vista as particularidades de suas capacidades ao executá-la em condições distintas. Dessa forma, Galperin (1987) destaca que "compreensão" e "capacidades" apresentam-se como designações subjetivas e constituem duas partes da ação objetal, isto é, da ação em que as relações conceituais são estabelecidas com mediação de objetos. A 'compreensão' tem um papel objetivo na ação, por isso, assume uma função orientativa que inclui o conjunto das circunstâncias, bem como o desenho, o controle e a correção do plano de execução.

Tem, pois, uma instância diretiva da qual depende a qualidade da execução. Talízina, colaboradora e responsável pela continuação dos estudos de Galperin, salienta que na escola a orientação da ação é o conjunto de condições concretas, necessárias para que o aluno a execute. O controle dirige o andamento da ação, por meio da comparação dos resultados dos modelos, o que subsidia a correção tanto na orientação quanto na sua execução (TALÍZINA, 1988).

Por outro lado, a capacidade se revela na execução e depende da base orientadora, sem necessariamente reduzir-se a ela. Para Damázio, Nürnberg e Perez (2009), a execução depende da capacidade e habilidades do aluno, formadas por suas condições mentais, de acordo com as exigências colocadas na tarefa e dispostas pela orientação. Esses autores alertam que, no estado atual do processo educativo escolar, as operações mentais necessárias no desenvolvimento do pensamento de nível teórico são pouco executadas, consequência das condições da ação repassada previamente pelo professor.

Fazendo referência aos objetos da ação, Talízina (1988, p. 60) conclui que em diferentes ações do homem estas partes possuem graus de complexidade diferentes, pois ocupam volumes distintos. Entretanto a sua presença simultânea em todas as ações deve ser obrigatória tendo em vista que, sem ele a ação pode deixar de ser cumprida. Assim qualquer ação realizada pelo homem representa o que ela chama de "microssistema original de direção que inclui 'organismo de direção' (a parte orientadora da ação), um 'organismo de trabalho' (a parte executora da ação), um mecanismo que observa e compara (a parte de controle da ação)".

Resumindo, as ações possuem três funções: orientadora, executiva e de controle. Na função orientadora, apresentam-se o método, o objetivo e as especificidades do objeto para

qual se voltam às ações. A função executiva produz o ato de execução das ações com base no método previamente definido e na atenção ao objetivo estabelecido para proceder à transformação do objeto em estudo. O controle ocorre com apoio nas informações sobre o modo do cumprimento previsto para execução, tendo também a finalidade de introduzir as correções pertinentes. No caso de atividades aplicadas no âmbito escolar, se são contemplados somente a ação executora em detrimento da orientadora, o estudante fica a mercê de subsídios necessários para desenvolver seus próprios planos de ação (BASSAN , 2012).

Baseado nesse conjunto de teses e princípios, Galperin (1987) estabelece que o papel do ensino não deva ser apenas de formação da ação, mas, sobretudo deve atender a determinadas propriedades, estabelecidas previamente. Investigar esse processo se traduz em algo novo, em se tratando de método, pois em vez de estudar como acontece a transformação da ação, centra-se no entendimento e na criação das condições que assegurem a referida transformação, com a fixação antecipada das propriedades. Desta forma, o erro cometido pelos estudantes na execução da ação indica a necessidade de elaborar uma nova tarefa, cujo objetivo deverá ser de viabilizar um elemento orientador a fim de que o erro não seja cometido novamente.

A partir de seus estudos e investigações, Galperin (1987) estabeleceu algumas bases:

a) As ações se formam conjuntamente com as suas imagens sensoriais e seus conceitos que são, portanto, diferentes aspectos de um mesmo processo. Tanto os esquemas de ação quanto dos objetos se apresentam como possibilidade de substituírem-se mutuamente, de forma que algumas propriedades do objeto passem a estabelecer os meios e cada elo pressupõe alguma especificidade das propriedades do objeto.

b) Existe, no mínimo dois planos mentais ou ideais, o intelectual e o das percepções; com possibilidade de um terceiro, o da linguagem. Porém, é destacável que a formação do plano intelectual tem por base a forma verbal da ação.

c) A transferência da ação ao plano ideal pode ocorrer de forma total ou parcial em sua base orientadora. Nesse caso, há uma permanência do plano material da base executiva da ação.

d) A transferência da ação ao plano ideal, em sua particularidade ao intelectual, se dá através das relações e nexos do conteúdo do objeto que se manifestam nas mudanças consecutivas das formas em que se realizam as ações.

e) A interiorização, isto é, a transferência da ação ao plano intelectual, caracteriza-se como apenas uma linha de suas transformações, pois outras inevitavelmente ocorrem: as

modificações nas características dos elos da ação, a medida de sua diferenciação, o grau em que são assimilados, bem como, o ritmo e os indicadores de forças.

Na Teoria de Galperin, a atividade tipicamente humana de "estudo" requer um conjunto de múltiplas ações a serem cumpridas, para que o aluno adquira os conhecimentos e se desenvolva intelectualmente. Assim, Talízina (1988), esclarece que estudo é atividade caracterizada por um sistema de ações unidas por um motivo que, em seu conjunto, asseguram que o objetivo da atividade da qual fazem parte seja atingido. Ela ainda acrescenta que, o elo central dessa teoria é admitir a ação como unidade de qualquer atividade humana, entre elas o estudo. A sua execução pelo homem está vinculada a um objetivo que, por sua vez, surge de uma necessidade que também é geradora de um motivo. Entretanto, na ação se "inclui um determinado conjunto de operações, que se cumprem em uma ordem determinada e em correspondência com determinada regra. O cumprimento consecutivo das operações forma o processo de cumprimento da ação". (TALÍZINA, 1988, p. 58).

É importante reafirmar a necessidade de a escola refletir sobre as ações que propõe à execução dos estudantes. Pensando assim Galperin preocupou-se em organizar um sistema de ensino fundamentado em 'etapas das ações mentais'. A teoria de Galperin consiste em encontrar a forma adequada da ação, que se caracteriza pelo nível de apropriação de conhecimento pelo estudante. Há, pois, um percurso de transformação de ação externa para ação interna, isto é, de material para a mental e essa passagem ocorre em três níveis de ação: Material, Verbal e Mental (NÚÑEZ E PACHECO, 1998).

Para Galperin e Talízina (1967, p. 273-275), existem diferentes modos de ocorrer um ato mental, cada qual apresenta suas propriedades características fundamentais, ou seja, aquelas cujos modos são aceitos, e, portanto, são aceitos como parâmetros. Entretanto, em todo ato mental – formação de um conceito – é caracterizado por dois "componentes constituintes": traços operantes e propriedades operantes. Nesse sentido, em todo ato mental de um indivíduo humano são distinguidos quatro parâmetros.

O primeiro parâmetro, em 'nível de processo', em que se apresentam três níveis: material ou materializado, palavra oral e o intelectual. No nível material ou materializado, a atenção se volta para a descrição dos traços fundamentais do objeto. O nível caracterizado pela palavra oral, em que as observações são explicitadas em voz alta, procedimento considerado essencial para o processo de formação de pensamento, esse procedimento para alunos com deficiência auditiva, sugere-se ser trabalhado por meio da Linguagem Brasileira de Sinais (LIBRAS). O intelectual, o último nível em que o traço essencial é um ato exclusivamente mental (RIBEIRO, 2008).

O segundo parâmetro trata-se do grau de generalização no qual, para Galperin e Talízina (1967), ocorrem a separação das propriedades essenciais das não essenciais. É identificada por meio das situações em que o aluno recorre aos conceitos para aplicá-lo em conformidade com suas condições para tal. Quando o estudante consegue determinar as propriedades fundamentais do objeto conforme as orientações destacadas pela base orientadora da ação na execução da atividade, a generalização ocorre de forma correta.

O terceiro parâmetro é o grau completo em que são demonstradas três possibilidades dos estudantes na realização das operações: aquelas que efetivamente se realizam, ou aquelas mais simples que realmente podem executar ou, ainda, um modo mais completo de operações. O quarto parâmetro*,* se refere às condições psicológicas em que a ação passa a ser um ato próprio do indivíduo, é o grau de internalização**,** nesse parâmetro o estudante articula várias ideias conceituais, não tão diferente do terceiro parâmetro, pode ocorrer um percurso assinalado por pouca ou muita facilidade (GALPERIN E TALÍZINA, 1967).

Galperin e Talízina (1967) salientam que esses parâmetros não possuem dependência entre si, embora seja possível generalizá-los em um mesmo processo, para eles estes parâmetros têm fundamental importância na formação completa de um ato mental. As atividades se materializam e requerem elementos suficientes para a transformação do conhecimento, do pensamento para um nível mais elevado. As imagens desprendem-se dos objetos materiais e são superadas completamente pela linguagem verbal. Desta forma, é possível, portanto, converter a forma verbal externa em um ato mental interno, o estudante agora “fala para si” esse ato transformado em um pensamento verbal.

3.2 ETAPAS DE FORMAÇÃO DAS AÇÕES MENTAIS

Galperin (1987) ao criticar os modelos de ensino adotados pela escola, propõe como alternativa o modelo formativo-conceitual, que estabelece uma forma de aprender por meio da prática. Para esse teórico o processo de internalização da atividade externa em interna é concebida por um ciclo que não pode ser considerado de forma linear. Didaticamente esse processo foi dividido em etapas que apresentam um processo de conversão gradual de ações externas ou materializadas em internas. Nesse caso, a ação é a “unidade que temos que utilizar para análise de qualquer processo de aprendizagem. Sem ela, é impossível construir os objetivos do ensino de maneira correta e fundamentada, nem controlar a qualidade da assimilação do conhecimento” (TALÍZINA, 2001, p.12).

Conforme Talízina (1988) a ação antes de ser mental, generalizada, reduzida e

assimilada passa por estados transitórios que são as etapas de assimilação da ação as quais se distinguem pelas mudanças operadas em cada uma das características da ação . Essas etapas são: etapa da formação da Base Orientadora da Ação (BOA); etapa da formação da ação em forma material ou materializada; etapa da formação da ação como verbal externa; etapa da formação da ação em linguagem externa e etapa da formação da ação em linguagem interna. Galperin indicou a necessidade dessas etapas serem precedidas por uma etapa motivacional, esta foi acrescentada por Talízina, a seguir apresentam-se essas etapas de forma detalhada.

3.2.1 Etapa Motivacional

Como já citado, Galperin (1987) indicou a necessidade de introdução da etapa motivacional, que consiste na criação de uma motivação necessária ao estudante. Ele considera importante a motivação e ressalta que "na prática do ensino é bem sabido que se o aluno não quer estudar, é impossível lhe ensinar" (TALÍZINA, 1988, p. 108). Embora Galperin tenha mencionado sobre a importância dessa etapa, não foi encontrada nenhum detalhe sobre ela nos seus textos. Posteriormente foi acrescentada por Talízina que a chamou de etapa zero, tendo em vista que o estudante ainda não está envolvido no desenvolvimento de um conjunto de tarefas relacionado a um conceito específico a ser assimilado.

Talízina afirma que há unanimidade, entre os professores, de que a motivação para o estudo não pode ser gerada de forma natural pelos alunos, ela salienta a necessidade de criar uma motivação entre eles. De acordo com Núñes (2009), há dois tipos de motivações: externas, isto é, que não se relacionam diretamente com o conhecimento a ser assimilado e nem à atividade de estudo; internas que são peculiares ao processo cognoscitivo, de busca pelo conhecimento.

Em relação ao ensino, "para criar uma motivação positiva se utiliza comumente a criação de situações problemas, que é possível solucionar por meio da ação [..]" (TALÍZINA, 1988, p. 109). Cabe ao professor observar a lei psicológica da disposição enunciada como sendo as condições efetivas do estudante no plano psicológico e fisiológico. Trata-se, pois, de uma etapa de atenção às condições reais "tanto do ponto de vista do organismo como da motivação" (NÚÑES, 2009, p. 99). A tarefa principal dessa etapa é:

> [...] a criação de uma motivação necessária no estudante. Independentemente se a solução da tarefa dada constitui ou não uma etapa independente, deve estar garantida a existência de motivos necessários para que os estudantes adotem a tarefa de estudo e cumpram a atividade que lhes é adequada, caso isso não ocorra, é impossível a formação das ações e dos conhecimentos que as envolvem. (Na prática do ensino é

> sabido que se o estudante não quer estudar, é impossível ensiná-lo). (TALÍZINA, 1988, p.108, tradução nossa) .

Galperin (2001a) defende que a motivação deve permear todas as outras etapas. Sem o aluno estar motivado para as tarefas de ensino, é impossível a formação das ações e dos conhecimentos que compõem a estrutura da ação. Portanto, deve-se assegurar, em todo o processo de apropriação da habilidade, a existência de motivos necessários para que o aluno cumpra, motivado, as tarefas de estudo e as atividades que lhe são ofertadas.

Nessa etapa, explica Bassan (2012), por meio de questões, tais como: O que vamos fazer? Para que vamos fazer? Como vamos fazer? Por que fazer desta maneira? Existe uma maneira melhor de fazê-lo? O professor busca inserir os estudantes na situação de aprendizagem. Por meio desses questionamentos o professor pode identificar as necessidades dos estudantes, além de inseri-los ativamente na tarefa – considerando-os como sujeitos no processo de ensino e de aprendizagem. "Nesse momento de envolvimento dos estudantes, mediante a identificação da necessidade, surgem os motivos, os quais impulsionam o estudante a entrar em atividade e assim apropriar-se dos conhecimentos" (BASSAN, 2012, p. 65).

3.2.2 Etapa de formação da Base Orientadora da Ação (BOA)

Essa etapa, segundo Talízina (1988) é a etapa do conhecimento prévio da ação e as condições para o seu cumprimento. A Base Orientadora da Ação (BOA) é o sistema de condições em que realmente se apoia o homem ao cumprir a ação, essa ação pode ou não coincidir com a BOA, por exemplo, "ao resolver um problema de 'construir com seis fósforo quatro triângulo equilátero sem romper os fósforos', muitos sujeitos incluem na base orientadora de suas ações a exigência de 'fazê-lo num plano', embora o enunciado do problema não explique essa condição" (TALÍZINA, 1988, p. 58).

Galperin e Talízina (1967, p. 274) dizem que a BOA é "um fenômeno complexo que consiste em uma representação preliminar do produto do processo, do processo mesmo, conjuntamente com um sistema de referência que permite a execução de uma tarefa". Para Galperin, Zaporózhets e Elkonin (1986, p. 303), a BOA é o "conjunto de circunstâncias no qual, de fato, a criança se orienta durante a execução da ação". É nessa etapa que os estudantes recebem as explicações necessárias sobre o objetivo da ação que deverá ser realizada.

É uma instância diretiva e, como tal, estabelece tanto as exigências para a ação em processo de formação, quanto às propriedades correspondentes. Esses autores observam que, em grande medida, da correta e completa BOA é que depende o êxito da assimilação. As ações pelas funções que cumprem estão divididas em três partes. Nunes e Pacheco (1998, p. 101) consideram a Base Orientadora da Ação como sendo "um modelo de atividade" que contempla todas as suas partes estruturais e funcionais, quais sejam: orientação, execução e controle. As operações são os modos por meio das quais se realizam as ações, Talízina (1988) cita como exemplo, que a solução de um problema de Aritmética, ao coincidir o motivo e o objetivo, se constituirá numa atividade.

A etapa de formação da BOA remete, então, a um processo de organização detalhada por parte do professor, no sentido de estabelecer um sistema de ações e suas respectivas operações, com vistas à formação do pensamento conceitual. Nesse sentido, Talízina (1988) explica que o desenvolvimento de uma ação requer um determinado conjunto de operações a serem cumpridas em determinada ordem com atendimento de condições e nexos do conceito. A execução dessas operações é condição para a realização da ação.

Longarezi e Puentes (2013, p. 296), enfatizam que é nesta etapa que o aluno se familiariza com as condições concretas da ação e sua representação em forma de um modelo do "sistema de operações adequado à assimilação do conceito". Ainda acrescentam que, na opinião de Galperin, é um elemento que visa determinar a qualidade do processo de assimilação. Talízina (1988), esclarece que essa etapa prima pela construção correta, racional e segura das formas de orientação na execução das tarefas propostas.

Galperin (1987) indica vários tipos de base orientadora da ação, entretanto, salienta que em conjunto com seus seguidores, conseguiu testar quatro em seus estudos. Ao se reportar a Galperin, Talízina (1988), apresenta oito tipos de base orientadora da ação. Para diferenciá-las, adota três características: segundo o seu caráter generalizado, que pode ser concreta ou generalizada; segundo a plenitude, por ser completa ou incompleta; segundo o modo de obtenção, que pode ser "elaborada independente" ou se apresenta "preparada".

Talízina(1988) apresenta esses oito tipos distintas de Base Orientadora da Ação e salienta que as Bases Orientadora da Ação dos tipos I, II e II foram as primeiras que se estabelecerem por via experimental, a BOA do tipo IV se estabeleceu mais tarde (TALÍZINA, 1998). A autora resume As Bases Orientadora da Ação – BOA no quadro que segue:

QUADRO 3: Características gerais dos tipos de Base Orientadora da Ação (BOA)

Nº	Característica da Base Orientadora segundo seu caráter generalizado	Característica da Base Orientadora segundo a plenitude	Característica da Base Orientadora segundo o modo de obtenção
I	Concreta	Incompleta	Elaborada independentemente
II	Concreta	Completa	Preparada
III	Generalizada	Completa	Elaborada Independentemente
IV	Generalizada	Completa	Preparada
V	Generalizada	Incompleta	Preparada
VI	Generalizada	Incompleta	Elaborada Independentemente
VII	Concreta	Completa	Elaborada Independentemente
VIII	Concreta	Incompleta	Preparada

Fonte: Talízina (1988, p. 89).

A BOA I, primeiro tipo, é considerada incompleta, pois as orientações da ação são dirigidas para casos particulares. Além disso, pelo seu modo de obtenção, pelos alunos, que é pelo processo de ensaio e erro. Tais características tornam sua eficácia irrelevante, uma vez que a aprendizagem do aluno é lenta e marcada por erros. Nas palavras de Talízina (1988, p. 90): a "BOA tipo I se caracteriza por uma composição incompleta da base orientadora, os orientadores estão representados de forma particular [...]. O processo de formação da ação sobre uma base orientadora assim avança muito lentamente, com um grande número de erros." A sua função de transmissão de conhecimento torna-se restrita e limitada, dada a sua pouca abrangência.

O segundo tipo de base orientadora da ação é aquela que embasa a organização do ensino tradicional. O aluno dispõe das informações básicas para a realização das ações. Como diz Talízina (1988, p. 90), a BOA tipo II, se distingue pela ocorrência de todas as condições necessárias para o correto cumprimento da ação, ela justifica isso destacando que "[...] estas condições se dão ao sujeito, primeiro de forma preparada e, segundo, em forma particular que serve para orientação somente em um caso dado. Ainda acrescenta que, as vantagens desta BOA em relação a primeira é que a formação da ação é rápida e sem erros, pois se limita à

assimilação de tarefas particulares. Entretanto apresenta deficiência em termos de abrangência.

Galperin (1986) faz ressalva a esse tipo de BOA: no ensino escolar, as tarefas em geral se reportam a uma tarefa determinada e constituem uma série mais ou menos extensa. Em relação a essa série, manifesta-se claramente a deficiência fundamental da aprendizagem conforme o segundo tipo: para cada nova tarefa, deve-se destacar novamente a base orientadora, e ela é encontrada empiricamente. Em seu estudo, Talízina (1988) conclui que esse tipo de orientação proporciona a aquisição de habilidades que dão condições para que os alunos tenham maior independência na solução dos problemas propostos. Porém, por motivo das limitações do número de pontos de referência, ocorrem dificuldades diante de ações com novas particularidades.

A BOA III se caracteriza como:

a) Completa, ao se tratar da dimensão referente ao grau de completude. Isso requer que se estabeleça uma orientação para análise da situação que permita a diferenciação dos pontos de apoio da tarefa.

a) Generalizada (essencial), ou seja, a dimensão indicadora do grau de generalização. Nesse caso, a orientação primará, inicialmente, por combinações de relações e propriedades essenciais (índices) do conceito; posteriormente, passa a ser ponto de apoio nos índices de uma tarefa particular.

c) Independente, no que diz respeito à dimensão grau de liberdade de realização da tarefa. Como consequência da organização do ensino e da orientação, o estudante, durante o processo, adquire sua independência no desenvolvimento das operações e apropriação das ações.

A base orientadora do tipo três, BOA III, conforme Talízina (1988, p. 90), apresenta uma composição completa, pois "os orientadores estão representados em sua forma generalizada, característica para toda uma classe de fenômenos. [...] As ações inerentes a ela se caracterizam pela rapidez no processo, carência de faltas, grande estabilidade e amplitude da transferência dos nexos conceituais".

Galperin (1959) salienta que a BOA do tipo três apresenta três consequências em relação à aprendizagem: formação da análise geral; aplicação em tarefa particular e formação da ação especial por meio da execução da tarefa particular. Os estudantes recebem somente algumas indicações para a realização da ação de uma classe de fenômenos. As orientações levam em consideração os métodos gerais e a utilização das invariantes. Trata-se de um tipo de BOA generalizado, completo e independente. É considerada eficiente, por fazer com que o

aluno avance rapidamente, cometa poucos erros e amplie a transferência para outras situações. Para Talízina (1988, p. 90), "o terceiro tipo é mais produtivo". Além disso, atende às exigências atuais da atividade humana. Essa foi o tipo de BOA que utilizou-se nessa pesquisa por contemplar todas essas vantagens.

Entretanto, apesar dos muitos pontos positivos que se vê para a utilização da BOA III, há algumas críticas e limitações. Núñes (2009) considera que, apesar de sua importância, a BOA III se torna inviável quando se destina à resolução de tarefas de alto grau de novidade e complexidade em que a solução da ação se refere a uma orientação particular. A impossibilidade está na orientação completa para todas as tarefas por se limitar apenas a um conjunto determinado delas, com grau de generalização válido em certos limites.

O quarto tipo, BOA IV, tem como particularidade, comparando com a BOA III, o recebimento, por parte do aluno, das orientações completas da ação, planejadas detalhadamente. Conforme Talízina (1988), os pontos de referências ocorrem de forma generalizada, isto é, se voltam para a classe completa, em vez de casos particulares. Em consequência é "suficiente para o cumprimento correto da ação em todos os casos que se referem a uma determinada classe. Por fim, a base orientadora da ação se dá em forma preparada e não separada independentemente pelo sujeito" (p. 96).

Essa orientação também ocorre através de formação de ações lógicas, quer dizer, como conteúdo concreto (teórico) do objeto. Pela sua orientação teórica, o aluno faz apropriações de forma independente, a partir de métodos gerais. A atividade se forma, desde o princípio, com alto nível de generalização, isto possibilita maior abrangência de transferência. Para o êxito no cumprimento total do conjunto de tarefas é imprescindível que se inclua tanto o sistema de características necessárias e suficientes do conceito em estudo, quanto a regra lógica da inclusão.

O objetivo é que o aluno se aproprie da essência do conhecimento generalizado e do procedimento operacional para execução correta da atividade. Pode-se destacar algumas vantagens desse tipo de base orientadora: oportunidade de o aluno executar tarefas de forma independente e criativa; proporciona uma visão generalizada e produtiva; possibilita ao aluno a assimilação de um método comum por meio de casos particulares; sua orientação teórica contribui para o desenvolvimento do pensamento teórico dos alunos; promove adequadamente a generalização dos conteúdos; erros sem exageros, transferência de conteúdos em situações novas; rapidez e, consequentemente, economia de tempo.

Para Talízina (1988) os outros tipos de BOA, apresentam apenas interesse teórico. O tipo V se diferencia do anterior, pela sua peculiaridade de colocar ao aluno um sistema

insuficiente de pontos de referência para o cumprimento correto da ação, numa esfera delimitada "pelo grau de generalização dos pontos de referência separados" (TALÍZINA, 1988, p. 99). Por exemplo, quando se pede que o aluno faça algum reconhecimento, porém a orientação é dada com omissão de pontos de referência.

A BOA do tipo VI tem sua particularidade, por ser generalizada, incompleta, não se apresentar de forma preparada, mas independentemente pelo estudante. Baseada nessas características Talízina (1988) adverte que esta BOA nem sempre pode funcionar da mesma forma em situações diferentes, ou seja, poderá conduzir a execução correta para uma determinada situação e incorreta para outras.

A BOA do tipo VII, de acordo com Talízina (1988, p. 99-100), tem "[...] como características - pelo tipo particular dos pontos de referência e a plenitude -, coincide com o segundo, porém difere do último pelo modo de obtenção da base orientadora". É uma base adotada, por exemplo, pelos artesãos, "que atuam considerando todas as condições do sistema que garantam ações livres de erros, a produção dela de alta qualidade, mas seu alcance, neste caso, é extremamente limitado".

Para finalizar, Talízina aponta a possibilidade de um oitavo tipo de BOA, neste a orientação coloca o aluno diante de um sistema particular, incompleto na forma preparada. Na opinião desta autora, a BOA do tipo VIII é o mais difundido no sistema de ensino tradicional, pois nesse tipo de orientação, "[...] na escola, o professor dar, por regra geral, aos alunos indicações concretas concernentes a escrita de algumas letras, a solução de um problema concreto dado, etc" (TALÍZINA, 1988, p. 100).

Com já destacado, somente os quatro primeiros tipos de BOA foram testados experimentalmente e seus resultados indicaram que o terceiro tipo é o mais produtivo, embora o segundo tipo também chamou a atenção dos pesquisadores. "Quando é necessária uma rápida formação, sem erros, das ações aplicadas em condições concretas, o segundo tipo de orientação pode ser utilizado exitosamente" (TALÍZINA, 1988, p. 100).

3.2.3 Etapa de formação da ação no plano material ou materializado

Fica claro até aqui que a proposta de Galperin tem seu fundamento na Teoria da atividade tipicamente humana de Leontiev (1978) e traz grandes contribuição para o ensino. Está inserida nos métodos ativos de ensino, no que se refere à abordagem Histórico-Cultural, possui como princípio que a base da aprendizagem humana não está na simples observação ou em ouvir informação sobre o objeto de estudo. Para Galperin a fonte do conhecimento é ação

que, nem sempre é evidente, e por isso é buscada no plano material. As relações, as conexões e os procedimentos entre os elementos que as compõem se transformam em condição necessária para a ação mental.

Na etapa da formação da ação na forma material ou materializada, os alunos já cumprem as ações, porém de forma material ou materializada. O ponto de partida da ação é a relação com objetos reais que Galperin chama de material ou materializado (modelos), que se diferenciam não pelo modo operacional, mas pela forma de representação do objeto. Na forma material, o próprio objeto é estudado e na forma materializada, esse objeto é substituído por um modelo, ou seja, o modelo que é estudado, este expressa os elementos e princípios essenciais do conceito a ser assimilado. Esta etapa compete aos alunos assimilar o conteúdo da ação, e ao professor, cabe realizar um controle objetivo do cumprimento de cada uma das operações que fazem parte da ação (TALÍZINA, 1988).

Galperin e Talízina (1967, p. 273) descrevem que exclusivamente se deve recorrer à forma materializada quando "o objeto e os meios originais para percebê-los diretamente já estão ao alcance" dos indivíduos. Contudo, o modelo deve apresentar aproximações com o que o aluno tenha condições de observar de modo compreensível e ao mesmo tempo, não contenha elementos que lhe traga desvio de atenção ou permita a distração, ou seja, traduzir com a máxima clareza a situação para o aluno. E ainda, deve apresentar características abstratas e simples, peculiares ao objeto de estudo e de acordo com a faixa etária escolar dos alunos. Podem assumir formas distintas, no entanto, deve atender às especificidades do objeto de estudo.

Nessa etapa, segundo Talízina (1988, p, 110), "não deve haver grande número de tarefas de um só tipo, já que neste caso a ação se reduzirá e automatizará", tanto na forma material ou materializada, o aluno – que pode estar em pares - entra em processo de execução das operações que compõem a ação, ainda no plano externo. Deve haver orientação e observação atenta do professor para que cumpra rigorosamente o desenvolvimento de todas as operações. Para Nuñez e Pacheco (1997), os objetivos voltam-se à transformação do objeto, alvo da atividade, por meio de reflexão e discussão sobre o teor conceitual, que conduz à apropriação do conhecimento no plano mental.

Talízina (1988, p. 110) adverte que para generalizar a ação, deve-se incluir no programa de ensino, tarefas de aplicação da ação dada, "[...] ao mesmo tempo, nesta etapa não deve haver grande número de tarefas de um só tipo, já que neste caso a ação se reduzirá e automatizará". O aluno, ao executar as operações – manipulativas ou visuais – descobre, diferencia e fixa a relação geral que caracteriza o conteúdo e a estrutura do objeto do conceito.

Sua referência de apoio, além do professor, são os esquemas da Base Orientadora da Ação, contemplados nas fichas ou mapas de estudos, que também trazem: os conhecimentos, o procedimento ou composição, os mecanismos de controle, entre outras, orientações.

Para Galperin (1986, p. 304), o conhecimento das coisas se configura como resultados das ações que serão realizadas com estas coisas, essas ações à medida que vão se formando, se transformam em capacidade e, aos poucos tornam-se automáticas e viram hábitos. "Por isso, o tipo de organização e a formação por etapas das ações objetais constituem o processo central de assimilação de novos conhecimentos, capacidade e hábitos". Galperin (1986) salienta o importante papel que desempenha os mapas da atividade por mudar amplamente atitude do aluno diante da tarefa. Para ele, na ausência desse instrumento, o sujeito se apresenta indiferente e passivo, o que requer estímulos externos, ou seja, depende de orientações alheias, contudo, ao recebê-los torna-se ativo.

Ainda sobre isso, Nuñez e Pacheco (1998) concordam com Galperin e consideram os mapas da atividade um recurso externo importante, uma vez que propicia a aquisição de uma gama de conhecimento, além disso, facilita sua compreensão e apropriação pela sua utilização. Dentre as suas características, destacam-se: eficiência ao se iniciar pela materializada; garantia do estudo compartilhado, porém sem perder a individualidade na fase seguinte; possibilidade de redução da ação com inclusão outros materiais; obtenção de um nível maior de independência, pelos alunos, por redução e eliminação.

É importante salientar que essa etapa requer um planejamento de um modo tal que estimula os alunos a extrair a essência do conceito sem imagens aparentes, ou seja, fazer com que o aluno possa compreender e saber explicar os conceitos já assimilados, pois é início da mudança da atividade externa para a interna. Galperin (1957, p.8) esclarece que nesse momento "grande parte da ação se converte em "mental" no sentido que não se realiza, mas apenas se conscientiza para executar as tarefas que serão sugeridas". Nesta etapa deve haver lugar para preparar os alunos a fazerem a transferência da ação material para a verbal. Para Galperin (1957) a forma material ou materializada se combina com a verbal, nesta o aluno formula na fala tudo o que realiza na prática, ou seja, materialmente.

3.2.4 Etapa de formação da ação como verbal externa

Nesta etapa, segundo Talízina (1988), todos os elementos da ação são apresentados na forma verbal externa, a ação passa por generalização, mas ainda segue sendo não

automatizada nem reduzida. A fala começa a cumprir uma nova função, diferente das etapas anteriores, nesta etapa a fala se converte em discurso independente de todo o processo.

A linguagem segundo a teoria histórico-cultural desempenha um papel essencial no desenvolvimento das funções superiores. Segundo Vigotski (2001), a linguagem é que determina o desenvolvimento do pensamento, ou seja, ela vem por meio dos instrumentos linguísticos do pensamento e pela experiência sociocultural da criança. "O crescimento intelectual da criança depende de seu domínio dos meios sociais do pensamento, isto é, da linguagem" (p.44).

Na mediação da relação entre o homem e o mundo, a palavra é condição necessária, é o mais complexo e completo signo com raiz social e biológica que, difere dos outros animais, além de possibilitar ao indivíduo humano seu desenvolvimento psicológico. É considerada elemento fundamental no processo de assimilação de qualquer forma de conhecimento que à princípio é externo, isto é, está nas relações sociais, com o passar do tempo torna-se individual. Com a atividade mental é formado o conceito, porém a palavra é o meio principal para determinar os seus traços, sintetizá-los, expressá-los e abstraí-los.

A etapa de formação da ação no plano da linguagem externa, foi traduzida a princípio por Galperin (1957) apenas como a forma verbal da ação, ou seja, explicação expressa em voz alta pelo estudante. Entretanto, o autor ampliou os seus estudos e passou também a admitir a forma da linguagem escrita. Acerca disso, Nuñez (1997, p. 68) diz que nessa etapa, a linguagem se transforma em portador de todo o processo, "tanto da tarefa, como da ação pelo que o aluno deve orientar-se não só ao conteúdo do objeto, mas também a expressão verbal, evitando o formalismo das ações verbais".

Ele justifica destacando que a linguagem verbal externa transformada em linguagem escrita requer a explicitação da forma conceitual da ação material ou materializada e das ações mentais até então requeridas. Porém, é importante salientar que a linguagem escrita deve atender às características do desenvolvimento dos estudantes e suas possibilidades.

Os objetos físicos, nessa etapa, não mais estará a disposição do aluno. No entanto, o conteúdo conceitual será o mesmo, tendo em vista que este é a base para a comunicação verbal, bem como do acesso aos símbolos que o representa. Conforme Talízina (1988), a etapa verbal reflete a ação material ou materializada, sem a obrigação de que o estudante explique o que aprendeu. Contudo, deve demonstrar uma forma de organização de seu pensamento referente à ação em referência. Isso se faz possível através da palavra e seus significados que também são instrumentos para a generalização dos primeiros detalhes visualizados e analisados durante a ação material.

Galperin (1957, p. 56) enfatiza que “[...] do conteúdo concreto dos objetos se separam os traços e as propriedades substanciais para a ação e que são objetos”. E ainda, o aluno, por meio das palavras, traz à tona suas limitações sensoriais, e realiza a análise de forma consciente e independente do objeto de estudo. Concluindo, essa etapa se caracteriza como um estágio do processo de aprendizagem e desenvolvimento do pensamento de um referido conceito, onde o aluno deve explicar em voz alta ou simplesmente escrever a sua sequência de pensamento usada para executar determinada ação, ele enuncia e explica, em voz alta ou escreve, o curso das operações adotadas e executadas para a efetivação da ação em processo de internalização.

3.2.5 Etapa de Formação da Ação na Linguagem Externa

Nessa etapa, a ação se realiza de modo semelhante à etapa anterior, a diferença se dá pelo fato de que a ação se realiza em silêncio, por conta própria e sem escrita, uma interpretação para si mesmo, de modo que as operações são executadas com consciência. “Realizam-se operações que são controladas de acordo com os resultados de cada uma delas” (LONGAREZI E PUENTES, 2013, p. 297). Isso que dizer que as operações nessa etapa começam a se automatizar, o novo conhecimento se internaliza e transforma-se em novas habilidades para serem aplicadas em diferentes situações.

As atividades nessa etapa, já podem ser trabalhadas pelo aluno individualmente, de forma independente. É o momento em que essa forma de ação transforma-se numa ação mental e começa a reduzir-se e a automatizar-se com mais rapidez. A partir desde momento, a ação transfere-se para a última etapa descrita por Galperin, a etapa da formação da ação em linguagem interna.

3.2.6 Etapa de Formação da Ação em Linguagem Interna

Nesta etapa a ação adquire um desenvolvimento automático muito rapidamente, trata-se do ato do pensamento. Galperin e Talízina (1967, p. 275), relatam que “[...] deve ser possível transferir esta forma pessoal de linguagem para uma solução, mental interna sob o modo de expressão individual por si só, e o ato em um pensamento verbal”.

Conforme Nuñez (2009), a linguagem interna ao se transformar em função mental interna proporciona novos meios para o pensamento. Alcançando essa condição, o aluno se desliga da ação verbal e converte-a em mental, também, se desvincula dos signos externos e se baseia nos recursos internos. Esses autores relatam que as coisas reais são substituídas e o

objeto da ação passa a ter caráter ideal, de imagem. “A atividade mental constitui na realidade uma atividade nervosa superior, produto da interiorização de significados sociais, num processo de atividade social mediado por signos”.

Quando é proposto ao estudante atividades seguindo as etapas desenvolvidas na teoria de Galperin, tem-se como propósito a transformação da ação externa em interna, é esperado que o aluno consiga internalizar o conhecimento e, desta forma, eleve o conhecimento empírico a um nível maior de abstração a ponto de torná-lo científico.

Assim, pode-se concluir que a nova ação se transforma de material a mental, de não generalizada a generalizada, num processo de síntese em forma detalhada ou abreviada, com um incremento gradual da independência dos alunos e um sentido consciente da teoria e da prática na direção da aumatização (TALÍZINA, 1984).

3.3 TAREFA DE COMPREENSÃO CONCEITUAL NO ENSINO DE CÁLCULO: NOSSA PROPOSTA

As tarefas, na opinião de Talízina (2001), são as células do processo de assimilação, tendo em vista que sua determinação em cada etapa do processo permite a sua direção adequada nesse processo. O sistema de tarefas constitui o núcleo da organização da assimilação, expressa uma concepção de aprendizagem e de desenvolvimento, e define as singularidades metodológicas como hipóteses de progressão que orientam esse processo. As tarefas são uma via para estimular a atitude criativa e a independência cognoscitiva dos estudantes, de formar qualidades da personalidade em função dos objetivos ou finalidades educativas (NÚÑEZ; RAMALHO; ALBINO, 2013).

> A tarefa é uma atividade pedagogicamente estruturada dirigida a criar situações de aprendizagem dos estudantes. São núcleos de atividades, estruturadas e sequenciadas que permitem organizar a apropriação da ação. Criam motivações e necessidades que movimentam a atividade de aprendizagem e mobilizam a personalidade do estudante. Em cada tarefa existe um conhecimento a se assimilar, e uma ação a se formar e um valor a se formar. Assim, as tarefas constituem o mecanismo para a internalização dos objetivos de ensino e de aprendizagem (NÚÑEZ; RAMALHO; ALBINO, 2013, p. 398).

Núñez; Ramalho e Albino (2013), ao explicarem sobre as tarefas de aprendizagem na teroria de Galperin, ressaltam que esse sistema deve possibilitar trabalhar segundo a relação entre o individual e o grupo, ou seja, atender as diversas ZDP que existem no processo de aprendizagem e segundo as etapas de assimilação de Galperin, que confere, por sua vez, uma

dinâmica ao ensino que o torna flexível e autossuficiente, na medida em que os estudantes resolvem as tarefas e se criam novas situações de interesse/aprendizagem, como uma espiral dialética que marca e potencializa o desenvolvimento integral dos estudantes.

A utilização das tarefas, durante o processo de assimilação, se fundamenta no princípio de contraste, ou seja, mostrar primeiro as tarefas que revelam as situações que mais se diferenciam e depois as tarefas que mais se assemelham (TALIZINA, 2000). Nas diferentes etapas da formação da habilidade, as tarefas têm funções diferenciadas. Na primeira etapa, servem para criar a motivação pela aprendizagem. Na segunda, são usadas para construir a orientação da atividade que é objeto de aprendizagem, e, nas etapas posteriores, são o meio para a assimilação segundo os indicadores qualitativos.

Portanto, as tarefas podem ser compreendidas como atividades a serem realizadas pelos estudantes na sala de aula ou fora dela, que se dirigem à assimilação de conhecimentos, ao desenvolvimento intelectual, à formação de qualidades da personalidade do estudante. "As tarefas têm uma estreita relação com os objetivos e os outros componentes do processo pedagógico devem ser manifestação das exigências básica das novas formações que pautam o desenvolvimento que se potencializam com a aprendizagem" (NÚÑEZ; RAMALHO; ALBINO, 2013, p. 397).

Baseados nesses pressupostos, elaboramos uma proposta para trabalhar os conceitos do Cálculo Diferencial e Integral, organizando o ensino a partir das etapas da teoria de Galperin. As tarefas foram delineadas a partir dos problemas elaborados por Stewart (2006), obra de referência e adotada na disciplina de Cálculo I e II, ministrada pela professora/pesquisadora durante o processo de coleta de dados. Alguns problemas foram adaptados no intuito de visualizar com mais clareza as etapas descritas por Galperin.

A proposta foi elaborada a partir de uma correspondência entre as quatro etapas descritas por Polya (1995) e as etapas desenvolvidas por Galperin (1957). O foco de todo o trabalho foi na observação de como se dava a compreensão dos estudantes acerca dos conceitos de Limite, Derivada e Integral, tendo como ponto de partida a resolução de problemas. Ao assumir essa postura metodológica, reafirmamos o que assinala Stewart (2006, p. ix): "a maneira mais importante de encorajar a compreensão conceitual é através da resolução de problemas".

O estudo de Limite de Função foi motivado por uma discussão sobre os problemas da Tangente e da Velocidade e os Limites foram tratados sob os pontos de vista descritivo, gráfico, numérico e algébrico. Para o estudo das Derivadas de Funções, as atividades apresentadas exploram o conceito de Derivada em diferentes contextos. Os problemas de

áreas e distância serviram para motivar o estudo da Integral Definida, bem como também, a notação de somatória, dando ênfase na explicação do significado da integral em vários contextos incluindo a estimativa dos valores das integrais a partir de gráficos e tabelas.

A proposta elaborada nessa pesquisa consiste em compreender o processo de internalização desses conceitos pelos estudantes, a partir de uma visão ampliada das etapas de de resolução de problemas descritas por Polya (1995), fazendo uma correspondência com as etapas mentais enuciadas por Galperin (1959). Essa teoria "[…] se sustenta no princípio de que é possível a formação de processos mentais pela via de uma atividade planejada, os quais se constituem em órgãos funcionais da própria atividade" (LONGAREZI E PUENTES, 2013, p. 295).

Para melhor compreensão da proposta, apresentamos o esquema utilizado na construção de uma base de orientação para os estudantes na resolução das *Tarefas de Compreensão Conceitual* de Limite, Derivada e Integral. Estão em destaques as etapas descritas por Polya e as desenvolvidas na Teoria de Galperin.

1ª etapa - Apresentar a **motivação** para a resolução das tarefas: tomamos por base as atividades propostas por Stewart (2006) e utilizamos dados do mundo real para introduzir, e ilustrar os conceitos de cálculo. Essa etapa se relaciona com a **etapa motivacional** introduzida por Talizina na Teoria da Formação por Etapas das Ações Mentais de Galperin.

2ª etapa – **Compreensão do problema e estabelecimento de um plano**: para compreender e estabelecer um plano de execução das ações, faz-se necessário responder alguns questionamentos: (i) Qual o objetivo do problema? (ii) Quais as operações necessárias para a solução da atividade? (iii) Quais são as condições objetivas para resolver o problema? (iv) Quais conhecimentos precisa-se mobilizar para a solução dos problemas? (v) O que se deve levar em consideração sobre os dados disponíveis no problema? Esta etapa está relacionada com a primeira etapa descrita por Galperin – o estabelecimento da **Base Orientadora da Ação (BOA)**.

3ª etapa – **Execução do plano**: aqui necessita-se criar estratégias para por em prática o plano estabelecido. Relacionamos as etapas (2ª, 3ª e 4ª) descritas por Galperin (1957), primeiro deve haver a **formação da ação no plano material ou materializado,** onde a ação se realiza de forma detalhada segundo cada operação que deve ser orientada e controlada pelo professor. Em seguida ocorre a formação da ação com o uso da linguagem, **etapa verbal**, que também pode ser desenvolvida por meio da escrita, ou seja, "nesse nível, a ação se realiza

usando os recursos da linguagem externa (oral ou escrita). É uma etapa de raciocínio sobre a atividade, que se executa segundo o sistema de operações, de forma detalhada, sendo cada operação orientada e controlada pelo estudante […]" (LONGAREZI E PUENTES, 2013, p. 297). Na sequência, vem a **etapa da linguagem externa para si,** onde a ação se realiza de forma muito parecida, entretanto, a fala não é verbalizada, a ação ocorre em silêncio. Todo esse percurso deve fazer parte do processo de solução da atividade proposta.

4ª etapa – **Análise da solução**: nessa fase a proposta é examinar e fazer um retrospecto de todas as ações realizadas para a solução do problema (POLYA, 1995). Relacionamos com a última etapa descrita por Galperin (1957), **a ação mental**, pois compreendemos que o estudante ao fazer essa análise, torna a ação reduzida, automatizada, "a ação não é mais detalhada em todo o sistema de operações – e se automatiza, transformando-se em fala interna *sui generis,* que resulta desse processo e na qual se formam as imagens (conceitos) e ações adequadas a elas" (LONGAREZI E PUENTES, 2013, p. 297).

Sintetizamos essa base de orientação das *Tarefas de Compreensão Conceitual* no Quadro que segue:

QUADRO 4: Etapas de orientação das Tarefas de Compreensão Conceitual

Etapas de Polya	Etapas de Galperin
-	Etapa Motivacional
Compreender o problema e Estabelecer um plano	Etapa do estabelecimento da Base Orientadora da Ação – BOA (familiarização com as condições concretas da ação).
Executar o plano	Etapa material ou materializada (realização da ação de forma detalhada com o auxílio do professor na orientação e controle). Etapa verbal (formação da ação com o uso da linguagem oral ou escrita). Etapa da linguagem externa para si (a ação se realiza em silêncio).
Analisar a solução	Etapa da ação mental (a ação se reduz, se automatiza).

As *Tarefas de Compreensão Conceitual* propostas durante a intervenção realizada na pesquisa, foram cuidadosamente planejadas com vistas a promover a internalização dos conceitos estudados conforme preconiza a Teoria de Formação por Etapas das Ações Mentais. Galperin (1957) formulou a teoria do desenvolvimento psíquico dando ênfase ao papel das ações externas, no surgimento e formação das ações mentais por meio do ensino. Sua teoria

foi desenvolvida juntamente com outros colaboradores e seguidores da Teoria Histórico Cultural desenvolvida por Vigotski.

3.4 A ORGANIZAÇÃO DO ENSINO DE CÁLCULO COM BASE NA TEORIA DE GALPERIN

O desenvolvimento da ação de ensino por meio dessas etapas requer uma atitude assumida a favor do professor, entretanto, para que este não corra o risco de conceber essa teoria apenas como um modismo, é necessário a compreensão da base teórica que a fundamenta. Afinal, o que está em cena é o processo de internalização da atividade externa em interna em um ciclo cognoscitivo, em que são observadas etapas interrelacionadas que, antes de serem colocadas em prática, são cuidadosamente planejadas pelo professor. Darsie (1999, p. 9), alerta que: "Toda prática educativa traz em si uma teoria do conhecimento. Esta é uma afirmação incontestável ainda quando referida à prática educativa escolar".

A teoria de Galperin se apresenta como um excelente suporte ao professor quando o assunto é a organização do ensino. Muitos psicólogos ocidentais comungam com a ideia de que Galperin foi um psicólogo educativo que elaborou uma tecnologia de ensino, assinalam Longarezi e Puentes (2013). Damázio (2000) salienta que foi com essa atenção que a teoria do processo de formação e apropriação de conceitos por etapas atingiu o status de expressão no desenvolvimento da pedagogia soviética.

Galperin e Talízina (1967) apresentam uma pesquisa sobre a apropriação de conceitos em Geometria trabalhada com um grupo de estudantes do sétimo ano escolar, destacando dessa forma, um exemplo da eficácia desse processo. A conclusão foi de que os sujeitos dominaram por completo o conceito e suas inter-relações, como consequência do atendimento detalhado de todas as etapas. A evidência de aprendizagem está nas respostas corretas aos problemas que lhes são propostos, bem como nas definições precisas apresentadas nas tarefas.

É relevante salientar a importância do cumprimento de todas as etapas, os pesquisadores que trabalham com essa teoria, alertam que a omissão de uma etapa pode trazer resultados ruins. Por exemplo, se são excluídos algumas das etapas, o desenvolvimento do conceito pode ficar comprometido. Para Galperin e Talízina (1967, p. 300), o ensino gradual da matéria de forma detalhada, ou seja, na forma materializada do processo do pensamento, ao processo puramente verbal, seguindo depois para a etapa de pensar em silêncio, produz efeito de que o conteúdo e a lógica do processo do pensamento, em todas as formas são compreensíveis e acessíveis à criança.

No contexto da presente pesquisa, o ato mental que se pretende observar nos estudantes licenciandos em Matemática refere-se aos conceitos desenvolvidos em Cálculo Diferencial e Integral. Assim, apresenta-se as principais ideias e propostas de ensino para o conceito de Limite, Derivada e Integral de função tendo por base a Teoria de Galperin. Para tanto, utiliza-se a sequência correspondente a cada etapa da Teoria.

A motivação, definida por Talízina (1988) como etapa zero, é considerada por muitos autores de fundamental importância. Diversas teorias da aprendizagem citam a necessidade de manter o estudante predisposto a aprender, Ausubel (1980), por exemplo, enfatiza que para haver aprendizagem significativa, o estudante necessita, sobretudo, estar motivado. Galperin (1957), embora não tenha descrito a motivação como uma das etapas de sua teoria, deixou claro que esta deveria preceder as cinco etapas de assimilação dos conceitos. Ele ressalta a importância da motivação para que o aprendiz inicie a familiarização com as condições concretas da ação, que corresponde à etapa da Base Orientadora da Ação.

Baseado nesses preceitos, de acordo com a própria teoria de Galperin e de todo o grupo de psicólogos soviéticos da escola de Vigotski, se fez necessário um estudo preliminar com vistas a conhecer o nível conceitual em que se encontravam os estudantes e provocar nos mesmos interesse pela aprendizagem dos novos conceitos. Esse estudo foi concretizado por meio da aplicação de tarefas que envolviam situações do cotidiano dos alunos, buscando criar necessidade cognitiva para o estudo de cada tema: Limite, Derivada e Integral de Função de uma variável real.

O ensino problêmico tem se mostrado uma via eficiente para a motivação da aprendizagem, assinalam Núñez *et. al*. (2004). Esses autores garantem que sob a orientação do professor, os estudantes assimilam de forma produtiva os novos conhecimentos, entretanto advertem, as tarefas que se convertem em um problema cognitivo deve satisfazer os seguintes requisitos: apresentar uma dificuldade cognitiva para os alunos, isto é, deve requerer reflexão sobre o problema, objeto de estudo; despertar o interesse cognitivo nos alunos e se apoiar na experiência anterior e no conhecimento que os alunos já possuem. Outro ponto importante que Núñez *et. al.(2004)* assinalam é que apesar da motivação ser uma etapa inicial, a mesma deve manter-se durante todo o processo de assimilação.

Em cada unidade trabalhada no estudo de Cálculo: Limite, Derivada e Integral de Funções de uma variável real, houve a preocupação de colocar os estudantes diante de situações que os levassem a utilizar os problemas como um fio condutor ao novo conceito a ser assimilado. Assim, as *Tarefas de Compreensão Conceitual* serviram tanto como um fator

motivacional, pois tratava-se de problema com aplicação prática, quanto para conhecer o nível de partida dos estudantes.

A segunda etapa, ou seja, a etapa de orientação, que consiste na elaboração da Base Orientadora da Ação, de certo modo foi construído em conjunto com os alunos, pois estes buscavam metodologias para a solução das tarefas propostas. A Base Orientadora expressa o conjunto de condições para a assimilação do conceito, nas palavra de Núñez (2009), a Base Orientadora da Ação constitui o modelo da atividade, um projeto de ação. Assim buscamos detalhar de forma clara e objetiva o conjunto de princípios necessários para o desenvolvimento de cada tarefa. Dentre as Bases Orientadoras da Ação sugeridas por Galperin, optamos nessa pesquisa pelo tipo de BOA III, pois acreditamos ter mais aproximação com o objeto de estudo, no que se refere à apropriação dos conceitos de Limites, Derivadas e Integral de Função de uma variável real.

Reafirmamos que esse tipo de BOA caracteriza-se por ser generalizada, completa e independente. Desta forma, os estudantes, participantes da pesquisa, recebiam as orientações para a realização das tarefas destacando todas as partes estruturais e funcionais da atividade (orientação, execução e controle) de modo que estes tomassem conhecimento necessário sobre a ação a ser realizada, bem como também a sequência de etapas e aspectos conceituais e procedimentais que deveriam utilizar para execução das tarefas.

Na medida em que os estudantes estavam seguros das condições para o cumprimento das tarefas de aprendizagem, iniciou a etapa de formação da ação do plano material ou materializado, esta etapa consiste no ponto de partida para a apropriação da ação. As trefas incluem ações externas e foram desenvolvidas por meio de resolução das *Tarefas de Compreensão Conceitual*. Em cada unidade trabalhada, ao selecionar as tarefas, tivemos o cuidado de apresentá-las em uma ordem gradual de dificuldade de modo que na sua solução os estudantes pudessem aplicar de forma explícita ou implicitamente as etapas criadas para a resolução das *Tarefas de Compreensão Conceitual*.

O conceito de Limite foi desenvolvido sob os pontos de vista descritivo, gráfico, numérico e algébrico e foi motivado pelos problemas da Tangente e da Velocidade. O estudo das Derivadas foi introduzido a partir da exploração do seu conceito em vários contextos e todas as funções básicas foram trabalhadas, incluindo a exponencial, logarítmica e a inversa das funções trigonométricas. Os problemas de área e distância serviram como atividade motivadora para a compreensão das Integrais, a notação de somatória foi introduzida conforme necessário e o significado de integral foi apresentado em contextos diferenciados,

bem como na estimativa dos valores dela a partir de gráficos e tabelas, usando a soma de *Riemann*.

Nessa etapa também foram utilizados recursos computacionais, a construção de gráficos utilizando tecnologias enfatiza a interacão entre cálculo, calculadora e software e os estudantes são questionados a explicar seus significados. Ao professor, nessa etapa, cabe realizar o controle objetivo do cumprimento de cada uma das operações que formam parte da ação, e ao estudante, cabe assimilar o conteúdo da ação. O objetivo não é automatizar. As atividades aplicadas foram diversificadas de modo que permitissem a execução de forma consciente por parte dos estudantes. Assim, torna-se mais fácil o emprego da etapa seguinte, que diferencia-se dessa pela forma da ação.

No momento em que percebe-se a assimilação dos conceitos por parte dos estudantes, passa-se a próxima etapa, da formação da ação como verbal externa. Esta se caracteriza pela linguagem oral ou escrita, configura-se como instrumento de generalização da ação, que passa de material a verbal. As atividades foram realizadas em grupo, porém nessa etapa o controle foi feito de forma mais individual, pois cada estudante tinha que verbalizar a sua forma de ação, explicar como chegou em cada resposta dada aos problemas propostos. Essa explicação era dada tanto de forma escrita, como de forma verbal, durante a execução das atividades foi feito uma espécie de entrevista com os estudantes e todas as observações, anotadas no diário de bordo que foi-se construindo durante a intervenção.

Inicialmente foi difícil compreender se de fato os estudantes atingiam plenamente essa etapa, pois estes tinham grandes dificuldades em explicar o procedimento realizado, quase sempre respondiam corretamente, mas não conseguiam explicar a sua resposta. Havia um estranhamento por parte dos mesmos, pois não é comum fazer esse tipo de indagações nas aulas de Cálculo. Entretanto, com o passar das aulas, foi ficando natural e os estudantes já possuíam mais desenvoltura para argumentar o raciocínio utilizado na realização das tarefas propostas, nos dando base para perceber um processo de generalização dos conceitos por parte dos mesmos.

Ramalho *et al* (2004) salientam que a argumentação das ações durante sua execução, possibilita o desenvolvimento de estratégias metacognitivas e dessa forma o estudante vai tomando consciência dos procedimentos que utiliza, porque são esses e não outros, sobre como se explica os conceitos, sobre seus êxitos e erros na aprendizagem, formando assim um tipo de controle interno, ou seja, aprende a aprender.

As duas últimas etapas, a formação da ação em linguagem externa para si e da linguagem interna, as ações realizadas pelos estudantes tornam-se automatizadas e dessa

forma, mesmo havendo um controle por parte do professor, há dificuldade na observação, pois trata-se do ato do pensamento e o processo está oculto. É uma etapa de trabalho independente, em que foram utilizadas tarefas que exigiam transferência de conhecimento, tarefas que estimulavam a criatividade para a resolução das *Tarefas de Compreensão Conceitual* e aplicação em novas situações. Tudo planejado com muito cuidado, a fim de perceber que o estudante organizou o trabalho em um plano mental. O cumprimento correto da ação, o tempo do cumprimento, o caráter consciente e generalizado da ação, as conversas entre os colegas, a socialização do que foi aprendido, foram registrados em um diário e nas filmagens e serviram de base para análises.

Sintetizando os principais pontos abordados, podemos afirmar que é possível planejar ações para serem trabalhadas em sala de aula que promovam a aquisição do conhecimento matemático por parte dos estudantes, no entanto, é necessário observar com rigor o aspecto teórico que embasa a prática. O capítulo que segue apresenta os pressupostos metodológicos da pesquisa.

CAPÍTULO IV – A CONFIGURAÇÃO E OS ASPECTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

Neste capítulo tratamos dos aspectos metodológicos da pesquisa, retomamos inicialmente, seus objetivos, problema e as circunstâncias que a originaram e posteriormente, apresentamos alguns dados a respeito da realidade e o contexto na qual ela se desenrolou. Finalizamos o capítulo detalhando os procedimentos metodológicos de coleta de dados e os seus critérios de análise

4.1. OBJETIVOS E CIRCUNSTÂNCIAS QUE ORIGINARAM A PESQUISA

O ponto de partida, conforme registramos, foi a nossa inquietação em relação a forma como o ensino de Cálculo vem sendo ministrado nos diferentes cursos de graduação. Outro fator relevante e que contribuiu para a nossa opção de pesquisa foi o reconhecimento das potencialidades da corrente teórica que a sustentam em relação a alguns dos problemas que enfrentamos no âmbito pedagógico.

O Cálculo Diferencial e Integral figura entre as disciplinas básicas de diversos cursos superiores, tem a possibilidade de oferecer ferramentas para a resolução de problemas nas áreas das ciências físicas, na engenharia, bem como na biologia e nas ciências econômicas. Os conceitos estudados em Cálculo permitem tratar diversos tipos de fenômenos tais como a queda de um corpo, o crescimento populacional, o equilíbrio econômico, a propagação do calor e do som, entre outros. O Cálculo é um instrumento muito eficaz na modelagem de situações concretas que envolvem a ideia de taxa de variação. Mesmo com essa gama de situações em que podemos ver a aplicabilidade dessa disciplina, ainda hoje percebe-se que os professores organizam o ensino priorizando a aula expositiva e apresentando os conceitos como verdades inquestionáveis, como algo pronto e acabado sem nenhuma preocupação em dar significados, o que resulta em alto índice de reprovação nessa disciplina.

Observando essa realidade foi que traçamos objetivo a ser alcançado nessa pesquisa: investigar se a organização do ensino de Cálculo baseada nos pressupostos da Teoria da Formação por Etapas das Ações Mentais de Galperin, promove a aprendizagem dos conceitos de Limite, Derivada e Integral nos estudantes da Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Roraima. A pesquisa se desenrolou no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Roraima no curso de Licenciatura em Matemática. A possibilidade de aplicação das ideias centrais da Teoria de Galperin ao processo de ensino e aprendizagem, a

construção de um conhecimento a respeito de como se entrelaçam teoria e prática na organização do ensino são pontos chaves dessa pesquisa.

4.2 REFERENCIAL METODOLÓGICO

Não foi fácil decidir sobre o recorte a ser dado. Como caminhar metodologicamente? O que privilegiar? Como adequar o trabalho feito a partir da organização do ensino de Cálculo às contingências dos objetivos pretendidos? Algumas ideias chaves foram responsáveis pela definição metodológica da pesquisa. Uma delas é sustentada pelo preceito de que as pesquisas possuem características concretas que lhes são próprias; que os princípios gerais metodológicos, embora úteis, são referenciais amplos, genéricos, que não levam em consideração essas peculiaridades. E que, por causa disso, é necessário adequar os métodos às circunstâncias e aos problemas (BECKER, 1993, p. 13).

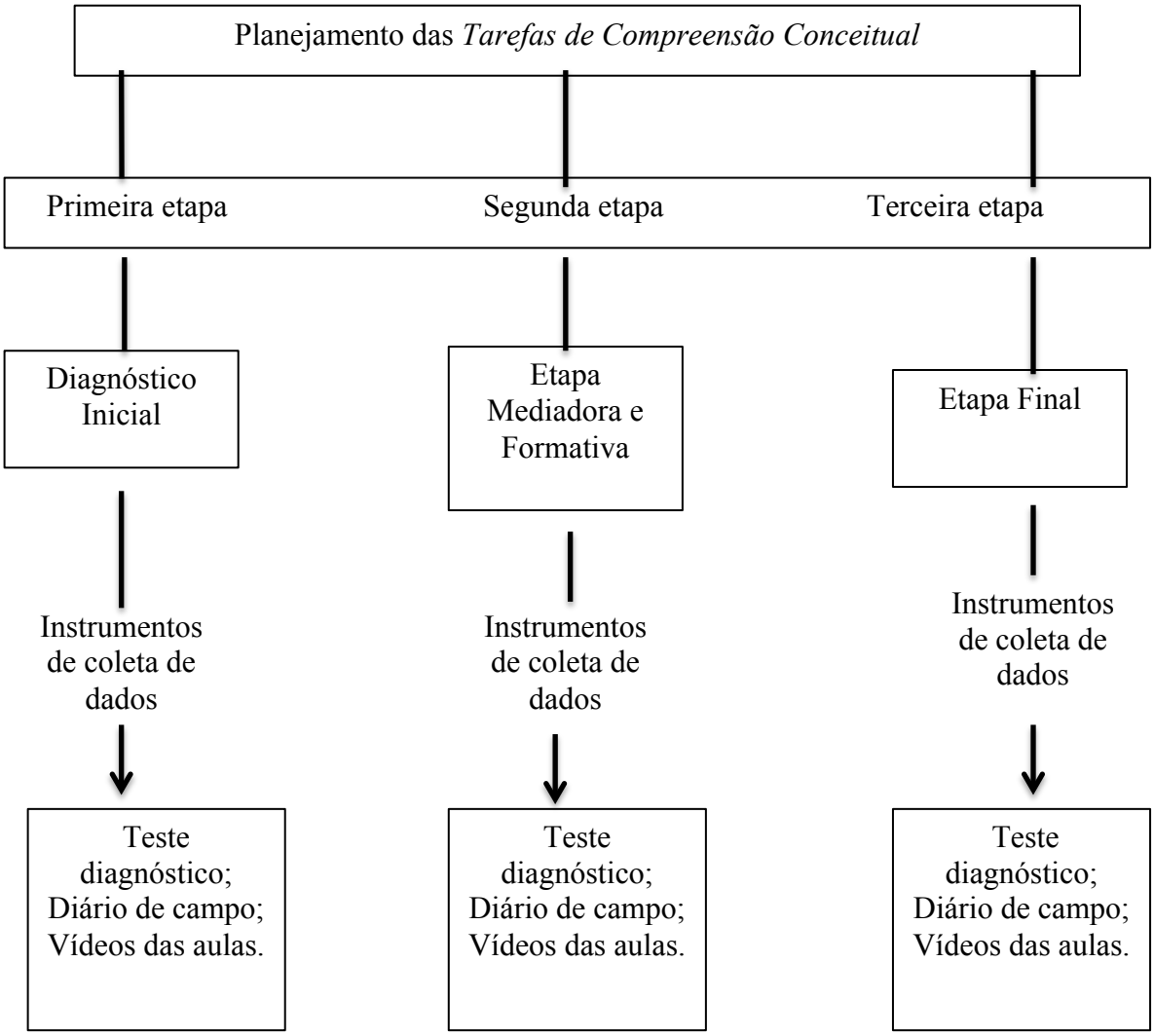
Vale ressaltar que a adequação às circunstâncias específicas não significa, no entanto, o abandono do rigor imprescindível ao fazer pesquisa, implica em uma preocupação na tomada de decisão consciente em relação a condução da mesma. Outra ideia é a que afirma, que nem sempre o mais relevante para ser investigado coincide com os recursos mais consagrados, como por exemplo, o da pesquisa quantitativa (DEMO 1984; MARTINS e BICUDO 1989; BECKER, 1993). “Podemos optar por instrumentos de pesquisa não aceitos pela maioria dos pesquisadores de rígida formação à moda antiga, sem por isso abandonar a preocupação científica” (THIOLLENT, 2009, p. 24).

Neste sentido, observamos que atualmente para se desvelar a realidade no âmbito das ciências humanas e sociais, é necessário, algumas vezes, optar por metodologias que deixam de lado a ênfase ao quantitativo e privilegiam o aspecto qualitativo, buscando dessa forma aprofundar a compreensão real dos fenômenos estudados. Tendência crescente no cenário educacional, a pesquisa qualitativa vem se voltando para a realidade das instituições de ensino.

Essa definição metodológica foi dada com a preocupação de se chegar além da simples descrição da problematização e da realidade estudada, onde buscamos caminhos para a ação com as lentes da teoria de Galperin visando a transformação.

O esquema que segue objetiva apresentar a forma como organizamos a pesquisa: estruturada em três momentos consecutivos para cada unidade de trabalho (Limite, Derivada e Integral).

Esquema 1: Organização da pesquisa por etapas



4.3 CONSTRUINDO O ALICERCE DA PESQUISA

O primeiro passo dado na pesquisa foi um mergulho ao estudo dos conceitos básicos trabalhados no Cálculo, o planejamento, a elaboração das estratégias de ensino a ser aplicada no decorrer da intervenção pedagógica e a construção de alguns instrumentos de coleta de dados. Esse estudo e planejamento ocorreram no período de novembro de 2012 até março de 2013. A intervenção iniciou no dia 11 de março de 2013 na Disciplina Cálculo I.

Como professora há mais de vinte e cinco anos, essa não foi a nossa primeira experiência nessa disciplina, no entanto, a forma como construímos a intervenção foi diferenciada e nova para nós. Trabalhamos com tarefas em forma de problemas, buscamos

chegar ao conceito de Limite, Derivada e Integral a partir da resolução dessas tarefas que denominamos *Tarefas de Compreensão Conceitual,* essas atividades foram previamente elaboradas com a intenção de construir um significado mais real para os conceitos estudados.

Os problemas trabalhados seguem as orientações dadas por Polya (1978) para a resolução de problemas e as etapas descritas na teoria de Galperin (1957). Em seu livro, A arte de resolver problemas, Polya (1978) propõe o seu método de solução de problemas, dividindo-os em quatro etapas, que são: compreensão do problema, construção de uma estratégia de resolução, execução da estratégia e revisão da solução. Na primeira etapa é importante fazer perguntas, identificar qual a incógnita do problema e verificar quais são os dados, na segunda etapa deve-se encontrar as conexões entre os dados e a incógnita, caso haja necessidade, considerando problemas auxiliares ou particulares, a terceira etapa consiste em executar a estratégia criada e na última etapa, deve-se examinar a solução obtida e verificar os resultados e os argumentos utilizados. Partindo dessas ideias, construimos uma estratégia fazendo uma correspondência dessas etapas com as etapas descritas na teoria de formação por etapas das ações mentais proposta por Galperin (1957) em sua teoria.

Nessa perspectiva, em cada conceito trabalhado, teve-se a preocupação de organizar o ensino pautado nas etapas das *Tarefas de Compreensão Conceitual*, como descrito no Quadro 3: A primeira etapa consiste em criar uma maneira de motivar a aula, iniciamos esse processo utilizando problemas vinculados a situações reais e partindo de conceitos que os estudantes já possuem na sua estrutura cognitiva.

Na segunda etapa, em que os estudantes devem compreender e estabelecer um plano para resolver o problema, foi aplicada a Base Orientadora da Ação – BOA do tipo III, nessa etapa o professor introduz o objeto de estudo e orienta os estudantes na execução das tarefas, além de controlar as ações desenvolvidas por eles. Na sequência das aulas, seguem-se as demais etapas até que os estudantes atinjam para cada conceito as etapas verbal e mental. Na nossa pesquisa, algumas vezes a etapa verbal ocorre através da escrita quando pedimos que os estudantes interpretem e expliquem a solução encontrada nas tarefas, outras vezes fazemos debates para discutir os resultados das tarefas, estimulando os estudantes a falarem suas estratégias de respostas. Sempre que possível as tarefas foram elaborados de forma que se pudessem visualizar os passos dos estudantes durante a execução das ações: a compreensão do problema, a construção do modelo matemático, a solução do modelo e a interpretação da resposta.

4.4 O CENÁRIO DA PESQUISA

Consideramos importante detalhar as especificações da pesquisa que desenvolvemos. Assim, apresenta-se uma breve descrição do local onde foi realizada a pesquisa, o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Roraima (IFRR), o curso de Licenciatura em Matemática, a turma em que realizou-se a intervenção e os estudantes envolvidos.

4.4.1 O Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Roraima – IFRR e o Curso de Licenciatura em Matemática

O Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Roraima – IFRR vivenciou durante toda sua existência várias mudanças, assim como outras Instituições de Ensino do nosso País. Atualmente, o IFRR possui estrutura multi-campi, composto por cinco campus: Amajari, Bonfim, Boa Vista, Zona Oeste e Novo Paraíso, além da Reitoria. Em 2015, o IFRR conta com um quadro de 481 servidores efetivos, dentre técnico-administrativos e docentes.

O curso de Licenciatura em Matemática foi autorizado pela Resolução nº 038 de 02 de maio de 2011 do Conselho Superior do IFRR, o regime de matrícula é Modular Semestral com 35 vagas anuais. A duração do curso é 08 (oito) módulos semestrais, com carga horária de 3.270 horas, sendo 2.180 horas dos componentes curriculares, 90 horas para o trabalho de conclusão de curso, 400 horas para o Estágio Curricular Supervisionado obrigatório, 400 horas de Prática Pedagógica e 200 horas de Atividades Complementares, funciona nos turnos matutino e vespertino.

Segundo o Plano do Curso, a estrutura curricular é moldada dentro de uma proposta baseada em Projetos Integradores, que fomentam a pesquisa acadêmica e prática profissional em torno de eixos temáticos, inter-relacionando um conjunto de componentes com finalidades comuns, proporcionando ao acadêmico a oportunidade de vivenciar a iniciação científica na graduação, desenvolver aptidão para a investigação acadêmica, possibilitar a inter, a trans e multidisciplinaridade - comum em situações reais no mercado de trabalho, incentivar a pesquisa, a produção científica e o desenvolvimento de soluções tecnológicas.

O Curso de Licenciatura em Matemática tem como objetivo principal, a formação de professores para a educação básica conforme consta no parecer CNE/CES 1.302/2001. É caracterizado por uma estrutura curricular inovadora, que busca romper algumas barreiras educacionais, como por exemplo a dicotomia entre a teoria e prática. O projeto pedagógico do curso engloba um conjunto de concepções norteadoras que alicerçam a estrutura curricular, não engessada, alinhada com as atuais diretrizes norteadoras do MEC.

O profissional formado pelo IFRR no Curso Superior de Licenciatura em Matemática, segundo o que consta no Plano de Curso, estará apto para atuar no mercado de trabalho em escolas públicas ou privadas, a partir do 6º ano da educação básica até o 4º ano do ensino médio, seja ele integrado ao Ensino Técnico ou não. Desta forma, o IFRR reafirma o seu compromisso na contribuição com o desenvolvimento social e econômico da região Amazônica através da formação de professores Licenciados em Matemática. O curso foi implantado no segundo semestre de 2011 com uma turma de 29 estudantes, no segundo semestre de 2012 ingressou a segunda turma, com um total de 30 matriculados. No segundo semestre de 2013 e 2014 ingressaram mais duas turmas, totalizando assim, sessenta alunos matriculados. A turma em que realizamos a intervenção pedagógica é a que ingressou em 2012.

4.4.2 A Turma e os estudantes participantes da pesquisa

A turma que ao iniciar o curso era formada por trinta estudantes, quando iniciamos a pesquisa eles estavam cursando o segundo período e nessa época já estava reduzida a quinze estudantes, sendo que destes, apenas onze estavam aptos a cursar Cálculo I, tendo em vista que esta disciplina tinha como pré-requisito a disciplina de Geometria Analítica e quatro desses alunos haviam sido reprovados nesse componente curricular. Logo no início do semestre letivo, dois estudantes por motivos pessoais trancaram suas matrículas, deixando assim a turma reduzida a nove estudantes.

Infelizmente é bastante comum essa desistência nos cursos das Ciências Exatas no Ensino Superior. São várias as causas e pesquisas apontam algumas delas, que vão desde a escolha inadequada dos cursos pelos estudantes, até as condições sócioecômicas e deficiência na formação em nível médio, sobretudo nas redes públicas de ensino.

Dos nove estudantes que fizeram parte da pesquisa no primeiro momento, na disciplina de Cálculo I, três são do sexo feminino e seis do sexo masculino, todos oriundos da escola pública e suas idades variam entre vinte a quarenta e dois anos, três deles, não eram assíduos nas aulas, o que comprometeu e influenciou nos resultados e continuidade da pesquisa que ocorreu no segundo semestre de 2013, na disciplina Cálculo II, a qual teve a participação apenas dos acadêmicos aprovados em Calculo I, um total de cinco estudantes.

No geral, os estudantes não apresentam grandes dificuldades com a disciplina, isto foi constatado desde os primeiros contatos durante a realização do teste diagnóstico que fizemos

com intuito de conhecer os conceitos pré-existentes e que pudessem servir de baliza para o planejamento das próximas etapas.

4.5 A DINÂMICA E OS INSTRUMENTOS DA PESQUISA

Como já mencionado, a investigação com foco na organização do ensino tem seu início no contexto da disciplina Cálculo Diferencial e Integral I por meio de uma intervenção pedagógica junto aos estudantes do curso de licenciatura em Matemática do IFRR, estes estudantes encontravam-se regularmente matriculados no Módulo II do curso. A disciplina é de caráter semestral e tem carga horária de 80 h.

A possibilidade inicial de realizar a pesquisa no âmbito do IFRR deveu-se ao fato da pesquisadora ser professora da instituição, lotada no Departamento de Graduação no curso de Licenciatura em Matemática e experienciar as dificuldades com a disciplina de Cálculo, como já citado no capítulo introdutório.

Logo na primeira aula foi apresentada à turma a proposta e objetivos da pesquisa, não houve nenhuma rejeição por parte dos estudantes, os mesmos se mostraram receptivos e aceitaram colaborar com a pesquisa. Formalizamos o pedido de utilização dos dados de observações, filmagens e gravações por meio do Termo de Livre Consentimento (APÊNDICE A).

O processo da pesquisa se desenrolou nas disciplinas Cálculo I e Cálculo II, ambas com uma carga horária de 4 horas semanais divididas em dois dias, sendo que em algumas semanas haviam aulas aos sábados, perfazendo um total de 6 horas semanais. Contamos com a colaboração de duas estagiárias que estiveram presentes durante todo o primeiro semestre de 2013. Neste primeiro semestre, destaca-se como instrumentos para a coleta de dados: a observação das aulas, os registros de observação de vídeo, áudios, além dos registros escritos das tarefas feitas pelos estudantes. Essas observações possibilitaram a organização de um diário de campo (APÊNDICE B), sendo este, indicativo tanto da organização do ensino, quanto do movimento de aprendizagem dos estudantes através do registro oral das falas dos mesmos.

Esse diário onde foram feitas todas as anotações sobre as observações das aulas, foi desenvolvido pelas estagiárias colaboradoras da pesquisa. Além da anotação de tudo que ocorreu nas aulas, foi complementado com comentários e questionamentos feito pelos estudantes quanto às percepções e formação de concepções sobre o desenvolvimento das aulas. Foram produzidos no decorrer das aulas vídeos, o que no início causou estranheza, no

entanto, aos poucos os estudantes foram se acostumando com a filmadora posta em um tripé registrando todos os movimentos.

Santos e Greca (2011, p. 31) discutem sobre a questão das filmagens de aulas e alegam que "na prática a interferência é mínima, principalmente quando filmamos uma boa aula, na qual os alunos são envolvidos intelectualmente pelo novo conhecimento que o professor está trazendo". Advertem que é importante tomar cuidado para não interferir, mas acreditam que o fenômeno aula é mais envolvente que uma gravação.

Depois de gravadas as aulas foram transcritas para posterior análise e auxílio na construção do diário, que foi se constituindo dia após dia permitindo um olhar mais aprofundado sobre os dados coletados. Fiorentini e Lorenzato (2006, p. 118 – 119) ao tratar sobre o diário como instrumento de coleta de dados salientam que "é nele que o pesquisador registra as observações de fenômenos, faz descrições de pessoas e cenários, descreve episódios ou retrata diálogos".

Outro instrumento que serviu de base para análise foi o "Guia de Observação" (APÊNDICE C), nesse guia foram descritos se os objetivos de ensino são enunciados e esclarecidos para os alunos; a relação dos objetivos de ensino com as ideias estabelecidas; a motivação dos alunos a partir dos objetivos de ensino; a aprendizagem dos alunos nos elementos prévios dos conteúdos em relação aos objetivos; como é feita a organização da aprendizagem; o tipo de aula; a descrição da atividade (Sistema de ações, operações e objetivo de ensino); a Base Orientadora da Ação, segundo a teoria de Galperin e as etapas de resolução das Tarefas de Compreensão Conceitual. Esse guia foi preenchido com o auxílio das observações feitas em aula e a correção das atividades propostas aos estudantes. As avaliações formais também serviram de base para o preenchimento deste guia.

A observação é um instrumento que consideramos importante, pois a partir dela podemos descrever todos os movimentos dos sujeitos da pesquisa. Para Ludke e André (1986), a observação possibilita um contato pessoal do pesquisador com o fenômeno pesquisado, viabilizando a verificação da ocorrência de determinado fenômeno, objeto de estudo. No âmbito da pesquisa, a observação teve a intenção de apreender a forma de organização do ensino, assim como o movimento de aprendizagem dos futuros professores de matemática.

4.6 AS TAREFAS[6] PROPOSTAS DURANTE O PROCESSO DE INTERVENÇÃO

No percurso da pesquisa, durante o processo de intervenção nas disciplinas Cálculo I e II, foram elaboradas tarefas que nos auxiliaram para compreensão do nosso objeto. Nem todas as tarefas trabalhadas em sala de aula foram base para a análise e portanto, nessa sessão estão apresentadas apenas as selecionadas para este fim. Aqui não temos a intenção de analisá-las, o que será feito no capítulo V. Para fins de apresentação e análise, dividimos as tarefas em três unidades, conforme o conteúdo estudado: Unidade I – Compreensão do conceito de Limite de Função, onde selecionamos nove tarefas; Unidade II – O estudo das Derivadas e as regras de diferenciação, onde foram selecionadas cinco tarefas e a Unidade III – Estudo das Integrais em que selecionamos três tarefas. As tarefas das Unidades I e II foram trabalhadas em Cálculo I e as atividades da Unidade III, trabalhadas em Cálculo II.

Em cada unidade, dividimos em três fases: a diagnóstica, mediadora e a do teste final. Na fase diagnóstica da unidade I apresentamos três tarefas[7] envolvendo o conteúdo de Funções e Modelos os quais, objetivava avaliar a compreensão dos estudantes acerca da aplicação do conceito de Função.

TAREFA 01: Uma fábrica tem três anos de funcionamento e produz por ano um determinado número de unidades de um artigo; devido ao desgaste das máquinas a produção começou a diminuir. A função representa os dados da tabela abaixo:

x (anos)	1	2	3
y (prod.)	7000	6000	5000

Responder:

a) Qual será o prognóstico da produção para os próximos dois anos? Justifique sua resposta.
b) Seguindo o mesmo comportamento de produção, em quanto tempo a produção pode parar? Justifique sua resposta.
c) Represente graficamente a função f(x).

TAREFA 02: O empregado de uma empresa ganha mensalmente x reais. Sendo que ele paga de aluguel R$ 120,00 e gasta $\frac{3}{4}$ de seu salário em sua manutenção, poupando o restante. Então:

a) Encontre um modelo matemático que defina a poupança P em função de seu salário x;
a) Para poupar R$ 240,00, qual deverá ser o seu salário mensal?
b) Justifique suas respostas.

[6] As tarefas/problemas foram selecionadas do livro: Cálculo, Vol I, 5ª ed. do autor James Stewart, alguns com adaptações.

[7] Para destacar, apresentamos as tarefas em caixa de texto.

TAREFA 03: Duas plantas da mesma espécie, A e B, que nasceram no mesmo dia, foram tratadas, desde o início com adubos diferentes. Um botânico mediu todos os dias o crescimento, em centímetros, dessas plantas. Após 10 dias de observação, ele notou que o gráfico que representa o crescimento da planta A é uma reta passando por (2, 3) e o que representa o crescimento da planta B pode ser descrito pelo modelo matemático y = $\frac{24x - x^2}{12}$. Um esboço desses gráficos está apresentado na figura.

As tarefas de 4 a 7 correspondem a fase mediadora da Unidade I, trata sobre Limite e Continuidade de função e tem por objetivo apresentar o conceito de Limite de modo intuitivo e formal.

TAREFA 4: Encontre uma equação da reta tangente à parábola $y = x^2$, no ponto P(1,1).

TAREFA 05: Suponha que uma bola é solta a partir do ponto de observação no alto da torre CN em Toronto, 450 m acima do solo. Encontre a velocidade da bola, após 5 segundos.

TAREFA 06: Dada a função $f(x) = x^2 + x - 6$, representada pelo gráfico abaixo. Responda:
a) Preencha as tabelas e analise o comportamento da função nos pontos da vizinhança de x = 2.

x a esquerda de 2	
x	f(x)

x a direita de 2	
x	f(x)

b) Represente os pontos das tabelas no gráfico.

TAREFA 07: Explique o que você compreende pela expressão $\lim_{x\to 2} f(x) = 7$. É possível, que nessa expressão, $f(2) = 2$? Justifique sua resposta.

Na última fase, a do teste final dessa unidade, selecionamos duas tarefas que visam auxiliar os estudantes na compreensão do conceito de continuidade e limites infinitos. Seguem os problemas 8 e 9:

TAREFA 08- Explique porque a função é descontínua no número dado e esboce o gráfico da função:

a) $f(x) = \ln|x-2|$ x = 2

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} \; se \; x \neq 1 \\ 2 \; se \; x = 1 \end{cases}$ x = 1

c) $f(x) = \begin{cases} e^x \; se \; x < 0 \\ x^2 \; se \; x \geq 0 \end{cases}$ x = 0

A

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x}{x^2-1} \; se \; x \neq 1 \\ 1 \; se \; x = 1 \end{cases}$ x =1

TAREFA 09 - O custo para remover x% de resíduos tóxicos num aterro é dado $S(x) = \frac{0{,}8x}{100-x}$ com $0 < x < 100$.

a) Calcule $\lim_{x\to 100^-} S(x)$

b) Interprete o resultado obtido

Unidade II, que trata sobre o estudo do conceito de Derivadas e regras de derivação, selecionamos cinco tarefas para análise. As tarefas 1 e 2 foram aplicados na fase do diagnóstico, o 3 e 4 foram trabalhados na fase mediadora e formativa e o problema 5 foi aplicado no teste final. A seguir, apresentamos tarefas 1 e 2, da fase diagnóstica, que teve como objetivo avaliar a compreensão inicial dos estudantes acerca do conceito de Derivadas.

TAREFA 1: Apresento a seguir três problemas. Indique qual ou quais deles envolvem o conceito de derivada e justifique a sua escolha.

(a) Encontre a reta que passa pelo ponto (1, 2) e é paralela À reta tangente À parábola $y = x^2 - 4x + 3$, no ponto P(3, 0).

(b) Um triângulo equilátero está inscrito num círculo de 3 cm de raio. Calcule a área desse triângulo.

(c) Dadas as funções: $f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$ e $g(x) = \frac{1}{2}(a^x - a^{-x})$.
Demonstre que $f(x + y) = f(x) \cdot f(y) + g(x) \cdot g(y)$.

(d) Uma cidade é atingida por uma moléstia epidêmica. Os setores de saúde calculam que o número **N** de pessoas atingidas pela moléstia, depois de um tempo ***t*** (medido em dias a partir do primeiro dia de epidemia), é aproximadamente $N = 64t - \frac{t^3}{3}$. Qual a taxa de expansão da epidemia quando t = 4?

TAREFA 2: Como você explicaria a alguém o que é derivada de uma função ***f*** no ponto x_o?

As tarefas trabalhados na fase mediadora e formativa tiveram por objetivo avaliar se os estudantes possuíam habilidades para fazer aplicação do conceito de derivada.

TAREFA 3: um balão esférico começa a ser inflado. Encontre a taxa de crescimento da área da superfície ($S = 4\pi r^2$) em relação ao raio *r* quando *r* é (a) 1 pé, (b) 2 pés e (c) = 3 pés. Que conclusão você pode tirar destes resultados?

TAREFA 4: Uma equação do movimento é dada por $s = 2t^3 - 9t^2$, onde *s* está em metros e *t*, em segundos. Encontre o instante em que a aceleração é zero. Explique sua resposta.

Na fase final da unidade II, selecionamos uma tarefa. Nesse bloco de questões as tarefas retratavam as aplicações da derivada em diferentes contextos, a tarefa que selecionamos para análise, apresenta uma aplicação na área da saúde.

TAREFA 5: Uma cidade é atingida por uma moléstia epidêmica. Os setores de saúde calculam que o número **N** de pessoas atingidas pela moléstia, depois de um tempo ***t*** (medido em dias a partir do primeiro dia de epidemia), é aproximadamente $N = 64t - \frac{t^3}{3}$. Qual a taxa de expansão da epidemia quando t = 4?

A Unidade III, desenvolvida na Disciplina Cálculo II, destinamos para o estudo do conceito de Integral de Função e selecionamos, das tarefas trabalhadas nessa unidade, três, sendo uma em cada fase: diagnóstica, fase mediadora e fase do teste final. Na fase diagnóstica usamos os problemas da área e da distância para formular a ideia de uma integral definida, a tarefa 1, selecionada para análise, visou calcular a área de uma região contornada por uma curva. Segue:

TAREFA 1: Use os retângulos para estimar a área da região parabólica S ilustrada na figura. A área está sob a parábola $y = x^2$ de 0 até 1.

As tarefas trabalhadas na fase mediadora e formativa tiveram o objetivo de calcular a integral definida de uma função a partir do estudo da área de retângulos utilizando a soma de Rieman. Os resultados da Tarefa-02 serviu para análise nessa fase.

TAREFA 2: Ache uma aproximação para a integral $\int_0^4 (x^2 - 3x)dx$ usando uma soma de Riemann com extremos direitos e n = 8. Explique o significado do cálculo realizado.

As tarefas aplicadas no teste final, tiveram por objetivo avaliar a compreensão dos estudantes acerca da aplicação do Teorema Fundamental do Cálculo. Esse Teorema, inquestionavelmente o mais importante do cálculo, estabelece uma conexão entre os dois ramos do cálculo: o cálculo diferencial e o cálculo integral e apresenta uma forma de computar as áreas e integrais muito mais facilmente, sem que seja necessário calculá-las como limite de somas, a exemplo do cálculo utilizando a soma de *Riemann*. A análise dessa fase foi feita a partir do desempenho dos estudantes na Tarefa-03.

TAREFA 3: Uma empresa possui uma máquina que se deprecia a uma taxa contínua $f = f(t)$, onde t é o tempo medido em meses desde seu último recondicionamento. Como a cada vez que a máquina é recondicionada incorre-se a um custo fixo A, a empresa deseja determinar o tempo ótimo T (em meses) entre os recondicionamentos. Explique por que $\int_0^t f(s)ds$ representa a perda do valor da máquina sobre o período de tempo t desde o último recondicionamento.

4.7 A ORGANIZAÇÃO DOS DADOS PARA ANÁLISE E DISCUSSÃO

Para proceder a análise qualitativa dos dados, dividiu-se em dois grandes eixos: o da organização do ensino e o da aquisição da aprendizagem dos conceitos estudados em Cálculo. Estão mais fortemente ligadas ao primeiro, as questões referentes à organização do trabalho pedagógico, a relação entre essa organização e as etapas de ações mencionadas por Galperin (1986a), ligadas ao segundo eixo estão as questões relacionadas à aprendizagem e a forma de assimilação dos conceitos. Essa divisão se faz necessária para melhor organizar a análise.

Consideramos cada uma das questões como uma categoria de análise que foram complementadas com várias outras categorias que surgiram dos próprios dados observados nesses dois grandes eixos. Vale salientar que no momento da interpretação dos dados essas categorias podem se complementar mesmo estando em eixos diferentes, bem como também imagina-se que uma mesma atividade observada pode gerar análises diferentes. A interpretação das categorias criadas e de todos os dados da pesquisa foi feita à luz da Teoria da Formação por Etapas de Ações Mentais de Galperin (1986a) e está apresentada no capítulo V. Esse capítulo explicita os resultados centrais da pesquisa, bem como, alguns pontos críticos encontrados no decorrer da pesquisa.

CAPÍTULO V – ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS: APROXIMAÇÃO DA TEORIA E PRÁTICA

Neste capítulo são apresentados os principais resultados da pesquisa. Para maior clareza, separou-se em três etapas, a primeira apresenta-se os resultados sobre a organização do ensino e aprendizagem de Limite de Função, a segunda explicita-se os resultados do estudo com Derivadas e segue-se com a análise dos problemas que envolvem Integral Definida de função de uma variável real. Finaliza-se apontando os pontos considerados críticos e que foram encontrados no decorrer da pesquisa.

5.1 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS: LIMITE DE FUNÇÃO DE UMA VARIÁVEL REAL

As análises partiram da observação e do modo como cada estudante interagiu durante as aulas, bem como também seu desempenho nas atividades de aprendizagem propostas para o estudo de Limite com atenção às etapas definidas para a solução das *Tarefas de Compreensão Conceitual*. Inicialmente propomos situações a partir da ideia intuitiva de Limite de função presente em diversos problemas para formar as ideias de conceito e definição geral. Desse modo, as características das ações realizadas pelos estudantes ao utilizarem as etapas de solução das *Tarefas de Compreensão Conceitual*, foram determinantes para observar elementos da organização do ensino com fundamentação na Teoria das Etapas das Ações Mentais.

Procuramos aplicar as etapas de formação das ações mentais iniciando o processo pela resolução e discussão de problemas envolvendo dados da vida real, a qual corresponde a etapa motivacional. A apresentação e discussão das atividades apresentadas nessa etapa foram planejadas com vistas a perceber o nível de conhecimento dos estudantes; estas atividades poderiam estar diretamente relacionadas ao conteúdo de ensino ou versar sobre outras que já sabiam e que poderiam ser suscitadas por meio da resolução dos problemas.

Apresentamos as análises descritivas dos resultados das três fases de coleta de dados subdividas nas etapas: Nível de Partida (teste diagnóstico); Desempenho na assimilação da avaliação formativa e mediadora (*Atividades de Compreensão Conceitual*) e Desempenho na assimilação dos conceitos gerais (teste final).

Na busca de avaliar os conhecimentos prévios dos estudantes, deu-se início a questionamentos visando, desta forma, conhecer o Nível de Partida dos mesmos. O desempenho dos estudantes implicaram na retroalimentação inicial no conteúdo de funções

para o estudo de limite. A etapa seguinte aborda os resultados do desempenho da fase formativa e mediadora e foram construídos com base nas características das ações no desenvolvimento das etapas qualitativas, observando o resultado da resolução dos problemas nos aspectos: detalhada, não-generalizada e compartilhada. Visando alcançar de maneira respectiva e análoga os conceitos de limite, nos aspectos: generalizada, abreviada e independente.

Na execução das ações quanto a assimilação dos conceitos de limite, foram analisadas quatro atividades. Os dados com os resultados foram descritos conforme a classificação das características do desempenho do estudante, contendo também a análise descritiva deste mesmo resultado por estudante.

Os resultados do teste final, foram analisados visualizando a formação dos conceitos gerais estudados durante o período da realização das atividades em sala de aula, classificadas na perspectiva consciente e automatizada. Esta etapa, apresenta a descrição detalhada do desempenho de cada estudante, também representada em tabelas de dados com informações sintetizadas. O relatório das análises descreve o desempenho quantitativo e qualitativo dos alunos em cada atividade selecionada para análise nas três fases observadas.

Foram analisadas as atividades, escolhidas de acordo com o objetivo observável para assimilar as ideias conceituais de limite, dispostos em três fases:

QUADRO 5: Fases/Tarefas – ideias conceituais de Limite

Fases	Atividades
Diagnóstica	Três tarefas envolvendo o conteúdo de funções (Tarefas 1, 2 e 3 – Unidade I).
Mediadora	Problema inicial envolvendo a noção intuitiva do conceito de limite, problemas envolvendo o conceito geométrico de Limite, problemas mais complexos envolvendo o conceito geral de limite de Função (Tarefas 4, 5, 6 e 7 – Unidade I).
Final	Duas tarefas envolvendo o conceito de continuidade e limites infinitos (Tarefas 8 e 9 – Unidade I).

Além destes instrumentos, também foram utilizados o diário de campo com a observação das aulas e os dados das filmagens realizada durante a execução de cada aula, que serviram como base de análise. A operação de maior relevância para execução da ação é o que

define o indicador essencial, na qual se ancora a média da escala quantitativa para o desenvolvimento de cada ação.

Portanto, a análise do desempenho dos estudantes, destaca-se conforme os parâmetros do indicador essencial e demais indicadores não essenciais, os quais determinam os valores alcançados do desempenho nas ações, correspondente às operações realizadas na resolução dos problemas.

Rezende; Valdez (2006); Núñez (2009) explicam que as bases de orientação devem ser formuladas de maneira a incluir as características essenciais do conceito, ou seja, o que eles chamam de invariante conceitual, o qual neste estudo foi revelado durante a intervenção pedagógica realizada com os alunos. "A invariante se refere à essência que justifica um conjunto de situações-problemas e os procedimentos gerais de sua solução: invariante conceitual e invariante procedimental" (NÚÑEZ, 2009, p. 103). Não foi fácil selecioná-lo e incluí-lo na base de orientação, entretanto foi um procedimento necessário na busca pela generalização dos conceitos. O invariante conceitual envolvido nessa unidade foi a compreensão da ideia central de como surgiu o Limite de uma função por meio da tentativa de encontrar a tangente a uma curva ou a uma velocidade de um objeto. Para avaliar o desempenho dos estudantes nas provas escritas utilizamos o instrumento apresentado na Tabela 1.

Tabela 1: Instrumento de análise das provas escritas

CATEGORIAS	SUBCATEGORIAS (ANÁLISE DESCRITIVA)	PARÂMETRO
Compreensão do problema	Identificação das partes principais do problema, ou seja, a incógnita, os dados, a condicionante. Caso haja uma figura relacionada ao problema, é importante desenhá-la e adotar uma notação adequada.	1 - 5
Estabelecimento de um plano	O estudante sabe quais são os cálculos, construções, etc., que devem efetuar para encontrar a solução do problema proposto.	1 - 5
Execução do Plano	Nesta etapa devemos observar se é possível executar o plano.	1 - 5
Revisão da solução	Nesta etapa, examinamos a solução obtida.	1 - 5

Fonte: Santos (2014)

Creswell (2010, p. 257), afirma que na estratégia de transformação dos dados de qualitativo para quantitativo, o pesquisador pode quantificar os dados qualitativos criando códigos e temas qualitativamente para depois contar o número de vezes que eles ocorrem nos

dados do texto ou possivelmente nas falas. Essa quantificação dos dados permite ao pesquisador comparar os resultados quantitativos com os dados qualitativos e dá maior confiabilidade a pesquisa. A Tabela 2 apresenta essa transformação utilizada na análise para avaliar o desempenho dos estudantes nessa pesquisa.

Tabela 2: Critérios utilizados para avaliar o desempenho dos estudantes

INDICADORES DE AVALIAÇÃO	CONCEITO – PONTUAÇÃO
• Se todos os indicadores estão incorretos. O estudante não compreendeu, não conseguiu construir o modelo matemático e não soube solucionar o problema.	• Insuficiente [1 – 2]
• Se o indicador essencial está parcialmente correto. Se o estudante apenas esboçou alguma análise do problema, elaborou algum cálculo, mas não conseguiu efetivar nenhuma ação.	
• Se o estudante tem somente correto o indicador essencial. O estudante compreende o problema, atende ao objetivo do problema, mas não executa as outras ações solicitadas e/ou executa as outras ações de forma inadequada e incompleta.	• Regular - equivale a 3 (três)
• Se o indicador essencial está correto, mas existe pelo menos outro indicador parcialmente correto. Se o estudante executa as principais ações de forma a atender ao objetivo do problema, mas alguma das ações foi executada de forma inadequada e incompleta.	• Bom - equivale a 4 (quatro)
• Se todos os indicadores estão corretos. Se todas as ações correspondem ao solicitado pelo problema.	• Ótimo - equivale a 5 (cinco)

Fonte: Santos (2014)

O Quadro 6 apresenta os indicadores utilizados nas análises dos dados com destaque nas ações essenciais.

QUADRO 6: Indicadores para análise dos dados

Indicadores
a) O estudante extrai os dados do problema? b) O estudante determina as condições do problema? **c) O estudante define o(s) objetivo(s) do problema?**
a) Determinar as variáveis e incógnitas. b) Nominar as variáveis, incógnitas com suas medidas. **c) Construir o modelo matemático a partir das variáveis e incógnitas e condições.** d) Realizar análises das unidades de medidas do modelo matemático e critério de aprovação.
a) Selecionar o(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático. **b) Solucionar o modelo matemático e o critério de aprovação.**
a) Interpretar o resultado. b) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema. **c) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.** d) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; Analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.

Fonte: Adaptado de Mendoza, 2009.

Para proceder a análise, classificamos as características das ações mentais por meio de uma escala likert[8] com variação de "totalmente consciente" até "pouco consciente", como demonstrado no Quadro 7.

QUADRO 7: Classificacão da dimensão das Ações Mentais

Dimensão das ações mentais	
Se todas as ações estiverem corretas	Totalmente Consciente
Se a ação essencial está correta, ou pelo menos, parcialmente correta, com pelos maus uma ação parcialmente correta	Consciente
Se as ações estiverem incorretas, mas pelo menos uma parcialmente correta	Razoavelmente Consciente
Se todas as ações estiverem incorretas	Pouco Consciente

Fonte: Adaptado de Santos, 2014.

[8] Tipo de escala que permite medir as atitudes e conhecer o grau de conformidade do entrevistado.

5.1.1 Análises Descritiva do Desempenho nas atividades do Nível de Partida

As análises desta primeira fase, aborda os aspectos fundamentais para observar os conhecimentos prévios dos estudantes em relação ao conteúdo de funções, bem como observar também o desempenho e a habilidade dos mesmos para resolver as Tarefas de Compreesão Conceitual. Essa fase é descrita na teoria de Galperin, que defende a importância do conhecimento do nível de partida na organização do ensino. Tendo em vista essas orientações, elaboramos um teste diagnóstico.

As observações quanto a estratégia utilizada nas atividades do teste diagnóstico, foram analisadas segundo a execução das ações e das características da forma, por meio das operações realizadas. As ações desenvolvidas se destacaram pelas ações qualitativas verbais descritas em relação a interpretação da solução dos problemas, os dados da avaliação foram transcritos para o formulário de análise (Apêndice E) com o detalhamento das ações realizadas pelos estudantes na solução das atividades.

Embora nessa etapa da pesquisa tenham participado sete estudantes, optamos por realizar as análises apenas das atividades dos cinco estudantes que concluíram Cálculo I e prosseguiram até o final da pesquisa, os quais chamaremos de E_1, E_2, E_3, E_4 e E_5. As tarefas 01, 02 e 03 foram selecionadas para a análise dessa fase da pesquisa.

Tarefa 01: Uma fábrica tem três anos de funcionamento e produz por ano um determinado número de unidades de um artigo; devido ao desgaste das máquinas a produção começou a diminuir. A função representa os dados da tabela abaixo:

x (anos)	1	2	3
y (prod.)	7000	6000	5000

Responder:

d) Qual será o prognóstico da produção para os próximos dois anos? Justifique sua resposta.
e) Seguindo o mesmo comportamento de produção, em quanto tempo a produção pode parar? Justifique sua resposta.
f) Represente graficamente a função f(x).

Tarefa 02: O empregado de uma empresa ganha mensalmente x reais. Sendo que ele paga de aluguel R$ 120,00 e gasta $\frac{3}{4}$ de seu salário em sua manutenção, poupando o restante. Então:

b) Encontre um modelo matemático que defina a poupança P em função de seu salário x;
c) Para poupar R$ 240,00, qual deverá ser o seu salário mensal?
d) Justifique suas respostas.

Tarefa 03: Duas plantas da mesma espécie, A e B, que nasceram no mesmo dia, foram tratadas, desde o início com adubos diferentes. Um botânico mediu todos os dias o crescimento, em centímetros, dessas plantas. Após 10 dias de observação, ele notou que o gráfico que representa o crescimento da planta A é uma reta passando por (2, 3) e o que representa o crescimento da planta B pode ser descrito pelo modelo matemático y = $\frac{24x-x^2}{12}$. Um esboço desses gráficos está apresentado na figura. a) Qual o dia em que as plantas A e B atingiram a mesma altura? e qual foi a altura? b) Explique sua resposta.

Seguem as ações dos estudantes explicitadas de forma detalhadas ao solucionarem as atividades 1, 2 e 3.

Estudante E_1: Resultado das Características das Ações no problema resolvido

Categoria	**Análises da Tarefa-01**	**D-Quanti**
Compreender o problema	Extrair os elementos não se aplica (os dados já foram fornecidos) a função $f(x) = 8000 - 1000x$ e tabela de dados. O aluno determina as condições do problema, pois utiliza a sequencia dos valores de $x$disponível na tabela de dados e a função para realizar o prognóstico dos próximos dois anos f(4) e f(5).De acordo com os procedimentos dos cálculos, o estudante define claramente o objetivo do problema, pois avalia $f(4)$ e $f(5)$, a partir dos resultados.Conclui que se trata de uma função decrescente, ou seja, a cada ano a produção da fábrica diminui 1000 unidades do seu produto, ao aplicar os valores de x de forma crescente na função, partindo de f(4) até f(8), desenvolvendo os cálculos a estudante encontrou o ano que a fábrica encerraria a produção (8º ano) e esboçou o gráfico, traçando a reta nos pontos: $(0, 8000);\ (1, 7000);\ (2, 6000);\ (3, 5000);$ $(4, 4000);\ (5, 3000);\ (6, 2000);\ (7, 1000)$	5
Construir o modelo matemático	O estudante identifica que f(x) está relacionado com o prognóstico da produção, e o valor de x com os anos. A construção do modelo matemático não se aplica (já dado no problema). Realiza implicitamente através dos cálculos a análise das unidades do modelo ao fazer relação direta com o objetivo do problema.	5
Solucionar o	Identifica que a função f(x) é o modelo matemático que está	**4**

modelo matemático	relacionado com a tabela, pois faz relação com o conceito geral de função linear crescente $f(x) = ax + b$ descrita no início da questão. O estudante determinou o prognóstico para f(4) e f(5), fazendo uso do modelo informado. Construiu o gráfico corretamente (decrescente) traçando a reta nos pontos: $(0, 8000)$; $(1, 7000)$; $(2, 6000)$; $(3, 5000)$; $(4, 4000)$; $(5, 3000)$; $(6, 2000)$; $(7, 1000)$ e $(8, 0)$, apresentado o máximo de precisão manuscrita, proporcionando a visualização de cada ponto. No entanto, traçou a reta iniciando no ponto $(0, 8000)$ até o $(8, 0)$. Observa-se que o ponto $(0, 8000)$ não pode ser identificado nesta função.	
Interpretar a solução	O estudante explica cada etapa realizada e esboça uma compreensão. Dá a resposta de forma parcialmente completa para a questão, pois ao esboçar o gráfico acrescenta um ponto a mais, porém, de maneira incorreta. Não realizou um relatório descritivo (sendo que este item não foi claramente solicitado para os estudantes), mas de acordo com os procedimentos abordados e desenvolvimento da ideia, o estudante apresenta condições que se relacionam diretamente com o objetivo do problema, apresentando possíveis habilidades de construir e solucionar novamente o modelo matemático.	5

Categoria	**Análises da Tarefa-02**	**D-Quanti**
Compreender o problema	Extrai completamente os elementos do problema, nominando cada um $x = salário$, $Aluguel = R\$\,120{,}00$, $man = 3x/4$, resto para a poupança. A partir dos elementos dados o aluno precisa elaborar o modelo para encontrar à solução da questão posterior. Desse modo, o aluno elabora o modelo.Observa-se que o mesmo define o objetivo do problema quando demonstra um exemplo aplicando ao modelo definido.	5
Construir o modelo matemático	Determina claramente as variáveis e nomina cada uma delas, quando descreve: x = salário, aluguel = R$ 120,00, man = 3x/4 e poupa o resto. A partir dos elementos extraídos do problema, o aluno encontra o modelo seguindo os passos: $\mathbf{P(x) = x - (120 + \frac{3}{4}x)}$ $\mathbf{P(x) = \frac{x}{4} - 120}$ $\mathbf{P(x) = x - \frac{3}{4}x - 120}$ Realiza análise das unidades variáveis, pois após a elaboração do modelo, demonstra um exemplo: Para $x = 1000$ $\mathbf{P(x) = \frac{1000}{4} - 120}$ $\mathbf{P(x) = 250 - 120}$ $\mathbf{P(x) = 130}$	**5**
Solucionar o modelo matemático	A partir do modelo o aluno demonstra um exemplo para comprovar que através do modelo é possível determinar o valor que será poupado pelo empregado. Soluciona a $\mathbf{240 = \frac{x}{4} - 120}$ $\mathbf{960 = x - 480}$ $\mathbf{x = 960 + 480}$ $\mathbf{x = 1440}$	5

	questão a) que é a elaboração do modelo e a questão b) quando determina o salário que o empregado deve ganhar para poupar $R\$\ 240{,}00$, ou seja, $P = 240$, fez a solução do modelo e encontrando o resultado do salário:	
Interpretar a solução	Determina e relaciona corretamente os elementos do problema com o objetivo. Desse modo determina as respostas das questões a) e b). A descrição do aluno permite observar um breve ensaio de compreensão que possibilita uma relação direta com o objetivo e a construção novamente do modelo de acordo com o enunciado "*o empregado ganha valor x, mas sabemos que gata ¾ do salário com manutenção, e então, sobra ¼, de onde ele paga o aluguel e o que sobra é poupado*".	5

Categoria	**Análises da Tarefa -03**	**D-Quanti**
Compreender o problema	Extrai os elementos, identificando os pontos dados $(2{,}3)$ e $(0{,}0)$ e aplica na fórmula $y = (24x - x\text{^}2)/12$ para encontrar o valor de y. Observa-se pelo desenvolvimento dos cálculos que o aluno determina as condições do problema, iniciando com a aplicação dos pontos dados no problema para encontrar a equação da reta que representa o ponto de interseção em que as plantas atingem a mesma altura. Sim, determina quando observa que precisa encontrar a equação da reta que possibilitará encontrar um ponto em comum.	5
Construir o modelo matemático	Determinar as variáveis, como também os pontos dados no problema para encontrar a partir do modelo dado, a equação que determinar um ponto em comum, ou seja, o crescimento quando as plantas A e B atingirem a mesma altura. Faz a aplicação dos pontos na equação geral da reta. Constrói o modelo a partir dos pontos dado, fazendo uso geral do modelo da equação da reta, onde determina que. O aluno especifica graficamente na resolução do problema, determina a análise das unidades de forma implícita, no desenvolvimento dos cálculos e no resultado discrimina a unidade.	5
Solucionar o modelo matemático	O aluno faz a aplicação dos pontos dados no problema no modelo geral da equação da reta: $3 - 0 = \mathrm{m}(2 - 0)$ $3 = 2\mathrm{m}$ $\mathrm{m} = 3/2$ $0 = 3/2.0 + \mathrm{b}$ $\mathrm{b} = 0$ $\mathrm{y} = 3/2\ \mathrm{x}$ Encontrando assim, uma forma para solucionar o problema.A partir dos pontos (2,3) e (0,0), encontra a equação: $\mathrm{y} = 3/2\ \mathrm{x}$ $3/2\ \mathrm{x} = (24\mathrm{x} - \mathrm{x}\text{^}2)/12$ $36\mathrm{x} = 48\mathrm{x} - 2\mathrm{x}\text{^}2$ $2\mathrm{x}\text{^}2 + 36\mathrm{x} - 48\mathrm{x} = 0$	5

	$2x^2 - 12x = 0$ $2x^2 - 6x = 0$ $a = 1, b = -6$ e $c = 0$ Por meio da fórmula de Bhaskara, encontra os valores das raízes: x'=6 e x" = 0. Que substituindo na equação: y=3/2 x, para encontrar o valor de y e consequentemente o valor da altura das plantas.	
Interpretar a solução	Extrai os elementos e faz a relação com o objetivo do problema. Observa-se mediante da descrição do aluno sua capacidade de realizar a operação de análise e a relação direta com o objetivo do problema "de acordo com o enunciado as plantas nasceram no mesmo dia e foram tratadas com adubos diferentes, apresentaram gráficos diferentes para a relação de crescimento. No entanto, a **reta** que representa estas funções se tocam em um dado instante, apesar de ser uma do 1º grau e a outra do 2º, este ponto representa o dia em que as plantas estão com a mesma altura. Para sabermos as coordenadas desse ponto basta **igualar as funções**, encontrando o dia, e depois substituir esse valor em uma das funções para sabermos a altura".	5

O desempenho do estudante E_1, demonstrado na (Tabela 3), logo no primeiro problema evidenciou habilidades para aplicação do conceito de uma variável em uma função, as ações não essenciais foram solucionadas completamente corretas, porém, somente a elaboração do modelo geométrico não estava completo, o que não permitiu que a ação essencial estivesse totalmente correta, e consequentemente a solução do problema.

Tabela 3: Fase Diagnóstica: Síntese do Desempenho do Estudante E1.

A	1ª E	2ª E	3ª E	4ª E	Contexto Essencial do Problema
nº 1	5	5	4	5	Solucionar um modelo de função afim para determinar um prognóstico.
nº 2	5	5	5	5	Construir o modelo da função que determina o valor do salário de um empregado em função de um determinado valor (R$) poupado.
nº 3	5	5	5	5	Compreender os conceitos e construir um modelo de função afim em um dado ponto a partir do coeficiente angular; determinar a taxa de variação de uma função afim e uma função real em um determinado ponto.

Legenda: (T) Tarefa; (1ªE) compreensão do problema; (2ªE) estabelecimento de um plano; (3ªE) execução do plano; (4ªE) revisão da solução.

Fonte: Santos, 2014.

Nas Tarefas (T-02 e T-03) realizou todas as ações completas, fazendo uso das aplicações matemáticas conforme os modelos de funções, alcançando o valor máximo dos indicadores. Portanto, obtém-se que os conceitos particulares para execução das ações realizadas pelo estudante E_1, destaca-se como suficiente para assimilar as aplicações nos problemas, pois demonstrou nas ações realizadas que compreendeu o conceito envolvido no contexto, soube aplicar corretamente o modelo das funções solicitadas e interpretou a solução corretamente. Logo, pelo resultado apresentado, espera-se que este estudante esteja apto para assimilar o novo conhecimento de limites de uma função de uma variável. Seguem os resultados do estudante E_2.

Estudante E_2: Resultado das Características das Ações no problema resolvido

Categoria	**Análises da Tarefas-01**	**D-Quanti**
Compreender o problema	Não se aplica (os dados já foram fornecidos) a função $f(x) = 8000 - 1000x$ e tabela de dados. Determina as variáveis e o objetivo do problema, pois utiliza a sequência dos valores de x da tabela de dados e a função para determinar o prognóstico dos próximos dois anos $f(4)$ e $f(5)$, substituindo diretamente o valor de x. Conclui com o resultado do prognóstico, que *"a produção vai caindo a cada ano 1000 unid*". Observa-se que o estudante não explica claramente este comportamento. Para determinar o prognóstico de encerramento da produção da fábrica, o estudante optou por igualar o termo $f(8) = 0$, desse modo isolando a variável x determinou que, seria no 8º ano, menciona a resposta $x = 8$ anos, afirmando em sua descrição "*em 8 anos a produção vai parar*". O estudante esboçou o gráfico desta função, identificando os pontos em parte de forma implícita, traçando a reta nas coordenadas dos pontos: $(1, 7000)$ e $(8, 0)$.	5
Construir o modelo matemático	Não se aplica. Identifica que $f(x)$ está relacionado com o prognóstico da produção e x com os anos. Pois, em suas respostas utiliza os termos "*em 4 anos*" e "*em 5 anos*", o resultados dos prognósticos dos dois anos seguintes. Não se aplica (já dado no problema). Realiza as ações de forma mais implícita e objetiva, as descrições e justificativa são sucintas, mas os resultados estão corretos.	5
Solucionar o modelo	Identifica que a função $f(x)$ é o modelo matemático que está relacionado com a tabela, pois se utiliza dos termos "*anos*" e	**4**

matemático	"*produção*" quando se refere às variáveis x e y na ilustração do gráfico: $y(prod)$ e $x(anos)$. Explicou que os prognósticos para $f(4)$ e $f(5)$ "*continuam caindo*" a cada ano que passa. Construiu o gráfico de maneira correta trançando a reta nas coordenadas: $(1, 7000)$ e $(8, 0)$ e ressalta a função $f(x) = 8000 - 1000x$, próximo à reta. Porém, não descreveu o comportamento do gráfico da função.	
Interpretar a solução	Explica de modo sucinto cada ação realizada e esboça uma compreensão e habilidade para relacionar os dados como o objetivo do problema. Apresenta resultados corretos, porém parte dos procedimentos realiza de forma implícita (mental). Não realizou (sendo que este item não foi claramente solicitado para os estudantes), mas de acordo com os procedimentos e desenvolvimento da ideia, o estudante apresenta **condições e habilidades para construir o modelo matemático** e **solucionar**, mas ainda não demonstrou habilidades de interpretação de forma descritiva.	5

Categoria	**Análises da Tarefas-02**	**D-Quanti**
Compreender o problema	O aluno ler o problema e extrai os dados organizando da seguinte forma: $P = poupança = P(x)$. Determinando diretamente que $120 + 3x/4 + P = x$. Por meio da organização dos dados, observar-se que, determina as condições do problema ao organizar o modelo da questão. Do mesmo modo que determina as condições implicitamente, o estudante determina o objetivo do problema quando organiza os dados em um modelo matemático para encontrar o resultado.	5
Construir o modelo matemático	Determina as variáveis e incógnitas, porém nomina apenas a variável dependente relacionada à poupança $P(x)$. Constrói de maneira objetiva o modelo matemático a partir dos dados do problema iniciando com $P = x - 3x/4 - 120$ e finalizando $P(x) = x/4 - 120$. O aluno não faz análise descritiva das unidades do modelo matemático.	**5**
Solucionar o modelo matemático	O estudante observa que, o modelo matemático é uma função de 1º grau, que faz uso para determinar o salário do empregado da fábrica. Soluciona o modelo matemático com base no dado $poupança = 240$, para encontrar o salário do empregado por meio da função determinada no início do problema.	5
Interpretar a solução	O estudante encontra o modelo matemático para solucionar o problema e encontrar o resultado a partir do modelo e do dado poupança = 240. Modelo $P(x) = x/4 - 120$. Resposta ao problema: então o salário mensal deve ser de *R*$ 1.440,00. Responde aos objetivos do problema ao final da questão o aluno explica *"o total do salário é a soma de tudo que ele gata e poupa, então a soma de ambos é o total do salário, logo, podemos encontrar poupança (P) em função do salário (x) isolando P. para poupar R$ 240, 00 precisa aplicar na*	5

	função encontrada 'modelo' poupança em função do salário". Nesta mesma linha de raciocínio o aluno demonstra possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo e solucionar.	

Categoria	**Análises da Tarefas-03**	**D-Quanti**
Compreender o problema	O aluno ler o problema e extrai os dados do problema fazendo a seguinte abordagem:$P1\ (2,3)$ e $P2\ (4,6)$ Planta A e $y = \ (24x - \ x\text{^}2)/12$ Planta B. Observa-se que o aluno determina as condições do problema quando classifica os dados da Planta A e B, fazendo a relação com a equação geral da reta $m = \ \Delta y/\Delta x = \ 3/2$. Observa-se pela estrutura da organização dos dados o aluno define o objetivo do problema.	5
Construir o modelo matemático	Determina os parâmetros matemáticos necessários para identificar as variáveis. Faz uma identificação objetiva das equações das Plantas A e B. A partir dos pontos $P1\ (2,3)$ e $P2\ (4,6)$ aplicando a $m = \ \Delta y/\Delta x = \ 3/2$ $=> y - y_0 = m(x - \ x_0)$, substituindo os dados $y - 3 = 3/2(x - \ 2)$, desse modo determina a equação da Planta $A = \ y = 3/2\ x$.No decorrer do desenvolvimento do problema faz sempre comentários na identificação dos dados Planta A e Planta B.	5
Solucionar o modelo matemático	Determina os parâmetros matemáticos necessários para identificar as variáveis. Faz uma identificação objetiva das equações das Plantas A e B. A partir dos pontos $P1\ (2,3)$ e $P2\ (4,6)$ aplicando a $m = \ \Delta y/\Delta x = \ 3/2$ $=> y - y_0 = m(x - \ x_0)$, substituindo os dados $y - 3 = 3/2(x - \ 2)$, desse modo determina a equação da Planta $A = \ y = 3/2\ x$.No decorrer do desenvolvimento do problema faz sempre comentários na identificação dos dados Planta A e Planta B. **Solucionar o Modelo Matemático**: Determina o modelo matemático a partir do modelo da equação geral da reta, encontrando uma equação para a Planta A, e posteriormente **<u>iguala</u>** com a equação dada da Planta B.A partir das duas equações o aluno faz o seguinte procedimento de resolução: $3/2\ x = \ (24x - \ x\text{^}2)/12$ $48x - \ 2x\text{^}2 = 36x$ $-2x\text{^}2 + \ 48x - 36x \ = \ 0$ $2x\text{^}2 - 12x = 0$ $2x(x - 6) = 0$ $2x = 0 => x\text{^}' = 0$ $x - 6 = 0 => x" \ = \ 6$	5
Interpretar a solução	Extrai claramente os dados do problema que são significativos para a solução. O aluno determina o momento em que as plantas atingiram a mesma altura, fazendo a ressalva, $A = B =$ 9 metros (basta substituir x = 9 nas duas equações). Então em 06 dias A e B vão ter a mesma altura depois de nascidas. O aluno descreve: "*analisando o gráfico vimos que a Planta (A)*	4

	cresce a cada 2 dias 3 metros de altura, ou seja, a altura está em função do tempo. Primeiramente, analisei que em 4 dias ela vai estar com 6 metros de altura, a partir deste ponto pode encontrar a função que é a altura em função do tempo. Como o crescimento da Planta B é y=(24x- x^2)/12 de acordo com o enunciado, então para termos a altura de A igual a de B, basta igualarmos as duas funções".	

O estudante E_2, demonstrou um nível de habilidade significativamente consciente, para a solução e compreensão na aplicação dos conceitos de funções nas três tarefas. Portanto, observamos nos cálculos a habilidade de aplicações consciente do conceito. Núñez; Ramalho; Albino (2013, p. 395), salientam que: "O caráter consciente diz respeito à possibilidade de executar a ação (realizar a atividade), corretamente, como também, fundamentar, de forma oral ou escrita sua realização correta (o que faz e o porquê faz) o que constitui uma reflexão". A síntese das análises de desempenho constam na Tabela 4:

Tabela 4: Fase Diagnóstica: Síntese do Desempenho do Estudante E2

A	1ª E	2ª E	3ª E	4ª E	Contexto Essencial do Problema
nº 1	5	5	4	5	Solucionar um modelo de função afim para determinar um prognóstico.
nº 2	5	5	5	5	Construir o modelo da função que determina o valor do salário de um empregado em função de um determinado valor (R$) poupado.
nº 3	5	5	5	4	Compreender os conceitos e construir um modelo de função afim em um dado ponto a partir do coeficiente angular; determinar a taxa de variação de uma função afim e uma função real em um determinado ponto.

Legenda: (T) Tarefa; (1ªE) compreensão do problema; (2ªE) estabelecimento de um plano; (3ªE) execução do plano; (4ªE) revisão da solução.

Fonte: Santos, 2014.

Na Tarefa T-01, o estudante não solucionou completamente apenas a ação essencial, por inserir um ponto a mais no modelo gráfico. Na Tarefa T-02, executou todas as etapas corretas e na T-03 as três primeiras estão corretas incluindo a essencial, apenas a última está incompleta. Resumindo, das três ações essenciais das tarefas do teste, apenas uma estava parcialmente correta, isso implica que o estudante obteve conceitos assimilativos consciente sobre o assunto de funções e aptidão para aplicar em outras situações, mesmo descrevendo de

forma sucinta, seu relatório indica compreensão, observada no desenvolvimento dos cálculos. Segundo Talízina (1988), o grau de assimilação inclui como características a facilidade de realizar a ação, o grau de automaçãoo e a rapidez. Os resultados do estudante E_3 estão descritas a seguir:

Estudante E_3: Resultado das Características das Ações no problema resolvido

Categoria	**Análises da Tarefas-01**	**D-Quanti**
Compreender o problema	Extrair os dados não se aplica (os dados já foram fornecidos) a função $f(x) = 8000 - 1000x$ e tabela de dados. Determina as condições e o objetivo, mas, de maneira implícita sem demonstrar os cálculos, apenas apresentando os resultados dos prognósticos *"nos próximos dois anos a produção será de 4000 no primeiro e 5000 no segundo"*. Informa que a produção será encerrada em "*oito anos, pois f(x) = 0*", neste momento não se dispõe de subsídios suficientes para identificar se o estudante determina claramente as condições do problema. No entanto, elabora o gráfico da função identificando os pontos corretamente. Para determinar o prognóstico de encerramento da produção da fábrica, o estudante fez demonstração em termos matemáticos, mas descreveu "*em oito anos a produção para, pois f(x) = 0*". O estudante esboçou o gráfico desta função, identificando os pontos em parte de forma implícita, traçando a reta nas coordenadas dos pontos: $(1, 7000), (2, 6000), (3, 5000), (4, 4000), (5, 3000)\ e\ (6, 2000)$.	5
Construir o modelo matemático	Identifica implicitamente que $f(x)$ está relacionado com o prognóstico da produção e x com os anos. Pois, em suas respostas utiliza os termos "anos" e "produção", dos resultados dos prognósticos dos dois anos seguintes. Realiza as ações de forma mais implícita e subjetiva, as descrições são sucintas, os cálculos são insuficientes para mais análises, mas os resultados estão parcialmente corretos, faltando elaborar melhor o modelo do gráfico.	4
Solucionar o modelo matemático	Identifica que a função $f(x)$ é o modelo matemático que está relacionado com a tabela, pois se utiliza dos termos "anos" e "produção". Sim, mas de maneira implícita, identificou os prognósticos para $f(4)$ e $f(5)$, mas não explicou. Construiu o gráfico de maneira parcialmente correta, trançando a reta nas coordenadas: $(1, 7000)$ e $(6, 2000)$. Porém, não descreveu o comportamento do gráfico da função e não identificou os eixos.	**4**
Interpretar a solução	Descreveu, mas de maneira implícita de modo sucinto cada ação realizada, identifica-se uma possível compreensão para relacionar os dados como o objetivo do problema, pois apresentou resultados parcialmente corretos, porém parte dos procedimentos realiza de forma implícita (mental). Não realizou o relatório (sendo que este item não foi claramente solicitado para os estudantes), mas apresenta aspectos de solução do modelo.	4

Categoria	Análises da Tarefas-02	D-Quanti
Compreender o problema	Compreender o problema: *O aluno faz a extração dos dados do seguinte modo: salário = x reais, aluguel = 120,00, manutenção = 3x/4 e poupança = 1x/4. Determina parcialmente por tentativa de ensaio e erro, onde busca um resultado em um modelo incompleto conforme descreve P = 1x/4.* *O aluno não define com clareza o objetivo do problema no desenvolvimento da questão, pois os dados descritos são insuficientes para realizar tal análise, e conforme o resultado encontrado, observou-se que o aluno não considerou todos os elementos dados no problema mesmo após tê-los identificado, esquecendo-se de subtrair o valor do aluguel (-120), chegando a um resultado incorreto.*	2
Construir o modelo matemático	Construir o Modelo Matemático*: O aluno identifica e descreve as variáveis do problema fazendo a descrição individual. Identifica as variáveis do seguinte modo: salário = x reais, aluguel = 120,00, manutenção = 3x/4 e poupança = 1x/4. O aluno constrói o modelo matemático por tentativa de ensaio e erro, não conseguindo fazer relação entre os elementos P(x) = (1/4)x. Não faz nenhuma análise descritiva dos dados.*	**2**
Solucionar o modelo matemático	**Solucionar o Modelo Matemático**: O modelo encontrado pelo aluno não foi suficiente para encontrar a solução do problema. Não recomendado na ocasião. Soluciona o modelo, no entanto, não foi suficiente para encontrar o resultado do problema.	2
Interpretar a solução	**Interpretar a Solução**: Extrai os elementos significativos, porém não faz relação completa com o objetivo do problema. Não responde ao objetivo do problema, devido ao modelo ter sido construído com falta de elementos, e consequentemente o resultado encontrado foi inferior. Não realizou nenhum relatório descritivo e também não foi observado no desenvolvimento dos cálculos elementos matemáticos de compreensão para determinar o objetivo do problema.	2

O estudante E_3 ao desenvolver a tarefa T-01 fez a resolução correta e solucionou o problema, porém a ação essencial apresentou-se parcialmente correta, pois faltaram elementos no modelo geométrico, notou-se que no desenvolvimento do cálculo deste problema, o estudante fez uma identificação detalhada dos dados e do modelo, no entanto, não esboçou explicação descritiva. Na Tarefa-02 de acordo com a ação essencial, o estudante, construiu o modelo, por tentativa de ensaio e erro, porém incompleto, impedindo que concluísse todas as ações corretas. A Tarefa-03 o estudante não resolveu.

A Tabela 5 apresenta a síntese da análise das atividades realizadas pelo estudante E_3, destacamos na análise feita que conforme o grau de complexidade das atividades, o estudante apresentou baixa no rendimento.

Tabela 5: Fase Diagnóstica: Síntese do Desempenho do Estudante E3

A	1ª E	2ª E	3ª E	4ª E	Contexto Essencial do Problema
nº 1	5	4	4	4	Solucionar um modelo de função afim para determinar um prognóstico.
nº 2	2	2	2	2	Construir o modelo da função que determina o valor do salário de um empregado em função de um determinado valor (R$) poupado.
nº 3	1	1	1	1	Compreender os conceitos e construir um modelo de função afim em um dado ponto a partir do coeficiente angular; determinar a taxa de variação de uma função afim e uma função real em um determinado ponto.

Legenda: (P) problema; (1ªE) compreensão do problema; (2ªE) estabelecimento de um plano; (3ªE) execução do plano; (4ªE) revisão da solução.

Fonte: Santos, 2014.

Portanto, concluímos que este estudante demonstrou que consegue resolver problemas quando o modelo já está elaborado, pois ao resolver a Tarefa-02, não observou que este problema abordava o mesmo modelo de função da atividade T-01 e consequentemente, deduz-se que não resolveu a atividade T-03 por não compreender suficientemente o contexto do conteúdo de funções para aplicar em outras situações, logo, seu desempenho foi definido como razoavelmente consciente, ou seja, ainda insuficientes para assimilar o novo conhecimento. Essa análise nos direciona a concluir que o estudante E_3, quanto às características da ação, não atingiu o grau de generalização, que conforme Núñez; Ramalho; Albino (2013, p. 395), "é um indicador de quanto amplamente pode o sujeito utilizar uma ação nos limites de sua aplicação".

> Isso significa a possibilidade de o aluno aplicar com êxito a metodologia geral (invariante da habilidade ou sistema de operações que orienta a atividade e os conceitos) à solução de todos os casos possíveis dentro dos limites de aplicação, como também, as tarefas que representam situações novas e exeigem uma transferência da aprendizagem (NÚÑEZ; RAMALHO; ALBINO, 2013, p. 395).

Dada tais considerações, fica evidenciada a ausência do grau de generalização nas ações desenvolvidas pelo estudante E_3 nessa fase da pesquisa, seu desempenho desde a

compreensão dos problemas propostos, até a interpretação da solução de cada problema, norteou nossa análise.

O resultado das características das ações na resolução dos problemas na fase diagnóstica dada pelo estudantes E_4 é apresentado a seguir.

Estudante E_4: Resultado das Características das Ações no problema resolvido

Categoria	**Análises da Atividade-01**	**D-Quanti**
1ª Ação: Compreender o problema	Extrair os dados não se aplica (os dados já foram fornecidos) a função $f(x) = 8000 - 1000x$ e tabela de dados. Determina, mas, de maneira implícita sem demonstrar os cálculos, apenas apresentando os resultados descritos dos prognósticos "*nos próximos dois anos a produção sofre uma diminuição de* 2000 *unidades, pois, a cada ano que passa a produção diminui 1000 unidades*", dessa maneira observa-se que o estudante determina as condições do problema. Identificou o momento em que a produção deverá parar e elaborou o gráfico. O estudante define o objetivo do problema, mas de forma implícita. Para determinar o prognóstico de encerramento da produção da fábrica, o estudante não fez a demonstração em termos matemáticos, mas descreveu "*a produção vai parar quando, não houver nenhuma unidade, ou seja, quando y = 0, logo a função se torna nula, quando x = 8, portanto passados 8 anos*". Posteriormente, esboçou o gráfico desta função, identificando os pontos em parte de forma implícita, traçando a reta nas coordenadas dos pontos: $(1, 7000), (2, 6000)\ e\ (3, 5000)$.	5
2ª Ação: Construir o modelo matemático	O modelo já foi dado não se aplica. Mas, identifica implicitamente que $f(x)$ está relacionado com o prognóstico da produção e x com os anos. Pois, em suas descrições utiliza os termos "*anos*" e "*a produção*", dos resultados dos prognósticos dos dois anos seguintes. Realiza as ações de forma implícita e subjetiva, as descrições são sucintas, os cálculos são insuficientes para mais análises, mas os resultados estão parcialmente corretos, devido o esboço incompleto do gráfico.	5
3ª Ação: **Solucionar o modelo matemático**	Observa-se pelos resultados que o estudante identifica de forma implícita que a função $f(x)$ é o modelo matemático que está relacionado com a tabela, pois se utiliza dos termos "*anos*" e "*produção*" na descrição das respostas. Identificou os prognósticos explicando que para os próximos dois anos a fabricação sofreria uma diminuição de 2000 unidades. Construiu o gráfico de maneira parcialmente correta trançando a reta nas coordenadas: $(1, 7000)$ e $(3, 5000)$. Porém, não descreveu o comportamento do gráfico da função e não identificou os	**4**

	eixos.	
4ª Ação: Interpretar a solução	Interpreta de maneira implícita de modo sucinto, pela elaboração das respostas identifica-se uma possível compreensão do estudante, para relacionar os dados com o objetivo do problema. Apresenta resultados parcialmente completos, porém parte dos procedimentos realiza de forma implícita (mental), o esboço do gráfico ficou incompleto. Não realizou relatório ou descrição (sendo que este item não foi claramente solicitado para os estudantes), mas apresenta aspectos de solução do modelo.	4

O Estudante E_4 resolveu apenas a Tarefa-01, apresentando a resposta da ação essencial parcialmente correta. Sendo assim, deduz-se que os conhecimentos deste estudante, foram identificados como pouco consciente para aplicação do conceito de funções, por não demonstrar habilidades na aplicação dos conceitos de função afim e equação da reta, o que se considera fundamental para assimilação da nova ideia a ser proposta.

De acordo com a demonstração descrita na Tabela 6, conforme aumentaram a exigência da aplicação do conteúdo de funções, os problemas não foram resolvidos pelo estudante, logo, observamos que os seus conhecimentos, foram identificados nesta primeira fase como pouco consciente, ou seja, insuficientes para iniciar o estudo de limite.

Tabela 6: Fase Diagnóstica: Síntese do Desempenho do Estudante E4.

A	1ª E	2ª E	3ª E	4ª E	Contexto Essencial do Problema
nº 1	5	5	4	4	Solucionar um modelo de função afim para determinar um prognóstico.
nº 2	1	1	1	1	Construir o modelo da função que determina o valor do salário de um empregado em função de um determinado valor (R$) poupado.
nº 3	1	1	1	1	Compreender os conceitos e construir um modelo de função afim em um dado ponto a partir do coeficiente angular; determinar a taxa de variação de uma função afim e uma função real em um determinado ponto.

Legenda: (T) Tarefa; (1ªE) compreensão do problema; (2ªE) estabelecimento de um plano; (3ªE) execução do plano; (4ªE) revisão da solução.

Fonte: Santos, 2014

Assim, podemos concluir que o estudante E_4 apresentou um baixo grau de assimilação dos conceitos estudados nessa fase da pesquisa, segundo Talízina (1988), o grau de

assimilação inclui as características da ação, ou seja, a facilidade de realizar a ação, o grau de automatização e a rapidez. Tais características não foram apresentadas pelo estudante.

As ações detalhadas do desempenho do estudante E_5 nas atividades da fase diagnóstica está descrita a seguir.

Estudante E_5: Resultado das Características das Ações no problema resolvido

Categoria	Analises da Atividade 01	D-Quanti
Compreender o problema	Não se aplica (os dados já foram fornecidos) a função $f(x) = 8000 - 1000x$ e tabela de dados. Determina as condições, demonstrando os cálculos, para identificar os prognósticos dos próximos dois anos, obtendo como resultado $f(4) = 4000$ e $f(5) = 5000$. Identifica o ano que a produção será encerrada no 8º ano e esboça o gráfico nos pontos. O estudante define o objetivo do problema, realizando os prognósticos de $f(4)$ até $f(8)$ para identificar os valores dos próximos dois anos e o encerramento no próximo 8º ano. Esboçou o gráfico desta função, identificando os pontos em parte de forma implícita, traçando a reta nas coordenadas dos pontos: $(1, 7000), (2, 6000), (3, 5000), (4, 4000), (5, 3000), (6, 2000), (7, 1$ e $(8, 0)$, nomeando os eixos $y(prod)$ e $x(anos)$.	5
Construir o modelo matemático	Não se aplica. Identifica claramente que $f(x)$ está relacionado com o prognóstico da produção e x com os anos. Pois, em suas descrições utiliza os termos "anos" e "produção" e "conforme a função $f(x) = a + bx$. Realiza as ações de forma objetiva, as descrições são sucintas, os cálculos são suficientes para realizar análises, os resultados estão corretos, realizou o esboço completo do gráfico.	5
Solucionar o modelo matemático	Observa-se pelos resultados que o estudante identifica de forma clara que a função $f(x) = ax + b$ é o modelo matemático que está relacionado com a tabela, pois se utiliza dos termos "anos" e "produção" na descrição das respostas. Determina as condições de maneira implícita, identificou os prognósticos para os próximos cinco anos de produção, sendo identificado que no 8º ano a produção seria encerrada. Construiu o gráfico de maneira correta trançando a reta nas coordenadas: $(1, 7000), (2, 6000), (3, 5000), (4, 4000), (5, 3000), (6, 2000), (7, 1$ e $(8, 0)$. Porém, não descreveu o comportamento do gráfico da função e identificou os eixos y(prod) e x(anos).	**5**
Interpretar a solução	Determina de maneira implícita de modo sucinto, pela elaboração das respostas identifica-se uma possível compreensão do estudante, para relacionar os dados com o objetivo do problema. Sim, apresentando resultados completos, porém não justifica claramente as ações e os resultados encontrados, elaborou o esboço do gráfico completo. Não realizou (sendo que este item não foi claramente solicitado para os estudantes), mas apresenta aspectos de compreensão e solução do modelo.	4

Categoria	Análises da Atividade-02	D-Quanti
Compreender o problema	O aluno não extrai os elementos do problema, mas faz as identificações de forma implícita. Os elementos para essa análise são insuficientes, mas observa-se que ele determina o modelo corretamente, no entanto, não faz a relação com o elemento poupança. Não determina completamente o objetivo do problema, os dados são insuficientes para identificar o nível de compreensão do aluno.	2
Construir o modelo matemático	Determina de forma implícita as variáveis do problema. Não faz a descrição das variáveis de forma relativa com os elementos. Constrói o modelo matemático $P(x) = 3x/4 - 120$, no entanto não aplica a questão b) para encontrar o salário do empregado quando ele poupa $R\$\ 240{,}00$. Não realiza análise descritiva das unidades de medida do modelo matemático determinado.	**4**
Solucionar o modelo matemático	Os métodos utilizados foram insuficientes para resolver o problema. Não soluciona a questão b), fazendo uso do modelo matemático construído.	1
Interpretar a solução	O estudante faz somente uma breve descrição afirmando "*Como ele gasta 4/3 de seu salário, pagando R$ 120,00 de aluguel, logo seu salário é de R$ 480,00*". No entanto, não respondeu corretamente o objetivo do problema.	2

O estudante E_5 no desempenho da Tarefa-01, demonstrou conhecimento ao aplicar o conceito relacionado com o modelo da função dada, realizou os procedimentos indicando os termos matemáticos envolvidos e concluiu o pensamento com uma breve descrição. Nota-se no desenvolvimento dos cálculos, que essas ações foram realizadas de maneira consciente, expressando um certo grau de independência, embora, conforme as análises dispostas na Tabela 7, observa-se que o desempenho desse estudante de uma atividade para outra foi gradativamente inferior, tendo em vista a relação de complexidade envolvida nos problemas:

Tabela 7: Fase Diagnóstica: Síntese do Desempenho do Estudante E5

A	1ª E	2ª E	3ª E	4ª E	Contexto Essencial do Problema
nº 1	5	5	5	4	Resolver um modelo de função afim para determinar um prognóstico.
nº 2	2	4	1	2	Construir o modelo da função que determina o valor do salário de um empregado em função de um determinado valor (R$) poupado.
nº 3	1	1	1	1	Compreender os conceitos e construir um modelo de função afim em um dado ponto a partir do coeficiente angular; determinar

		a taxa de variação de uma função afim e uma função real em um determinado ponto.

Legenda: (T) Tarefa; (1ªE) compreensão do problema; (2ªE) estabelecimento de um plano; (3ªE) execução do plano; (4ªE) revisão da solução.

Fonte: Santos, 2014.

A partir dos dados da Tarefa-02, observou-se que o estudante demonstrou dificuldade para elaborar o modelo ao realizar as ações de forma incompleta, mesmo tendo identificado as variáveis corretamente, não fez a relação adequada com o modelo de função real e consequentemente não encontrou a solução correta, ou seja, não elaborou o modelo matemático para determinar o salário do empregado em função da quantia poupada.

De maneira geral, analisando o desempenho dos estudantes nos três problemas, observamos que apenas dois deles possuem conceitos de funções para aplicar em situações diversificadas, enquanto que os demais ainda apresentavam dificuldades para resolver problemas sem modelos elaborados na questão. Isso implica dizer que 80% dos estudantes, em relação aos conceitos trabalhados nessa fase, não atingiram a etapa mental, tal como estabelece Galperin (1986a), tendo em vista que, a essência da sua teoria consiste em, primeiro, encontrar a forma adequada da ação; segundo, encontrar a forma material de sua representação; e, terceiro, transformar essa ação externa em interna. "Quando uma ação completamente nova se estrutura, sua forma é primeiro material, em seguida, verbal e, por último, mental, possibilitando que as funções mentais superiores se desenvolvam" (LONGAREZI E PUENTES, 2013, p. 295).

Mesmo considerando que a maioria dos estudantes realizou a aplicação do conceito para um modelo elaborado de função, ainda assim, não foi considerado como suficiente para relacionar com a interpretação (compreensão) do objetivo dos problemas com vistas na elaboração dos modelos e a solução de forma totalmente consciente. Neste caso, o desempenho geral dos estudantes se destaca como satisfatório no primeiro e no segundo problema, no entanto, razoavelmente consciente para aplicação do conceito de funções afim e equação da reta.

No decorrer das aulas foram observados momentos de reflexão, questionamentos para motivar a participação verbal dos estudantes, com o intuito de observar o desempenho destes no acompanhamento da resolução dos problemas selecionados para explanação. Com base nos questionamentos feitos em aula, apenas três estudantes interagiram respondendo corretamente ou parcialmente corretas as questões, enquanto que os demais estavam atentos

às explicações, mas observando os procedimentos de resolução, talvez tentando relacionar com conceitos já formados, as ações para compreensão.

Todos os problemas do teste diagnóstico foram solucionados em sala de aula utilizando uma estratégia de ensino que envolvia estímulo aos estudantes para a participação dos mesmos na construção dos modelos das equações, com vistas a encontrar os resultados conforme o objetivo de cada problema e prepará-los para o estudo de Limite.

Diante das observações e identificação das dificuldades demonstradas pelos estudantes nessa fase da pesquisa, as aulas posteriores contemplavam a retroalimentação do teste diagnóstico, evidenciado por um recorte da observação direta na turma, que se iniciou com a proposta da resolução do teste, destacando os pontos onde os estudantes obtiveram a oportunidade de expor suas dúvidas e também responder aos questionamentos deste momento analisado, os quais foram transcritos das filmagens feitas nas aulas para o Quadro 8 em forma de diálogo, visando representar a própria atitude verbal dos estudantes em relação ao seu desempenho:

QUADRO 8: Aula Prática (Retroalimentação e Correção)

Aula (02) Objetivo: corrigir o pré-teste recordando o assunto de funções Abordagem teórica: (estímulo a linguagem verbal). Procedimentos: demonstração da resolução do problema com base nas etapas de Polya Questionamentos sobre o problema (P-01) com base nas etapas 1 e 4 "compreensão do problema" e "revisão da solução" Questionamentos	Professora: *O que vocês acharam do teste?* Comentário dos alunos sobre o seu próprio desempenho na resolução do pré-teste: R1: *não foi fácil resolver*; R2: *resolvi quase todos, faltou somente a última questão*; R3: *não consegui*. Comentário da Professora: *A linguagem é importante ao realizar a análise inicial para a resolução de um problema, é através da linguagem, que se identifica o objetivo e os dados do problema.* *A forma de justificar a resolução de um cálculo, para que o corretor (quem corrige) possa ser convencido pelas respostas dadas é o argumento descritivo em linguagem matemática tanto na forma algébrica, quanto na forma descritiva das ações.* Professora: *O que demonstra que determinada função está crescendo?* R1: *o sinal de subtração (-)*. Professora: Qual o período que a produção da fábrica irá ser esgotada? R1: *8 anos, conforme os dados da função*. Professora: *Que tipo de função é abordado no problema?* Três alunos responderam ao mesmo tempo: *função linear*

sobre o problema (P-02) resolução com base nas etapas 2 e 3 "Construção de um plano" e "Execução do plnao"	*decrescente.*
	Professora: *Qual o comportamento da função na abordagem do problema?*
	[...] Os alunos ficaram em silêncio, mas logo em seguida:
	R1: *tem que encontrar a equação da reta*.
	Os demais concordaram: *Sim, primeiro tem que encontrar a equação da reta para saber [...]*.
Questionamentos sobre o primeiro problema (P-03) resolução com base nas etapas 1 e 3 "Compreensão" e "Revisão da solução"	R2: *Haa, por isso eu não consegui responder [...],* um dos alunos afirmou.
	Professora: *quais de vocês responderam esse problema?*
	R1: *não respondi essa*;
	R2: *resolvi todos*;
	Os demais ficaram em silêncio.
Questionamentos dos alunos:	Q1: *eu encontrei a resposta usando o método da regra de três.*
	Q2: *eu também posso resolver usando o mesmo método pra juros compostos.*
Legenda: R1 – resposta 1, e assim sucessivamente; Q1 – questão 1, e assim sucessivamente.	Professora: *encontrar o resultado, sim! porém este seria um mecanismo para resolver um problema em particular. Os demais seriam resolvidos de forma linear, precisamos de um modelo.*

Fonte: Dados da transcrição das filmagens realizadas durante as aulas

Tendo portanto, identificado que os estudantes demonstraram dificuldades para elaborar os modelos, após o procedimento de aplicação, foi ressaltado ainda na aula, que construir o modelo matemático a partir de situações problema, é uma ação importante, para poder generalizar a ideia e possibilitar a aplicação em outras situações. Foram feitos esclarecimentos mais detalhados a fim de minimizar as dificuldades dos estudantes e passar ao estudo de Limite de Função.

Talizina (1988) comenta que quando estamos diante de um determinado problema se faz necessário pensar como resolvê-lo, fazer um planejamento. Este terá um componente de orientação e ao mesmo tempo um componente prático que se materializa agindo na realidade que o problema expressa. É uma ação prática e toda ação prática tem uma parte orientadora, que não soluciona o problema, mas assegura a sua resolução consciente.

Rezende; Valdes (2006), asseguram que no contexto educacional, a relação entre a orientação e a formação da Base Orientadora da Ação (BOA) não consiste em estabelecer uma sequência de atos a ser seguidos pelo estudante no âmbito escolar, mas sim de orientá-lo

na interpretação da situação de ensino proposta, para propiciar a este estudante a solução adequada e permitir a aprendizagem. Essa Base Orientadora da Ação deve ser desenvolvida num processo de construção do conhecimento, o qual envolve professor e aluno, visando a realização da atividade.

> O aluno deve dispor de todos os conhecimentos necessários sobre o objeto da ação, as condições, as ações que compreendem a atividade a ser realizada, os meios de controle, e deve conhecer, nessa etapa, os limites de aplicação de tal atividade. Para Galperin, a orientação é sinônimo de compreensãoo, pelo papel que desempenha na ação (NÚÑEZ, 2009, p. 101).

Talízina (1988), também destaca a importância da orientação para a formação da ação e esclarece o papel do professor nessa etapa, este exterioriza suas ações mentais, o aluno, não dominando ainda em nenhuma medida esta ação, utiliza as ações formadas anteriormente, elabora a base orientadora da nova ação, entretanto, isso ainda não é ação e sim, o conhecimento tanto dela como das condições de seu cumprimento com êxito, a qual assegura a compreensão.

Assim, ao longo do processo de formação das ações mentais, os componentes de orientação sofrem transformações. Ao ser utilizado a diferentes situações problema, o componente de orientação passa por um processo de diferenciação, onde se destacam, cada vez mais, os aspectos invariantes, que passam a servir de ligação entre a análise da situação problema e a tomada de decisão sobre o que fazer.

5.1.2 Análise Descritiva do Desempenho da Assimilação na Avaliação Formativa e Mediadora

O planejamento das Tarefas aplicadas no estudo de Limite se deu a partir das observações feitas na fase anterior, isto é, seguiu-se por base os conhecimentos dos estudantes. Esse procedimento foi fundamental na condução do processo na fase formativa, que possui um quantitativo maior de aulas. As provas ecritas foram instrumentos avaliativos e de análise na pesquisa, por meio das quais seus resultados foram transformados em dados qualitativos para análise do desempenho de cada estudante participante como sujeito da pesquisa. Os problemas selecionados no planejamento foram determinantes para a assimilação do conceito de Limite pelos estudantes, demonstrado no desempenho individual durante o processo.

Os resultados assimilativos dos estudantes da turma, apresentam-se nas tabelas como resultados conceituais das análises das Tarefas de Compreensão Conceitual, sintetizados do

formulário de análise que compõe os resultados do desempenho da Fase Mediadora do Processo (Apêndice F) no qual consta os detalhes do desenvolvimento das ações em cada problema selecionado para esta análise.

Os quadros demonstram os conceitos de desempenho qualitativo de acordo com as características das etapas das Tarefas de Compreensão Conceitual, relacionadas com o contexto de cada situação, que representa sua ação essencial, para encontrar a solução. Os indicadores quantitativos representam o desempenho das ações quanto a realização completa do indicador essencial e os demais associados a ação, classificados numa escala de [1-5].

As análises das tarefas, de modo geral, foram observadas de acordo com as características das ações essenciais. A Tarefas-04 denominada "o problema da tangente", cujo, objetivo foi introduzir o conceito de Limite, analisou-se a compreensão do estudante, na sua forma materializada e descritiva. Este resultado se obteve na observância da conclusão da inclinação da reta tangente, como o limite da inclinação da reta secante, por meio da expressão descritiva da interpretação. Portanto a ação essencial deste problema destacou-se na compreensão do comportamento da inclinação da reta secante em direção a reta tangente.

TAREFA 4: Encontre uma equação da reta tangente à parábola $y = x^2$, no ponto P(1,1).

Na Tarefa-05 analisamos como ação essencial, a construção do modelo da equação que permitiria calcular a velocidade do corpo em queda livre. Essa atividade teve o objetivo de complementar a ideia do problema da tangente, no entanto, aplicado a um outro contexto (área da Física), visando transferir a aplicação a outras situações problema. Os conceitos relacionados são a velocidade média, a Lei de Galileu "a distância percorrida de um corpo em queda livre é proporcional ao quadrado do tempo em que ele esteve caindo" e o coeficiente angular.

TAREFA 05: Suponha que uma bola é solta a partir do ponto de observação no alto da torre CN em Toronto, 450 m acima do solo. Encontre a velocidade da bola, após 5 segundos.

Na Tarefa-06 a análise foi observada em relação aos procedimentos de assimilação dos conceitos, direcionado para que o estudante analisasse o comportamento de uma função, em um determinado ponto, atribuindo valores próximos a esse número para encontrar uma dependência funcional.

TAREFA 06: Dada a função $f(x) = x^2 + x - 6$, representada pelo gráfico abaixo. Responda:

a) Preencha as tabelas e analise o comportamento da função nos pontos da vizinhança de x = 2.

x=2 (esquerda)	
x	f(x)

x=2 (ireita)	
x	f(x)

b) Represente os pontos das tabelas no gráfico.

Enquanto que na Tarefa-07 analisou-se a solução por meio da definição do limite de uma função, já desenvolvido em aula prática.

TAREFA 07: Explique o que você compreende pela expressão $\lim_{x\to 2} f(x) = 7$.

(a) É possível, que nessa expressão, $f(2) = 2$? Justifique sua resposta.

As análises do desempenho dos estudantes na fase das atividades formativas, seguem o mesmo sistema realizado na análise da fase anterior, ou seja, os resultados foram sintetizados em tabelas, os dados detalhados são apresentados para melhor compreensão das análises e estão disponíveis no Apêndice F. Desse modo, destacamos o desempenho dos estudantes por meio das análises concebidas nos resultados das resoluções das atividades de 04 a 07.

O estudante E_1 nas atividades da fase formativa e mediadora, não esteve presente na aula em que foram realizadas as tarefas (T-04 e T-05).

Estudante $E_{1:}$ das Características das Ações no problema resolvido

Categoria	**Análises da Tarefa-06**	**D-Quanti**
Compreender o problema	Faz a leitura, extrai os elementos do problema dado, destacando $x = 2$ pela direita e pela esquerda deste ponto. Determina, os valores para substituição da variável x, tanto pela esquerda, quanto pela direita. Define o objetivo, pois	5

	destaca as variáveis pela esquerda e pela direita para encontrar valores mais próximos de x.	
Construir o modelo matemático	Determina as variáveis, escolhendo valores para aplicação na tabela. Nomeia as variáveis da tabela, determina x elevado ao sinal negativo (esquerda) e x elevado ao sinal positivo (direita). O modelo matemático foi fornecido parcialmente, ou seja, o estudante precisaria completar com a resolução da equação, que constrói parcialmente o modelo, pois não analisou ponto a ponto da tabela, sua análise foi realizada de maneira geral, de modo que não fez o detalhamento explicativo da diferença entre f(x) e x, para o entendimento da ideia de limite.	2
3ª Ação: Solucionar o modelo matemático	O método matemático foi fornecido no problema. O estudante soluciona o modelo, atribuindo valores para x no intervalo de 1,5 até 1,9999 pela direita e 2,5 até 2,001 pela direita, demonstrado em duas tabelas consecutivas.	5
4ª Ação: Interpretar a solução	Extrai os resultados com relação ao objetivo do problema. Mas, responde parcialmente, pois não detalha o comportamento ponto a ponto da função que leve ao entendimento do conceito de limite. Na sua explicação, faz um breve comentário: "*quando x tende a 2, f(x) tende a zero*". Esse é um entendimento intuitivamente correto, mas insuficiente para atender o objetivo da questão.	**2**

Categoria	**Análises da Tarefa-07**	**D-Quanti**
Compreender o problema	Não extrai todos os elementos do problema e não determina as condições, pois não na tentativa de solução não identifica a definição de limite, portanto, não define os objetivos do problema.	1
Construir o modelo matemático	Determina parcialmente o modelo, pois não explica de forma precisa e completa. Nomeia parcialmente as variáveis e não constrói o modelo matemático, pois não menciona a definição intuitiva de limite, ou seja, realiza análise de forma incompleta.	1
Solucionar o modelo matemático	Não encontra a solução correta, pois não menciona a definição de limite, na forma intuitiva. Soluciona parcialmente, pois responde de forma incompleta a primeira questão e incorretamente a tabela de demonstração pela esquerda.	2
Interpretar a solução	Não extrai, pois responde parcialmente a primeira questão e incorretamente a segunda. Portanto, não dá respostas aos objetivos do problema, pois não relaciona com a definição intuitiva de limite, na expressão verbal do estudante afirma que: "*o valor de* $f(x)$ *quando tendemos a* 2 *é aproximado de* 7". E segunda questão (b): "*sim. Se tivermos uma função que apresente uma descontinuidade*".	1

Conforme o detalhamento das soluções, o estudante E_1 desenvolveu as ações da Tarefa-06 em nível consciente, realizou completamente a primeira ação, mas a ação essencial resolveu de forma incompleta, pois não conseguiu identificar neste exemplo, uma relação funcional do comportamento da função *f(x)* em relação ao valor atribuído nas vizinhanças de *x*, entretanto, esse estudante demonstrou uma característica previamente consciente quando compreendeu a aplicação dos valores de *x* em função de *f(x)* e realizou os cálculos, e também quando esboçou no modelo gráfico, a aproximação dos valores da tabela do ponto dado.

Observamos com esses resultados que o estudante ainda não demonstrou possuir um alto grau de assimilação, que segundo Talízina (1988), inclui as características da ação, tais como a facilidade de realizar a ação, o grau de automatização e a rapidez. No processo de assimilação, a ação passa de uma ação consciente em relação a cada uma das operações, de modo lento para uma ação rápida e automatizada. O Caráter consciente diz respeito à possibilidade de executar a ação (realizar a atividade), corretamente, como também, fundamentar, de forma oral ou escrita sua realização correta (o que faz e o porquê faz) o que constitui uma reflexão.

Depende do caráter detalhado que permite compreender a lógica da ação; da qualidade da ação na etapa da linguagem verbal externa e da qualidade de assimilação nessa etapa (NÚÑEZ; RAMALHO; ALBINO, 2013). A respeito dessa qualidade, Talízina (1987, p. 69) esclarece que, "permite ao homem a possibilidade de observer suas ações e assimilar aquele conhecimento que constitui um privilégio do homem: não só saber, como também dar-se conta do que se sabe, que sabe o que sabe".

Na Tarefa-07, o estudante resolveu as ações pouco consciente, pois todas foram realizadas de modo incompleto, logo na primeira ação, não definiu completamente o objetivo e consequentemente, não elaborou a resposta. Essa atividade não estava baseada na realização de cálculos para solucionar, mas na interpretação da questão fazendo uso da definição de limite, sendo essa uma ação essencial do problema.

Dessa forma, apresentamos na síntese (Tabela 8) apenas os resultados referentes as Tarefas 06 e 07 respondidas pelo estudante E_1.

Tabela 8: Síntese do deesempenho do estudante E1 na fase formativa e mediadora

A	1ª E	2ª E	3ª E	4ª E	Contexto Essencial do Problema
nº 4	-	-	-	-	Compreender o comportamento da

					inclinação das retas secantes em direção a reta tangente.
nº 5	-	-	-	-	Construir o modelo da equação que permite calcular a velocidade do corpo em queda livre após 5 segundos.
nº 6	5	2	5	2	Interpretar a atribuição dos valores próximos de 2, para encontrar uma dependência funcional, entre x e f(x).
nº 7	1	1	2	1	Interpretar a definição $\lim_{x\to a} f(x) = L$, no modelo $\lim_{x\to 2} f(x) = 7$.

Legenda: (A) Atividade; (1ªE) compreensão do problema; (2ªE) estabelecimento de um plano; (3ªE) execução do plano; (4ªE) revisão da solução.

Fonte: SANTOS, 2014.

Seguem as características das ações respondidas nas tarefas da fase mediadora pelo estudante E_2 apresentadas de modo detalhado.

Estudante E_2: Resultado das Características das Ações no problema resolvido

Categoria	Análises da Tarefa-04	D-Quanti
Compreender o problema	A resposta na se aplica ao problema	1
Construir o modelo matemático	A resposta na se aplica ao problema	1
Solucionar o modelo matemático	A resposta na se aplica ao problema	1
Interpretar a solução	A descrição do aluno é insuficiente para realizar conclusões de análise: "*A palavra TANGENTE significa tocando. Uma reta tangente deve ter a mesma direção que a curva no ponto de contato, uma tangente à uma curva é uma reta que toca a curva. Podemos dizer que a inclinação da reta tangente a uma curva é o limite da inclinação das retas secantes*".	1

Categoria	Análises da Tarefa -05	D-Quanti
Compreender o problema	A resposta na se aplica ao problema	1
Construir o modelo matemático	A resposta na se aplica ao problema	**1**
Solucionar o modelo matemático	A resposta na se aplica ao problema	1
Interpretar a solução	Não encontra nenhum resultado na forma algébrica.Apenas a seguinte descrição *"Fica entendido a velocidade de um dado objeto não podemos afirmar que é uma velocidade exata, ou*	1

	seja, constante. Analisando os exemplos fica entendido que cada vez que diminuirmos o espaço de tempo ficamos mais próximos da velocidade média".	

Categoria	**Análises da Tarefa -06**	**D-Quanti**
Compreender o problema	Faz a leitura extrai os elementos do problema dado, destacando $x = 2$ pela direita e pela esquerda deste ponto.Determina as condições, pois determina valores para substituição da variável x, tanto pela esquerda, quanto pela direita, na ilustração gráfica inseri duas setas apontando para o número 2 no eixo das abcissas. Define o objetivo, destacando as variáveis pela esquerda e pela direita para encontrar valores mais próximos de x. Inclusive destaca a função de limite tendendo a 2.	5
Construir o modelo matemático	Determina as variáveis, escolhendo valores para aplicação na tabela. Nomeia as variáveis da tabela determina$x$ elevado ao sinal negativo (esquerda) e x elevado ao sinal positivo (direita). O modelo matemático foi fornecido no problema, mas não completamente, o estudante precisaria completar com resolução da equação. Fez análise de modo parcial, pois não analisou ponto a ponto da tabela, sua análise foi realizada de maneira geral. O aluno não faz o detalhamento explicativo que deveria ser feito, para o entendimento da ideia intuitiva de limite.	2
Solucionar o modelo matemático	O método matemático foi fornecido no problema. O estudante soluciona o modelo, atribuindo valores para x no intervalo de 1,5 até 1,999 pela direita e 2,5 até 2,0001 pela direita, demonstrado em duas tabelas consecutivas.	5
Interpretar a solução	Extrai os resultados significativos com relação ao objetivo do problema. Responde parcialmente, pois não detalha o comportamento ponto a ponto da função que leve ao entendimento do conceito de limite. Na sua explicação: *"quando nos aproximados do valor x=2 pela direita y = f(x) se aproxima de "0" por valor maior que 0. Quando nos aproximas do valor de x=2 pela esquerda, y = f(x) se aproxima de 0, por valor menor que 0"*. Esse é um entendimento intuitivamente correto, mas poderia ser mais detalhado explicitando as diferenças de um valor para outro de aproximação.	**4**

Categoria	**Análises da Tarefa -07**	**D-Quanti**

Compreender o problema	Não conseguiu extrair os elementos do problema como também não determinou as condições e consequentemente não conseguiu definir os objetivos do problema.	1
Construir o modelo matemático	Não determinou e não nomeou as variáveis. Portanto, não conseguiu construir o modelo matemático, logo não houve análises.	1
Solucionar o modelo matemático	Não realizou a solução.	1
Interpretar a solução	Não extraiu nenhuma resposta.	1

Conforme o detalhamento das ações realizadas pelo estudante na Tarefa-04, o mesmo demonstrou nível na execução das ações pouco consciente, pois apenas descreveu a forma conceitual de tangente, sendo esta resposta insuficiente para responder completamente o problema, onde é necessário a elaboração de um modelo algébrico e geométrico da equação de duas retas à uma curva. Portanto, a assimilação das ações foi pouco consciente na resolução o problema.

Deduz-se que, o estudante não compreendeu o objetivo do problema por este apresentar-se com aplicação em um novo contexto. Identificou que havia elementos desconhecidos, portanto, encontrou dificuldade de interpretar e descrever os procedimentos matemáticos, desse modo, as ações tornaram-se mais complexas de serem assimiladas.

Na Tarefa-06 o estudante E_2, desenvolveu as ações em nível consciente, a ação essencial foi parcialmente completa, assim como fez os demais estudantes, o mesmo não realizou o detalhamento da relação funcional entre *f(x)* e *x*, apesar de haver identificado em sua descrição, não aplicou cálculos para identificar a diferença dessa relação nos pontos atribuídos, com o resultado de *f(x)*.

As sínteses apresentadas na Tabela 9 diz respeito ao desempenho na fase formativa e mediadora do estudante E_2, o mesmo demonstra baixa assimilação, em três problemas:

Tabela 9: Síntese do desempenho do estudante E2 na fase formativa e mediadora

A	1ª E	2ª E	3ª E	4ª E	Contexto Essencial do Problema
nº 4	1	1	1	1	Compreender o comportamento da inclinação das retas secantes em direção a reta tangente.
nº 5	1	1	1	1	Construir o modelo da equação que permite calcular a velocidade do corpo em queda livre após 5 segundos.
nº 6	5	2	5	4	Interpretar a atribuição dos valores próximos de 2, para encontrar uma dependência

					funcional, entre x e f(x).
nº 7	1	1	1	1	Interpretar a definição $\lim_{x\to a} f(x) = L$, no modelo $\lim_{x\to 2} f(x) = 7$

Legenda: (T) Tarefa; (1ªE) compreensão do problema; (2ªE) estabelecimento de um plano; (3ªE) execução do plano; (4ªE) revisão da solução.

Fonte: Santos, 2014.

O Estudante E_3 esteve presente na aplicação de todos as atividades selecionadas para análise desta fase. Seguem as ações detalhadas nessas tarefas por este estudante.

Estudante E_3: Resultado das Características das Ações no problema resolvido

Categoria	**Análises da Tarefa-04**	**D-Quanti**
Compreender o problema	Lê e descreve os elementos essenciais do problema. Determina as condições afirmando que precisa encontrar o coeficiente para poder resolver a equação. Define o objetivo ao afirmar que precisa encontrar o coeficiente angular definindo dois pontos, para encontrar a inclinação da reta.	**4**
Construir o modelo matemático	Não determina o modelo na sua descrição, as variáveis e não nomeia, portanto não realiza análises das unidades.	1
Solucionar o modelo matemático	Não encontra método algébrico. Soluciona parcialmente o modelo de forma descritiva.	1
Interpretar a solução	O estudante explica de forma confusa os conceitos relacionados ao problema. A resposta dada não está de acordo com o objetivo. O estudante descreve como relatório de análise: *"para encontrar a solução é necessário montar o gráfico da tabela dada. Como o ponto P já é conhecido traça-se uma curva tangenciando o ponto P, que na sua extremidade passa o ponto R, através destes dois pontos podemos chegar ao coeficiente angular, que é a solução do problema*". O relatório é insuficiente para realizar análise da compreensão do problema, fazer relações com os conceitos e interpretação da solução.	2

Categoria	**Análises da Tarefa-05**	**D-Quanti**
Compreender o problema	Faz a leitura e destaca que o problema envolve duas variáveis (distância e tempo). Determina as condições do problema quando afirma que existem duas velocidades no problema (média e instantânea). Define os objetivos descrevendo as velocidades que precisam ser encontradas.	5
Construir o modelo	Apesar de descrever, o aluno não determina as variáveis algebricamente. Do mesmo modo, não nomeia nenhuma	1

matemático	variável e incógnita. Não constrói o modelo matemático de forma algébrica ou geométrica, apenas descreve o que compreendeu. Portanto, não consegue fazer análise das unidades do problema.	
Solucionar o modelo matemático	Não descreve modelo matemático na forma algébrica ou geométrica. Soluciona apenas de forma descritiva a maneira de resolver, não apresenta definições matemática para a solução.	2
Interpretar a solução	Extrai os resultados ao observar que o problema trata de dois tipos de velocidade (média e instantânea). Responde parcialmente de forma descritiva o problema, mas não demonstra modelo matemático para a solução. "*O problema envolve duas variáveis: distância e tempo. Através do gráfico, podemos visualizar duas velocidades, a velocidade média e a velocidade instantânea. A reta tangente, fornece a velocidade instantânea e a reta secante a velocidade média. Podemos calcular a importância dos limites para determinar a solução de problemas que envolve velocidade e distância".*	**3**

Categoria	**Análises da Tarefa-06**	**D-Quanti**
Compreender o problema	Faz a leitura e extrai os elementos do problema dado, destacando $x = 2$ pela direita e pela esquerda deste ponto. Determina parcialmente as condições, pois os valores escolhidos para substituição da variável x, pela direita, o aluno não soube fazer a aproximação adequada, sendo observado também na ilustração gráfica. Define o objetivo, pois destaca as variáveis pela esquerda e pela direita para encontrar valores mais próximos de x. Inclusive destaca a função de limite tendendo a 2.	2
Construir o modelo matemático	Determina parcialmente correta as variáveis, pois os valores escolhido para atribuição a x pela direita, o estudante poderia ter atribuído valores mais próximos possível de 2. Nomeia as variáveis da tabela, determina x elevado ao sinal negativo (esquerda) e x elevado ao sinal positivo (direita). O modelo matemático foi fornecido no problema, mas parcialmente completo, o estudante precisaria completar com resolução da equação. Fez análise das unidades de modo parcial, pois não analisou ponto a ponto da tabela, sua análise foi realizada de maneira geral. O estudante não faz o detalhamento explicativo que deveria ser feito, para o entendimento da ideia intuitiva de limite.	2
Solucionar o modelo matemático	O método matemático foi fornecido no problema. O estudante soluciona o modelo, mas parcialmente correto, atribuindo valores para x no intervalo de 1,5 até 1,99999 pela direita e 2,5 até 2,01 pela direita, demonstrado em duas tabelas consecultivas.	3

Interpretar a solução	Extrai os resultados com relação ao objetivo do problema. Responde parcialmente, pois não detalha o comportamento ponto a ponto da função que leve ao entendimento do conceito de limite. Na sua explicação: "*O limite da função quando x tende 2 é igual 0"*. O estudante dá uma resposta correta, mas não detalha o comportamento, portanto, esta resposta não atende ao objetivo do problema.	**2**

Categoria	**Análises da Tarefa -07**	**D-Quanti**
Compreender o problema	Não extrai todos os elementos do problema. Não determina as condições do problema pois não identifica a definição de limite. Portanto, não define os objetivos do problema, pois não menciona a definição de limite.	1
Construir o modelo matemático	Determina parcialmente, pois não explica precisamente o comportamento dos valores no intervalo dado. Nomeia parcialmente, portanto, não constrói corretamente o modelo, por não mencionar a definição de limite, logo sua análise está incorreta.	1
Solucionar o modelo matemático	Não encontra a solução correta, pois não menciona a definição de limite. Responde de forma incompleta e incorreta a primeira questão e não responde a segunda.	2
Interpretar a solução	Não extrai os resultados, pois responde parcialmente a primeira questão e não responde a segunda. Portanto, não dá respostas aos objetivos do problema, pois não relaciona com a definição de limites, na primeira questão responde: *"o limite de f(x) para x=7*". E na segunda apenas menciona que *f(x) =x*. Logo, as respostas estão incorretas, ou seja, não atendem aos objetivos do problema.	1

Observamos a partir dos dados que o Estudante E_3, na Tarefa-04 desenvolveu as ações parcialmente inconsciente, inclusive a ação essencial, inicialmente esboçou compreender o problema, no entanto, seus conhecimentos com relação a equação da reta, coeficiente angular foram insuficientes para aplicação na elaboração do modelo, desse modo, não elaborou a equação da reta corretamente e não esboçou o modelo geométrico das equações.

Na Tarefa-05, desenvolveu as ações em nível consciente, demonstrou melhor compreensão ao fazer a leitura completa e destacar as variáveis (distância e tempo), mas não determinou a forma algébrica, sendo essa a condição do problema, também não elaborou o modelo, tentou explicar apoiado em fatos conceituais, descrição pertinente, mas não demonstra algebricamente, a solução, o que não respondeu totalmente ao objetivo do problema.

O estudante na Tarefa-06, resolveu todas as ações inconscientes, determinou a ação essencial incompleta, não fez corretamente a aplicação dos pontos na tabela, os pontos escolhidos não foram suficientemente próximos do ponto x, para realizar o observação do comportamento, não fez nenhuma explicação detalhada de como a função se comportava ponto a ponto, em relação da diferença dos valores de x em relação ao ponto e o resultado de *f(x)*.

A Tarefa-07 foi resolvida pelo estudante, em nível pouco consciente, todas as ações foram solucionadas de modo incompleto, e portanto, consideradas insuficientes para analisar se houve compreensão da definição de limite. As sínteses na (Tabela 10) representam o desempenho na fase formativa e mediadora, o qual observamos uma maneira de assimilação inconstante nas ações realizadas pelo estudante, apresentando dúvidas com maior frequência na segunda ação dos problemas, ou seja, na elaboração dos modelos, o que basicamente prejudicou o desempenho nas demais ações e na assimilação do conceito de limite.

Tabela 10: Síntese do desempenho do estudante E3 na fase formativa e mediadora

A	1ª E	2ª E	3ª E	4ª E	Contexto Essencial do Problema
nº 4	4	1	1	2	Compreender o comportamento da inclinação das retas secantes em direção a reta tangente.
nº 5	5	1	2	3	Construir o modelo da equação que permite calcular a velocidade do corpo em queda livre após 5 segundos.
nº 6	2	2	3	2	Interpretar a atribuição dos valores próximos de 2, para encontrar uma dependência funcional, entre x e f(x).
nº 7	1	1	2	1	Interpretar a definição $\lim_{x\to a} f(x) = L$, no modelo $\lim_{x\to 2} f(x) = 7$

Legenda: (T) Tarefa; (1ªE) compreender o problema; (2ªE) construir o modelo matemático; (3ªE) solucionar o modelo matemático; (4ªE) interpretar a solução.

Fonte: Santos, 2014.

O estudante E_4 não esteve presente na aula em que foram desenvolvidas as atividades 04 e 05. Sobre seu desempenho na Tarefa-06, observamos baixa condição de assimilação em todas as ações do problema, já na Tarefa-07, apresentou uma melhora no nível de compreensão. As ações detalhadas pelo estudante na solução dessas atividades estão descritas a seguir.

Estudante E_4: Resultado das Características das Ações no problema resolvido

Categoria	Análises da Tarefa-06	D-Quanti
Compreender o problema	Faz a leitura, extrai os elementos do problema dado, destacando $x = 2$ pela direita e pela esquerda deste ponto. Determina parcialmente as condições, pois os valores escolhidos para substituição da variável x, pela direita não foram apropriados para fazer a aproximação adequada, sendo observado também na ilustração gráfica. Define parcialmente o objetivo, pois destaca as variáveis pela esquerda e pela direita para encontrar valores mais próximos de x. Inclusive destaca a função de limite tendendo a 2.	2
Construir o modelo matemático	Determina parcialmente as variáveis, pois os valores escolhido para atribuição a x pela direita, poderia ter escolhido valores mais próximos possível de 2.Nomeia as variáveis da tabela determina x elevado ao sinal negativo (esquerda) e x elevado ao sinal positivo (direita). O modelo matemático foi fornecido no problema, mas o estudante precisaria completar com resolução da equação. Fez análise de modo parcial, pois não analisou ponto a ponto da tabela, sua análise foi realizada de maneira geral. O aluno não faz o detalhamento explicativo que deveria ser feito, para o entendimento da ideia intuitiva de limite.	2
Solucionar o modelo matemático	O método matemático foi fornecido no problema. O estudante soluciona o modelo, mas parcialmente correto, atribuindo valores para x no intervalo de 1,5 até 1,99 pela direita e 2,5 até 2,1 pela direita, demonstrado em duas tabelas consecultivas. Não representou os pontos da tabela no gráfico dado.	2
Interpretar a solução	Extrai os resultados significativos com relação ao objetivo do problema. Responde parcialmente, pois não detalha o comportamento ponto a ponto da função que leva ao entendimento do conceito de limite. Na sua explicação: "*O limite da função quando x tende 2 é igual 0*". A resposta dada está correta, mas não detalha o comportamento, portanto, esta resposta não atende ao objetivo do problema.	2

Categoria	Análises da Tarefa -07	D-Quanti
Compreender o problema	Não extrai todos os elementos do problema. Faltando mencionar a definição de limite. Não determina as condições do problema, pois não identifica a definição de limite. Não define os objetivos do problema, pois não menciona a definição de limite.	1
Construir o modelo matemático	Determina parcialmente, pois não explica de forma precisa e completa. Nomeia parcialmente as variáveis, faltando identificar a definição limite. Não constrói o modelo, pois não menciona a definição de limite. Realiza análise de forma	2

	parcial.	
Solucionar o modelo matemático	Não encontra, pois não menciona a definição de limite. Responde de forma incompleta, pois a primeira questão falta a definição limite e a segunda está correta.	3
Interpretar a solução	Extrai parcialmente os resultados significativos, pois responde as duas questões, mas a primeira está incompleta. A resposta dada não está totalmente correta, pois a primeira questão faltou mais detalhamento sobre o conceito de limite, mas a segunda está correta. A primeira questão responde: na primeira "*O limite de $f(x)$ quando x tende a 2, será igual a 7*" e na segunda "*Não, pois nas vizinhanças de 2 f(x) é igual a 7, portanto, para x=2, f(x) se aproxima de 7''*.	4

Conclui-se a partir das características das ações realizadas pelo estudante E_4 na solução das atividades, baixo desempenho na assimilação dos conceitos, apesar de ter sido introduzido o sistema de características suficientes para a construção do conceito de limite de função, o estudante não demonstrou total autonomia para conduzir o processo de sua própria aprendizagem, demonstrando baixo grau de consciência. Segue a síntese de seu desempenho na Tabela 11.

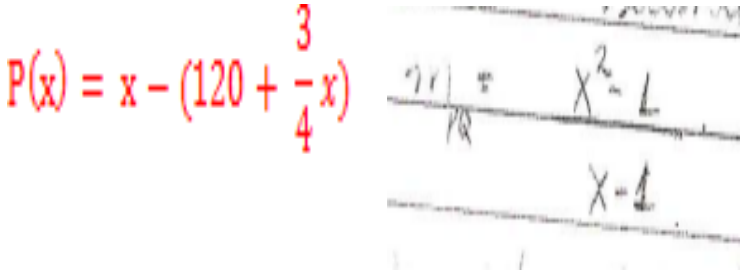
Tabela 11: Síntese do desempenho do estudante E4 na fase formativa e mediadora

A	1ª E	2ª E	3ª E	4ª E	Contexto Essencial do Problema
nº 4	-	-	-	-	Compreender o comportamento da inclinação das retas secantes em direção a reta tangente.
nº 5	-	-	-	-	Construir o modelo da equação que permite calcular a velocidade do corpo em queda livre após 5 segundos.
nº 6	2	2	2	2	Interpretar a atribuição dos valores próximos de 2, para encontrar uma dependência funcional, entre x e f(x).
nº 7	2	2	3	4	Interpretar a definição $\lim_{x\to a} f(x) = L$, no modelo $\lim_{x\to 2} f(x) = 7$
Legenda: (T) Tarefa; (1ªE) compreender o problema; (2ªE) construir o modelo matemático; (3ªE) solucionar o modelo matemático; (4ªE) interpretar a solução.					

Fonte: Santos, 2014.

O estudante E_5 esteve presente na aplicação de todas as atividades escolhidas para análise dessa fase. As ações detalhadas na solução dos problemas estão apresentadas no quadro a seguir.

Estudante E_5: Resultado das Características das Ações no problema resolvido

Categoria	Análises da Tarefa -04	D-Quanti
Compreender o problema	Ler o problema e extrai os elementos. Determina as condições quando afirma que primeiro precisa encontrar o coeficiente angular, para poder encontrar a equação da reta tangente, mas o problema só dá apenas um ponto e são necessários dois pontos. Define a descrever completamente as condições do problema.	5
Construir o modelo matemático	Determina todas as variáveis e incógnitas quando determinas as fórmulas algébricas e a representação geométrica. Nomina da seguinte forma: $P(1,1), Q(x, x^2), m, t$. Constrói o modelo algébrico e geométrico do problema. Realiza as análises das unidades de forma descritiva.	5
Solucionar o modelo matemático	Encontra o método algébrico e geométrico de solução. Resolve de forma descritiva fazendo demonstrações das condições do problemas, as formas de solução e a relação entre os elementos. 	5
Interpretar a solução	Extrai todos os elementos relativos ao problema, fazendo descrições de aplicação ao modelo. Responde ao problema de forma descritiva fazendo demonstração algébrica e geométrica do problema, demonstra explicitado da escrita. De acordo com o problema apresentado, para encontrar uma reta t tangente à parábola $y = x\text{^}2$, usaremos os mesmos princípios da explicação dada, onde encontrando o coeficiente angular, podemos achar a equação da reta, mas temos um problema: $Y - Y0 = M(X - X0)$, ou seja, só temos um ponto, e precisamos de dois pontos para encontrar o coeficiente angular m no ponto (1,1). Esboça um gráfico com identificação do pontos e das retas secante e tangente à esquerda da parábola com concavidade para cima. E continua a descrição: "daí	5

	colocamos um ponto na parábola próximo para calcular assim o valor do coeficiente da reta secante, no caso a reta PQ, $m_{PQ} = (x^2 - 1)/(X - 1)$. Assim dada a fórmula para achar um ponto qualquer, ou seja, quanto mais próximo o ponto Q estiver de P, mais próximo x estará de 1. De acordo com esta descrição o aluno demonstrou uma forma correta de descreve o problema no modo de solucionar o problema, usando inclusive o modelo algébrico.	

Categoria	**Análises da Tarefa-05**	**D-Quanti**
Compreender o problema	Faz a leitura e extrai os elementos principais do problema identificando a velocidade como um elemento a ser descoberto. Determina parcialmente as condições do problemas, pois identifica apenas que deve encontrar a velocidade média, faltando mencionar a velocidade instantânea. Define o objetivo parcialmente, pois afirma ter que encontrar somente a velocidade média para solucionar o problema.	2
Construir o modelo matemático	Determina parcialmente as variáveis e incógnitas do problema, da seguinte forma: $t = 5$, $t = 5{,}1$. Nomina apenas a variável de tempo: $t = 5$ e $t = 5{,}1$. Não constrói modelo matemático na forma algébrica ou geométrica. Realiza parcialmente análise das unidades que destaca.	**2**
Solucionar o modelo matemático	Não faz descrição quanto ao método de resolução nem mesmo de forma descritiva. Não se aplica. Apenas tenta descrever a solução, mas insuficiente para análise.	2
Interpretar a solução	Não extrai nenhum resultado do problema. Responde parcialmente ao problema. A descrição do estudante quanto a análise do problema: "*Nesse problema, o autor quer saber a velocidade de uma bola após 5 segundos, sendo ela solta a partir de um ponto de observação no alto da Torre CN em Toronto, cerca de 450 metros acima do solo. Como na explicação e na resolução dos problemas anteriores de velocidade, o primeiro passo é calcular a velocidade média no intervalo de tempo, temos um único instante de tempo neste caso, (t=5), porém podemos aproximar a uma velocidade média, acima do instante de tempo que é dado, t=5 até o instante t=5,1, como foi feito no problema*".	3

Categoria	**Análises da Tarefa-06**	**D-Quanti**
Compreender o problema	Faz a leitura, extrai os elementos do problema, destacando $x = 2$ pela direita e pela esquerda deste ponto. Determina parcialmente o objetivo, pois os valores escolhidos para substituição da variável x, pela direita atribui valores distantes do ponto, sendo observado	2

	também na ilustração gráfica. Destaca as variáveis pela esquerda e pela direita para encontrar valores mais próximos de x. Inclusive destaca a função de limite tendendo a 2.	
Construir o modelo matemático	Determina parcialmente correta as variáveis, pois os valores escolhido para atribuição a x pela direita poderia ter atribuído valores mais próximos possível de 2. Nomeia as variáveis da tabela determinar x elevado ao sinal negativo (esquerda) e x elevado ao sinal positivo (direita). O modelo matemático foi fornecido no problema, mas não completamente, precisaria completar com resolução da equação. De modo parcial, pois não analisou ponto a ponto da tabela, sua análise f realizada de maneira geral. O aluno não faz o detalhamento explicativo que deveria ser feito, para o entendimento da ideia de limite.	2
Solucionar o modelo matemático	O método matemático foi fornecido no problema, o aluno soluciona o modelo parcialmente correto, atribuindo valores para x no intervalo de 1,5 até 1,99 pela direita e 2,4 até 2,0001 pela direita, demonstrado em duas tabelas consecutivas. Demonstrou os pontos encontrados na tabela dada.	3
Interpretar a solução	Extrai os resultados significativos com relação ao objetivo do problema. Responde parcialmente, pois não detalha o comportamento ponto a ponto da função que leva ao entendimento do conceito de limite. Na sua explicação: "*O limite da função quando x tende 2 é igual 0"*. Ela dá uma resposta correta, mas detalha o comportamento, portanto, esta resposta não atende ao objetivo do problema.	2

Categoria	**Análises da Tarefa-07**	**D-Quanti**
Compreender o problema	Extrai parcialmente os elementos do problema. Determina parcialmente as condições do problema, pois não identifica a definição de limite. Define parcialmente os objetivos do problema, pois não menciona a definição de limite.	1
Construir o modelo matemático	Determina parcialmente, pois não explica de forma precisa e completa. Nomeia parcialmente as variáveis. Não constrói, pois não menciona a definição de limite. Realiza de forma incorreta.	1
Solucionar o modelo matemático	Não encontra, pois não menciona a definição de limite. Responde de forma incompleta e incorreta a primeira questão e não responde à segunda.	2

Interpretar a solução	Não extrai, pois responde parcialmente a primeira questão e não responde a segunda. Não dá respostas aos objetivos do problema, pois não relaciona com a definição de limites. O aluno descreve somente a primeira questão responde: *"O limite de f(x) quando x tende a 2 será igual a 7".*	1

Conforme o detalhamento das ações, na Tarefa-04, o estudante E_5 desenvolveu de modo totalmente consciente, extraiu todos os elementos relativos, fazendo a descrições de aplicação ao modelo. Respondeu o objetivo do problema de forma descritiva fazendo demonstração algébrica e geométrica.

Porém, a Tarefa-05, foi resolvida de modo razoavelmente consciente, as três primeiras ações foram apresentadas incompletas, a ação essencial parcialmente correta. Este problema, traz os mesmos conceitos do problema da tangente, no entanto, contextualizado na área da Física. Logo, exige conhecimento sobre a Lei do corpo em movimento de Galileu, talvez esse elemento seja desconhecido para o estudante, motivo pelo qual não tenha elaborado o modelo.

A Tarefa-06, o estudante também desenvolveu as ações de forma parcialmente consciente, a ação essencial apresentou-se incompleta, as condições e o objetivo do problema não foram compreendidos totalmente, logo, as demais ações também ficaram incompletas. As compreensões do estudante não foram suficientes para observar a relação funcional que se esperava. Portanto, suas ideias quanto a esta solução foram identificadas como razoavelmente conscientes.

Na Tarefa-07 o estudante desenvolveu em nível pouco consciente, este não fez uso da definição de limite para justificar sua resposta, que não apresentou-se totalmente incorreta, mas incompleta, e portanto, insuficiente para responder totalmente o objetivo do problema. Logo, sua assimilação foi identificada como pouco consciente, quanto a definição de limite.

As sínteses apresentadas na Tabela 12 representam o desempenho do estudante na fase formativa e mediadora. Na primeira tarefa, as ações foram elaboradas totalmente corretas, no entanto, nos demais problemas apresentou alcance baixo nos indicadores das ações compreensão e elaboração do modelo matemático.

Tabela 12: Síntese do desempenho do estudante E5 na fase formativa e mediadora

A	1ª E	2ª E	3ª E	4ª E	Contexto Essencial do Problema
nº 4	5	5	5	5	Compreender o comportamento da inclinação das retas secantes em direção a reta tangente.
nº 5	2	2	2	3	Construir o modelo da equação que permite calcular a velocidade do corpo em queda

					livre após 5 segundos.
nº 6	2	2	3	2	Interpretar a atribuição dos valores próximos de 2, para encontrar uma dependência funcional, entre x e f(x).
nº 7	1	1	2	1	Interpretar a definição $\lim_{x\to a} f(x) = L$, no modelo $\lim_{x\to 2} f(x) = 7$

Legenda: (T) Tarefa; (1ªE) compreensão do problema; (2ªE) estabelecimento de um plano; (3ªE) execução do plano; (4ªE) revisão da solução.

Fonte: Santos, 2014.

Os resultados dessa fase mostraram, em primeiro lugar, que existem diferenças entre os estudantes quanto a predominância de uma ou outra etapa de solução das Tarefas de Compreensão Conceitual trabalhadas, segundo, que essa diferença se reflete na compreensão e na resolução dos problemas matemáticos propostos.

Coerente com a Teoria de Galperin (1986a), o desenvolvimento das atividades teve como objetivo permitir que os estudantes compreedessem, a partir da Base Orientadora da Ação, o conceito de Limite de Função. O procedimento por meio da realização das Tarefas de Compreensão Conceitual era novo para os estudantes e a disciplina Cálculo I já era esperada pelos estudantes com uma disciplina difícil, atrelada a essas questões ainda teve o problema das faltas de alguns estudantes nas aulas. Esse fatores contribuíram para um resultado não tanto proveitoso nessa fase da pesquisa.

Do ponto de vista psicológico, ou seja, observando-se o grau de consciência que os alunos demonstraram em cada atividade, além de perceber uma grande diferença entre eles, consideramos importante um controle mais eficaz, tanto durante o estudo dos conceitos, quanto na fase de realização das atividades, a etapa material ou materializada, com vistas a um melhor rendimento.

O controle, segundo Talízina (1988), ocorre durante todo o processo da formação das ações mentais por etapas e muda de natureza durante esse processo, iniciando de modo externo e na sequência conduzido pelo próprio estudante. Ainda com relação ao controle, Talízina descreve:

> 1. Nas primeiras etapas do processo de apropriaçãoo o controle deve realizar-se por operações.
> 2. No princípio da etapa material (materializada) e da verbal externa, o controle de forma externa deve ser sistemático, de toda a tarefa que se cumpre.
> 3. Ao final dessas etapas, assim como nas seguintes, este controle deve ser episódico, a pedido de quem estuda.
> 4. O modo de realização do controle (quem controla) não tem grande importância para a qualidade da assimilação. Ao mesmo tempo, a novidade do modo de controle, assim como as condições de emulação (no trabalho dos estudantes em

> pares, onde se realiza um controle mútuo) contribuem para a criação de uma motivação positiva de estudo (TALÍZINA, 1988, p. 117).

Galperin (1989), ressalta que a transição das ações por todas essas etapas considera o conhecimento prévio do sujeito, bem como também a forma como são realizadas as orientações. Arievitch; Haenen, 2005, estimam que quando as ações passam por essas etapas, há um razoável garantia de que uma ação mental estará formada, ocorrendo, desta forma, o processo de internalização.

5.1.3 Análise Descritiva do Desempenho da Assimilação dos Conceitos Gerais

No teste final, os problemas resolvidos pelos estudantes nessa primeira unidade (conteúdo de Limite), as análises feitas foram sobre o estudo do conceito de continuidade de funções e limites infinitos, o detalhamento dos resultados obtidos por cada estudante (Apêndice G), estão classificados de acordo com a ordem de análises dos problemas. Vale salientar que o estudante E_4, não participou dessa fase da pesquisa, tendo em vista que, faltou no dia da realização das tarefas.

No sentido de observar a apropriação teórica, a Tarefa-08 visa a transferência da Ação Mental da aprendizagem em relação ao conceito de continuidade de funções em quatro situações analisadas. Foram realizados pelos estudantes a composição de uma tabela com valores aproximados do ponto, no intervalo dado em cada questão, também foi necessário descrever o modelo geométrico, explicando o comportamento que justifica a descontinuidade da função.

TAREFA-08- Explique que a função é descontínua no número dado. Esboce o gráfico da função:

e) $f(x) = \ln|x-2|$ x = 2

A f) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} \; se \; x \neq 1 \\ 2 \; se \; x = 1 \end{cases}$ x = 1

g) $f(x) = \begin{cases} e^x \; se \; x < 0 \\ x^2 \; se \; x \geq 0 \end{cases}$ x = 0

h) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x}{x^2-1} \; se \; x \neq 1 \\ 1 \; se \; x = 1 \end{cases}$ x =1

Tarefa-09 propõe a explicação da definição de limites infinitos na análise contextual para identificar o custo percentual de remoção de resíduos tóxicos, como objetivo do problema, com base na definição. Portanto, o estudante, nessa atividade, teve que analisar o custo para remoção dos resíduos tóxicos, a partir da compreensão do conceito de limites infinitos e concluir que, quanto mais próximo de 100 forem os valores de x pela esquerda, o limite tende a mais infinito.

TAREFA 09 - O custo para remover x% de resíduos tóxicos num aterro é dado $S(x) = \frac{0{,}8x}{100-x}$ com $0 < x < 100$.

a) Calcule $\lim_{x \to 100-} S(x)$

b) Interprete o resultado obtido

O propósito de trabalhar estes problemas foi visualizar a aprendizagem dos estudantes por meio do progresso nas etapas descritas por Galperin (1989) na sua teoria, que vai de material a mental. "A formação das etapas das ações que levam as ações externas objetais, internas e ideais, estabelecem o conteúdo fundamental do processo de assimilação". Mas Galperin assinala que nem toda ação obrigatoriamente deve passar por todas as etapas, senão a parte nova (LONGAREZI E PUENTES, 2013, p. 297).

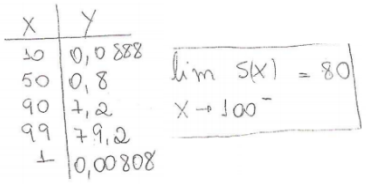
Segue a apresentação detalhada na solução das tarefas realizadas pelos estudante E_1.

Estudante E_1: Resultado das Características das Ações no problema resolvido

Categoria	Análises da Tarefa-08	D-Quanti
Compreender o problema	Faz a leitura das funções do problema e extrai os elementos essenciais para saber se a função é contínua ou descontínua no ponto dado. Determina realizando os cálculos na forma algébrica e geométrica. Destaca cada uma das tabelas dos pontos próximos do valor dado, compõe o gráfico de cada uma. Ao destacar cada uma das funções se observa que o aluno define o objetivo, pois descreve o que precisa encontrar para dar o resultado do problema.	5
Construir o modelo matemático	Identifica as variáveis e incógnitas dispostas na tabela para encontrar os pontos próximos do ponto dado tanto pela sua direita, quanto pela esquerda. Nomina as variáveis, classifica X elevado ao sinal de menos pela esquerda e x elevado ao sinal positivo pela direita. Constrói e determina as condições para resolver, ao destacar cada uma das funções para identificar o tipo. O	5

	aluno realizou também para todas as funções a demonstração geométrica e também fez um breve relatório descritivo. Analisa que variáveis necessitam de atenção ao substituir os valores, que precisam tomar um posicionamento nas proximidades do ponto dado.	
Solucionar o modelo matemático	Utiliza o método de resolução intuitiva de limite, compondo tabela e gráfico do comportamento da função para poder identificar o tipo. Não recomendado para este problema. O aluno explica porque cada função é descontínua no pondo dado: a) atribui valores próximos de 2 pela esquerda até a quarta casa decimal, encontrando as coordenadas pela esquerda (1,5,-0,6931) até (0,999, -9,2103) e pela direita atribuindo valores próximos de dois até a quarta casa decimal (2,5,-0,6931) até (2,0001, -9,2103) e demonstra no gráfico; b) já nesta função o aluno compõe apenas uma tabela, determinando os pontos (2,1), (0,-1), (3, 1/2) e (-1, -1/2) aplica no gráfico; c) nesta função o aluno elabora duas tabelas (esquerda e direita) e encontra as coordenadas pela esquerda (-1, 0,3678), (-2, 0,1353), (-0,5, 0,6065), (-0,1, 0,9048) e pela direita (0,0), (1,1), (2,4), (0,5, 0,25) e (0,1,0,01); d) (0,0), (0,5 , 0,33) e (2, 2/3).	5
Interpretar a solução	Através das funções dadas destaca e descreve o comportamento identificando o tipo, atendendo ao objetivo do problema.	5

Categoria	Análises da Tarefa-09	D-Quanti
Compreender o problema	Extrai os elementos e destaca o modelo da função. Ao organizar os dados para resolver, esboça que determina as condições do problema. Ao iniciar a resolução do problema destaca-se a função com um ponto de interrogação S(x) = ?, observa-se que o aluno determina uma incógnita neste momento.	5
Construir o modelo matemático	Determina as variáveis e incógnitas, definindo que S(x), x, y, demonstrando algebricamente. Nomeia as variáveis e incógnitas: identifica a função. Não se aplica, pois o modelo já foi dado no problema, mas organiza os dados problemas na forma algébrica. Faz relação das variáveis do modelo matemático com a solução do problema.	**5**

	$S(x) = \frac{0,8x}{100-x}$ $\lim_{x \to 100^-} S(x) = ?$ $\lim_{x \to 100^-} S(x) = 80$	
Solucionar o modelo matemático	Encontra o método de solução, compondo uma tabela e atribuindo valores para x no intervalo de 10 até 99. Não se aplica. Observando o desenvolvido dos cálculos o aluno solucionou o modelo matemático e apresenta o resultado. 	5
Interpretar a solução	Extrai o modelo do problema e faz relação com o limite que precisa encontrar. Responde ao problema destacando os procedimentos algebricamente. No final da questão o aluno descreve o seguinte texto: "*Destacando o intervalo que determina a função da porcentagem do custo. Quanto mais distante de 100 pela esquerda, menor o custo"*. No entanto, o valor máximo é de 80%.	**5**

O desempenho do estudante E_1 em relação a Tarefa-08 foi excelente, todas as ações foram realizadas totalmente corretas, isso implica que compreendeu corretamente os objetivos das questões, elaborou os modelos compondo uma tabela para cada item, determinou valores para analisar o comportamento da função, encontrou as coordenas e construiu os gráficos, concluiu com a afirmativa do resultado de cada função. Dessa maneira, observamos que o estudante desenvolveu as ações totalmente consciente, pois suas descrições estão fundamentadas no conceito de aplicação, ou seja, descontinuidade de função.

Na Tarefa-09, o estudante também resolveu todas as ações totalmente consciente, elaborou o modelo, fez a aplicação correta do conceito de limite no infinito e encontrou a solução correta. Observamos que a fundamentação foi consciente em relação ao conceito. Logo este estudante, realizou os procedimentos corretos e, portanto, suas ações foram realizadas totalmente conscientes.

O grau de consciência, conforme descreve Talízina (2001), é formado por duas vias, a primeira, o aluno toma consciência da lógica que estrutura a atividade que realiza, tanto pela resolução da tarefa de modo reflexivo, como também, pela forma em que a tarefa se apresenta, a qual exige uma reflexão consciente sobre as formas de resolução das situações problemas. A segunda, é solicitado ao aluno que justifique, explique em voz alta ou por

escrito, as ações que desenvolve, tal como foi exigido na Tarefa–09: que o aluno interprete e explique o resultado obtido. Em síntese, o caráter consciente diz respeito a possibilidade do estudante executar corretamente a ação e ainda fundamentar de forma oral ou escrita sua realização correta, o que constitui uma reflexão.

A Tabela 13 demonstra a síntese qualitativa do desempenho do estudante E_1 na resolução das atividades da fase final.

Tabela 13: Síntese do Desempenho do Estudante E1 na Fase Final

T	1ª E	2ª E	3ª E	4ª E	Contexto Essencial do Problema
nº 8	5	5	5	5	Solucionar o problema fazendo uso da definição de continuidade de funções.
nº 9	5	5	5	5	Analisar o custo para remoção dos resíduos tóxicos, a partir da compreensão do conceito de limites infinitos.

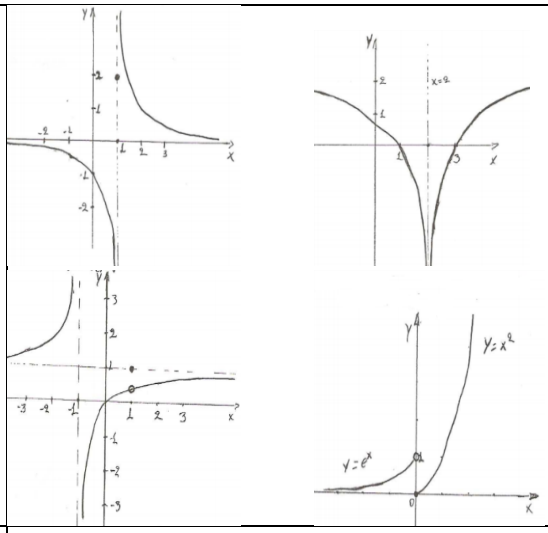
Legenda: (T) Tarefa; (1ªE) compreensão do problema; (2ªE) estabelecimento de um plano; (3ªE) execução do plano; (4ªE) revisão da solução.

Fonte: Santos, 2014.

A seguir descrevemos as ações detalhadas do desempenho do estudante E_2 nessa fase da pesquisa.

Estudante $E_{2:}$ Resultado das Características das Ações no problema resolvido

Categoria	Análises da Tarefa-08	D-Quanti
Compreender o problema	Faz a leitura e extrai os elementos das funções de cada questão. Determina as condições e o objetivo quando, esboça um gráfico a partir dos dados do problema e por isso consegue explicar. Define o objetivo a destacar o modelo gráfico e a explicação dada sobre cada função resolvida.	5
Construir o modelo matemático	Determina as variáveis e incógnitas necessárias para resolver o problema. Nomina as variáveis x e y. Constrói para todas a funções o modelo matemático na forma geométrica e algébrica:	5

		
Solucionar o modelo matemático	Aplica o método para resolução da função limite. Soluciona todos os modelos matemáticos, fazendo a seguinte descrição para cada uma.	5
Interpretar a solução	Extrai os resultados destacando cada uma das funções. Dá resposta parcialmente ao problema, pois para uma das funções o estudante não descreveu a resposta. Descreve o motivo de três funções serem descontínuas faltando apenas a última: *a) ele afirma ser descontínua, pois a função logarítmica não está definida no ponto 2; b) afirma ser descontínua porque no ponto 1 o limite não existe; c) afirma pelas condições dada da função os limites laterais não são iguais, ou seja, não existe, logo é descontínua; e d) não explicou.*	4

Categoria	**Análises da Tarefa-09**	**D-Quanti**
Compreender o problema	Faz a leitura, destaca as funções e as variáveis. Determina parcialmente as condições, pois não compreende totalmente o problema e não se atentou para o intervalo dado, por isso interpretou erroneamente a forma de encontrar o resultado. Define parcialmente o objetivo, pois fez somente a aplicação inicial do modelo, ou seja, não atribuiu valores suficiente para a variável para solucionar corretamente o problema.	2
Construir o modelo matemático	Determina parcialmente o modelo, destacou somente as incógnitas e não atribuiu valores para as variáveis, para obter dados substanciáveis. Não determina, pois não atribuiu valores para variáveis. Constrói parcialmente, pois o modelo encontrado pelo aluno é insuficiente para encontrar o resultado. A análise do aluno está incorreta.	**2**

Solucionar o modelo matemático	O método encontrado pelo estudante está incorreto. Soluciona parcialmente o modelo, pois o resultado está incorreto.	2
Interpretar a solução	Extrai parcialmente o resultado, faltando considerar o intervalo. Não responde corretamente o objetivo. De acordo com a interpretação do aluno: "*O limite é 80 e está tendendo por valores negativos"*, o que não está correto. *"E o limite do denominador está tendendo a zero por valores negativos"*. Continuando ainda *"o custo percentual de remoção do lixo tóxico, próximo dos 100%, está indo pra mais infinito e não está definido"*. A resposta está incorreta porque o limite neste caso é 80%.	**2**

O estudante E_2, na Tarefa-08, resolveu as três primeiras ações totalmente consciente, demonstrando ter compreendido o objetivo, elaborou o modelo para encontrar a solução com base nos conceitos de continuidade de uma função, elaborou os gráficos das quatro questões. Apenas na última questão, apesar de ter solucionado, não determinou se a função era descontínua.

Na Tarefa-09, o estudante, realizou todas as ações completamente consciente, desde a compreensão do objetivo do problema, a elaboração do modelo com base no conceito de limites infinitos, solucionou algebricamente e explicou a resposta. Os dados da Tabela 14 demonstram a síntese qualitativa do desempenho das ações por indicadores quantitativos:

Tabela 14: Síntese do Desempenho do Estudante E2 na Fase Final

T	1ª E	2ª E	3ª E	4ª E	Contexto Essencial do Problema
nº 8	5	5	5	4	Solucionar o problema fazendo uso da definição de continuidade de funções.
nº 9	2	2	2	2	Analisar o custo para remoção dos resíduos tóxicos, a partir da compreensão do conceito de limites infinitos.

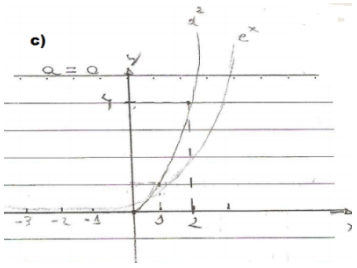
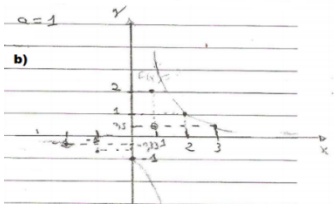
Legenda: (T) Tarefa; (1ªE) compreensão do problema; (2ªE) estabelecimento de um plano; (3ªE) execução do plano; (4ªE) revisão da solução.

Fonte: Santos, 2014.

O estudante E_3, assim como o estudante E_2, resolveu a Tarefa-08 de forma consciente, contudo, demonstrou baixo grau de assimilação na Tarefa -09. Segue a descrição das ações detalhadas nas questões pelo estudante.

Estudante E_3: Resultado das Características das Ações no problema resolvido

Categoria	Análises da Tarefa-08	D-Quanti

Compreender o problema	O aluno faz a leitura das funções do problema, descreve os elementos. Determina as condições ao descrever o modelo algébrico e geométrico para a resolução do problema. Define o objetivo de cada função destaca a maneira de solução.	5
Construir o modelo matemático	Determina as variáveis das funções$x$ e $P(x)$. Nomeia as variáveis e atribui corretamente os valores na tabela. Constrói o modelo algébrico (tabelas) e geométrico (gráfico). Faz análises das unidades e relaciona com a forma de resolução do problema.	5
Solucionar o modelo matemático	Utiliza o método de resolução da função limite. Soluciona o modelo atribuindo valores a variável x para encontrar as coordenadas: a) $(-2, 1{,}39), (-1, 1{,}09), (0, 0{,}69), (1{,}0), (3{,}0)$; b) $(-2, 0{,}33), (-1, -0{,}5), (0, -1), (2{,}1), (3, 0{,}5)$; c) $(-1, 1/2), (-2, (1/2)\text{^}2), (3, (1/3)\text{^}2)$; d)$(-2, 2), (-3, 1{,}5), (0{,}0), (2, 0{,}11), (3, 0{,}2)$. Posteriormente constrói os gráficos de cada uma das funções.	5
Interpretar a solução	**Interpretar a Solução:** Extrai os elementos significativos relacionados com o problema. Responde através do modelo algébrico e demonstração geométrica todas as funções limite. Ao final o aluno faz uma breve descrição sobre a interpretação dos resultados: *a) a função é descontínua e não está definida no ponto a=2, pois não existe ln de 0; b) a função é descontínua e não está definida no 1º caso, no segundo caso ela está definida no ponto, apesar de se tratar de F(x) =2; c) Na primeira função será descontínua no ponto a = 0, pois está definido qualquer número elevado a zero é igual a 1. No segundo caso está definido e não há descontinuidade*.   	5

Categoria	Análises da Tarefa-09	D-Quanti
Compreender o problema	Extrai parcialmente, pois não considera o intervalo dado. Como também determina parcialmente as condições e o objetivo, pois não fez todas as relações.	2
Construir o modelo	Determina parcialmente as variáveis, pois desconsidera os valores do intervalo dado no problema. Constrói o modelo	2

matemático	de maneira insuficiente para resolver o problema, tornando-se inviável realizar análise, que a fez de modo incorreta.	
Solucionar o modelo matemático	Encontra parcialmente o método, pois não avalia o intervalo a ser usado. Logo, soluciona o modelo incorretamente.	2
Interpretar a solução	Não extrai todos os resultados significativos e relativos ao problema. A reposta dada está incorreta. O estudante descreve que *"o limite da função quando x tende a 100 pela esquerda, os limites laterais serão diferentes",* ou seja, a resposta descrita está incorreta.	1

A partir desses dados, conclui-se que o estudante E_3 na Tarefa-08, realizou todas as ações de maneira totalmente consciente, fez a leitura das funções, descreveu os elementos, determinou as condições ao descrever o modelo algébrico e geométrico para a resolução das questões, demonstrou a descontinuidade das funções, distinguiu os níveis de separação das propriedades essenciais, mantendo maior dissociabilidade dos casos particulares, ao aplicar os conceitos observamos que o estudante realizou as ações de maneira consciente.

Na Tarefa-09 o estudante E_3, desenvolveu as três primeiras ações parcialmente corretas, fez a interpretação e elaborou o modelo, no entanto, no momento da aplicação dos dados, não determinou a resposta sobre o percentual obtido para a retirada dos resíduos tóxicos. Deste modo, não extraiu completamente os resultados significativos em relação ao problema.

Os dados da Tabela 15 demonstra a síntese qualitativa do desempenho das ações do estudante:

Tabela 15: Síntese do Desempenho do Estudante E3 na Fase Final

t	1ª E	2ª E	3ª E	4ª E	Contexto Essencial do Problema
nº 8	5	5	5	5	Solucionar o problema fazendo uso da definição de continuidade de funções.
nº 9	2	2	2	1	Analisar o custo para remoção dos resíduos tóxicos, a partir da compreensão do conceito de limites infinitos.

Legenda: (T) Tarefa; (1ªE) compreensão do problema; (2ªE) estabelecimento de um plano; (3ªE) execução do plano; (4ªE) revisão da solução.

Fonte: Santos, 2014.

Os resultados dos estudantes E_2 e E_3 na Tarefa-09 podem ser explicados porque o conceitos de limite no Infinito tem um número maior de características que os conceitos

aplicados na Tarefa-08. Fica claro que a separação e a comparação mental de um grande número de características é mais difícil de ser verbalizado, nesse caso, a etapa verbal foi expressa por escrito.

Os resultados detalhados das características das ações na resolução das Tarefas na fase final do estudante E_5 estão apresentados a seguir:

Estudante E_5: Resultado das Características das Ações no problema resolvido

Categoria	Análises da Tarefa-08	D-Quanti
Compreender o problema	Extrai os elementos das funções. Determina parcialmente. Define parcialmente os objetivos das questões, calculando corretamente o limite e duas funções, sendo que outras duas os resultados estão incompletos.	3
Construir o modelo matemático	Determina as variáveis de todas as funções dadas. Nomeia e constrói os modelos parcialmente corretos, pois faltou mais atenção na exploração dos valores próximo dos pontos de descontinuidades.	3
Solucionar o modelo matemático	Encontra o método correto para calcular as duas funções, porém para resolver as outras duas os modelos estavam incorretos. Portanto, solucionou parcialmente os modelos de forma algébrica (tabelas) e geométrica (gráficos).	3
Interpretar a solução	Extraiu parcialmente os resultados do problema, porque responde corretamente duas funções de quatro. Sendo que as demais, ele resolve incorretamente e não consegue explicar, devido não ter compreendido completamente o problema. As descrições do aluno sobre cada uma das funções: a) há uma descontinuidade por não haver uma imagem para x-2; c) a solução é descontínua no ponto a=1, porque não está definida neste ponto, ou seja, não existe imagem esse número; questões b) e d) o aluno não respondeu.	3

Categoria	Análises da Tarefa-09	D-Quanti
Compreender o problema	Faz a leitura, mas extrai parcialmente os elementos. Determina também parcialmente as condições, não faz relação com os valores do intervalo. Define parcialmente o objetivo, pois não considera todos os elementos para resolver o problema.	2

Construir o modelo matemático	Determina parcialmente as variáveis, pois desconsidera o intervalo dado. Nomeia as variáveis, mas não relaciona com o intervalo estipulado no problema. O aluno constrói parcialmente o modelo, apesar de organizar os dados em forma de tabela, o aluno não atribui corretamente as variáveis, o que é fundamental observar para resolver o problema no intervalo dado.	2
Solucionar o modelo matemático	Encontra o método de aplicação algébrica composta em tabela e faz uma tentativa de esboçar o gráfico. Soluciona o modelo de modo incompleto, pois, atribui variáveis incorretas para encontrar o resultado.	2
Interpretar a solução	Os elementos extraídos são insuficientes para atender o objetivo do problema. A resposta dada pelo estudante é incompleta. Não elaborou a justificativa de interpretação.	1

O estudante E_5 na Tarefa-08, extraiu os elementos das funções, determinou parcialmente os objetivos das questões, calculando corretamente o limite de duas funções, sendo que as outras duas, os resultados apresentaram-se incompletos. Determinou as variáveis de todas as funções dadas. Nomeou e construiu os modelos parcialmente corretos, pois faltou mais atenção na exploração dos valores próximo dos pontos das descontinuidades. Encontrou o método correto para calcular duas funções, porém para resolver as outras duas os modelos estavam incorretos. Portanto, solucionou parcialmente os modelos de forma algébrica (tabelas) e geométrica (gráficos). Desse modo, extraiu parcialmente os resultados do problema, por ter respondido corretamente duas funções das quatro propostas. Sendo que as demais o estudante resolveu incorretamente e não conseguiu esboçar explicação descritiva.

O estudante resolveu a Tarefa-09 com todas as ações incompletas, ou seja, razoavelmente consciente, apesar de fazer a leitura, não extraiu todos os elementos. Determinou também parcialmente as condições e não fez nenhuma relação com os valores do intervalo. Portanto, definiu parcialmente o objetivo, pois não considerou todos os elementos envolvidos para resolver o problema. Do mesmo modo construiu parcialmente o modelo, apesar de organizar os dados em forma de tabela, não atribuiu corretamente os valores a variável X, o que seria fundamental para resolver o problema no intervalo dado. Encontrou o método de aplicação algébrica composta em tabela e fez uma tentativa de esboçar o gráfico.

A Tabela 16 demonstra a síntese qualitativa do desempenho das ações por indicadores quantitativos, dadas as análises, observamos baixo desempenho na realização das ações dos dois problemas do teste, logo, concluimos que este estudante ainda não atingiu um nível ideal de condições de assimilação das ideias conceituais de limite:

Tabela 16: Síntese do Desempenho do Estudante E5 na Fase Final

T	1ª E	2ª E	3ª E	4ª E	Contexto essencial do problema
nº 8	3	3	3	3	Solucionar o problema fazendo uso da definição de continuidade de funções.
nº 9	2	2	2	1	Analisar o custo para remoção dos resíduos tóxicos, a partir da compreensão do conceito de limites infinitos.

Legenda: (T) Tarefa; (1ªE) compreensão do problema; (2ªE) estabelecimento de um plano; (3ªE) execução do plano; (4ªE) revisão da solução.

Fonte: Santos, 2015.

Essess resultados identificam que os estudantes dão indícios de sua compreensão dos conceitos trabalhados, no entanto, não pode-se garantir com isso que houve aprendizagem, mas sim, que os estudantes foram capazes de colocar em prática as orientações oferecidas pela BOA para organizar o ensino e garante com isso que a ação realizada pode ser classificada como consciente e racional (REZENDE E VALDES, 2006). Em síntese, após a análise do desempenho dos estudantes nessa fase, em particular pelos dados da Tarefa-09, observamos que quando há dificuldade na etapa verbal (ou na explicação das respostas pelo aluno), dificulta o processo de abstração em relação as propriedades essencias, sem a qual o ação não pode transformar-se na forma conceitual.

Para melhor esclarecer a questão psicológica, apresentamos a seguir as análises sob o ponto de vista da teoria de Galperin, destacando a descrição de cada etapa.

5.1.4 Análises por Etapas de Formação das ações Mentais segundo Galperin

Galperin (1992, p. 61) destaca que não é a qualidade "estágio a estágio" a única que determina o "[...] o curso e os resultados da formação das novas ações e conceitos [..]", para ele o que determina é o conjunto de condições dadas no processo com um todo, pela forma em que se planeja para ter como resultado as ações mentais. O autor alerta que:

> A existência de tal sistema, isto é, um sistema completo e sequencialmente compreendido, permite-nos estabelecer relações não ambíguas dentro de certas condições, a orientaçãoo do sujeito dentro dessas condições, suas ações, e os resultados dessas ações – as relações causais entre todos os elementos (GALPERIN, 1992, p. 61).

A partir dessa compreesão, passamos a caracterizar o processo de formação por etapas das ações mentais. As análises por meio das etapas estão classificadas na ordem progressiva da própria disposição teórica.

5.1.4.1 Etapa Motivacional

A primeira etapa se refere ao processo de motivação dos estudantes, esse processo pode ser realizado por meio de investidas à busca de significados sobre o conceito a ser estudado, o uso de problemas por parte do professor pode ser uma boa estratégia na concretização dessa etapa. Essa etapa também é importante estar presente no início de todo processo de ensino e a motivação das aulas reside no fato de que o estudante necessita de uma predisposição para o estudo a que será submetido. Nessa pesquisa, esta etapa foi considerada o ponto de partida, o momento de fazer uma análise dos conhecimentos prévios dos estudantes e se efetivou por meio da resolução de problemas do cotidiano.

Originalmente Galperin não discutiu com detalhes o papel da motivação dentro dos processos de assimilação da sua teoria, contudo, Talízina (1988) esclarece que:

> Nos últimos anos Galperin indica a necessidade de introduzir uma etapa a mais, onde a tarefa principal consiste na criação de uma motivacão necessária ao aluno. Independentemente se a solução da tarefa dada constitue ou não uma etapa independente, deve estar assegurada a existência de motivos necessários para qaue os alunos, adotem a tarefa de estudo e cumpram a atividade que lhes é adequada. Se isto não ocorre é impossível a formação da ação e os conhecimentos que lhes envolvem (TALÍZINA, 1988, p. 108).

A autora ainda complementa, "[…] na prática de ensino é bem sabido que se o aluno não quer estudar, é impossível ensinar-lhe" (TALÍZINA, 1988, p. 108). Galperin (1982; 1986) explica a importância da orientação no processo como o todo, a qual não pode se restringir ao momento inicial da atividade, mas sim ocorrer durante todo o processo de desenvolvimento da mesma. Essa orientação no momento inicial corresponde ao estágio motivacional, que conforme Talízina (1988); Galperin(1989) e Núñez (2009), esse estágio é chamado por Talízina como etapa zero, uma vez que, nessa etapa, ainda não foi dada início à parte executora da ação. Segundo os autores, essa etapa objetiva preparar os estudantes para a

quisição de novos conhecimento, deixá-los predispostos a aprender e compreender o sentido de estar diante de novos conhecimentos.

Bassan (2012) adverte que nessa etapa o professor pode fazer questionamentos acerca do que será estudado, tais como: "O que vamos fazer? Para que vamos fazer? Por que vamos fazer desta maneira? Existe uma maneira melhor de fazê-lo?" (BASSAN, 2012, p. 65). A autora assegura que por meio dessas perguntas o professor pode identificar as necessidades dos estudantes e com isso consegue inseri-los na situação de aprendizagem. Para ela, mediante a identificação da necessidade, surgem os motivos, os quais "[…] impulsionam a entrar em atividade e assim apropriar-se dos conhecimentos" (BASSAN, 2012, p. 66).

Na unidade I dessa pesquisa, a qual trata da compreesão do conceito de Limite de Função, a etapa motivacional correspondeu ao estudo das Tarefas da fase diagnóstico (Tarefas 01, 02 e 03). Foram três situações problemas que tinham como objetivo avaliar a compreensão dos estudantes sobre o conceito de Função. Núñez (2009) assegura que o ensino baseado em situações problemas mostra-se como uma possibilidade eficiente para a motivação da aprendizagem, cujas tarefas convertem-se em um problema cognitivo a fim de satisfazer os seguintes requisitos: apresentar uma dificuldade cognoscitiva para os alunos que exige reflexão sobre o problema objeto de estudo; despertar o interesse cognoscitivo do aluno; apoiar-se nas experiências anteriores e no conhecimento dos alunos.

A síntese do desempenho dos estudantes nessa etapa está apresentada na Tabela 17, a média foi obtida a partir das notas nas etapas de: compreensão do problema; estabelecimento de um planejamento; execução do plano e revisão da solução.

Tabela 17: Média do desempenho por estudante nas Tarefas 1, 2 e 3

Estudantes/Tarefas	**Médias**				
	E_1	**E_2**	**E_3**	**E_4**	**E_5**
Tarefas-01	4,75	4,75	4,25	4,5	4,75
Tarefas -02	5	5	2	1	2,25
Tarefas -03	5	4,75	1	1	1
Média geral por estudante	4,92	4,83	2,42	2,17	2,67

Fonte: Dados da Pesquisa.

Durante a execução dessas tarefas, observamos por parte dos estudantes 03, 04 e 05 dificuldades na compreensão das atividades 02 e 03. A nossa intenção com essas atividades

foi apresentar situações problemas de fácil entendimento, mas que contribuíssem para para facilitar a aprendizagem do conceito de limite de função e despertar no estudante a necessidade de aprender. Portanto, o ponto de partida foram questões relacionadas ao conhecimento dos estudantes em relação à questões de aplicação de função. A discussão dessas questões foram necessárias para dá prosseguimento às próximas etapas e suscitar nos estudantes melhor compreensão do objeto de estudo. Essa discussão foi fundamental, pois durante o processo de correção das atividades houve a participação e o engajamento de todos os estudantes, que embora alguns apresentassem dificuldades, mostravam-se motivados e participativos.

5.1.4.2 Base Orientadora da Ação: A influência da Orientação nas Aulas Práticas

A Base Orientadora da Ação (BOA), segundo Nuñes (2009), constitui o modelo da atividade que se pretende realizar e deve contemplar todas as fases estruturais e funcionais da atividade, ou seja, orientação, execução e controle. De certo modo, nesta pesquisa, essa etapa se deu por meio da participação dos estudantes, no decorrer do processo de elaboração havia momentos em que os mesmos com seus questionamentos davam subsídios para elaboração, organização e reorganização do processo de ensino. Nessa etapa, assinala Talízina (1988, p. 109), "[...] os alunos recebem as explicações necessárias sobre o objetivo de cada ação, seu objeto, o sistema de ponto de referência. É a etapa do conhecimento prévio da ação e as condições de seu cumprimento: a etapa da elaboração do esquema da BOA".

É importante salientar que essa etapa está relacionada com as etapas: compreender o problema e estabelecer um plano, descritas nas *"Etapas de orientação das Tarefas de Compreesão Conceitual"* discutidas no Capítulo III. Esta etapa, segundo Talízina (1988), é uma das mais importantes no processo de formação da ação. Ao professor cabe oferecer um conjunto de procedimentos (métodos) que possibilita o aluno construir de forma independente a Base Orientadora da Ação. Essa orientação se dá a partir de um conjunto de tarefas que norteia o aluno na resolução do problema.

Destacamos a influência da BOA III na direção das aulas práticas, como ponto de partida para o início da assimilação dos conceitos programados. Neste aspecto, as ações materializadas foram formalizadas inicialmente pelos conceitos básicos de funções, progredindo para aplicação em funções reais de uma variável. É um momento de reflexão e discussão enquanto a atividade se realiza. Talízina, (1988, p. 110), adverte que "[...] nesta etapa não deve haver grande número de tarefas de um só tipo, já que neste caso a ação se reduzirá e automatizará".

O fragmento transcrito no Quadro 9 refere-se a um episódio que mostra como ocorreu a introdução das ideias conceituais de limite na primeira aula prática deste contexto. O caráter diretivo da professora/pesquisadora no que se refere a induzir o estudante a fazer conexões conceituais para a compreensão do conceito de limite é o ponto chave da Base Orientadora da Ação.

QUADRO 9: Transcrição da aula - Problema da Tangente

Aula: 07 **Data**: 01/04/2013 **Assunto**: **O problema da tangente** (JAMES STEWART, p.87) Procedimentos: demonstração da resolução do problema com base nas etapas das *Atividades de Compreesão Conceitual* **Obs**: a partir dos problemas anteriores os estudantes estavam mais perceptíveis as perguntas da professora, e iniciavam um processo de resposta consciente. **Legenda**: P: professora R: repostas. ?: atenção.	**O problema da tangente** P: o que o problema pede? R1: *a equação da reta*. P: *Qual é a equação da reta tangente na curva y = x² [nesta equação]?* ?: *momento de silêncio*. Ao realizar o esquema do problema a professora questionou novamente: P: *o que é preciso para determinar a equação da reta?* R1 *(dois alunos): dois pontos ou um ponto e o coeficiente angular*. P: *Como se descreve a equação geral da reta?* R1: *(dois alunos): y – y0 =m (x – x0).* P: *quais as coordenadas de P?* ?; *Não foi possível processar a resposta.* P: *O que acontece com o coeficiente angular?* R1: *se aproxima de 2;* R2: *vai ser um valor próximo de 2.* Novamente a professora retornou a perguntar: P: *qual é a equação dessa reta?* R1: *y= 2x – 1 (equação da reta).* P: *Como podemos identificar o limite neste problema?* R1: *é a inclinação da reta tangente.*

Nosso interesse de pesquisa, nos leva a encontrar um momento significativo dentro do referencial para análise, diante das respostas, dos estudantes. Desse modo, observamos que dois estudantes, pela maneira de responder e questionar, demonstraram iniciar naquele momento um processo de organização das ideias conceituais quanto à equação da reta. Os demais possivelmente também tenham os mesmos discernimentos, no entanto, não se

manifestaram, logo, não foi possível concluir essa dedução sobre todos os estudantes analisados.

Desenvolvendo o modelo do problema foi encontrada a equação da reta com a demonstração dos cálculos pela professora/pesquisadora. Desta forma, concluíram que o limite no contexto do problema, seria dado conforme o modelo matemático de limite de PQ (quando P se aproxima de Q):

$$\lim_{p \to q} m_{pq} = m$$

A condição inicial foi determinar o sistema conceitual no qual se insere o conceito de limite de Função. Ao se colocarem em atividade de estudo, os estudantes desenvolveram tarefas particulares e peculiares ao conceito de Limite direcionados pelas etapas descritas na Tarefa de Compreensão Conceitual.

Assim, percebemos que a Base Orientadora da Ação tem um caráter diretivo para a compreensão dos conceitos. Não pretende-se constituir como um quadro de respostas, em que podem pensar alguns professores ou como mero 'facilitador' da vida dos alunos que apresentam mais dificuldades sobre a resolução de problemas, a base constitui uma condição essencial para a execução correta da ação e a internalização da atividade de aprendizagem (SANTOS, 2011).

Nessa etapa, o professor deve centrar mais atenção na execução das ações dos alunos e na construção e compreensãoo por eles dos conhecimentos da base orientadora da ação. É uma etapa de preparação para a formação-executora da habilidade de forma compreensiva. Apenas após se ter uma boa orientação do como fzer, passa-se à etapa do fazer de forma material ou materializada (NÚÑEZ, 2009).

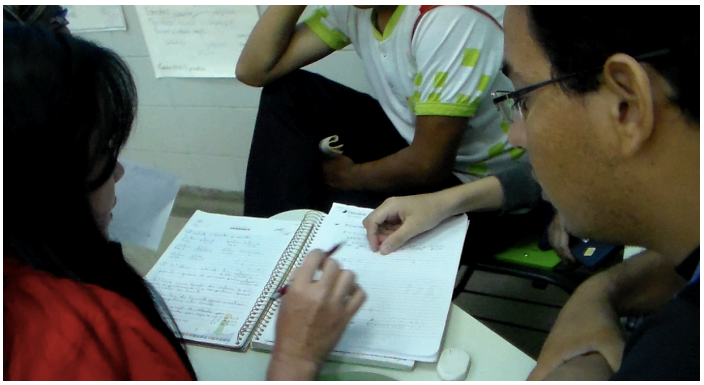
5.1.4.3 Formação da Ação Material ou Materializada nas Atividades Práticas

No ensino de limite de funções, as ações trabalhadas de modo detalhado se mostrou como um ponto relevante. As *Tarefas de Compreesão Conceitual* foram solucionadas pelos estudantes e controlada pela professora/pesquisadora, posteriormente utilizadas para análise dos dados. O procedimento passo a passo, proporcionaram maior visibilidade dos conceitos relacionados, bem como as discussões promoveram momentos de reflexão para os próprios alunos, quanto a importância da disciplina de Cálculo, antes observada como algo muito distante da realidade vivenciada. Os problemas foram trabalhados visando promover de certa

forma, maior sociabilidade com aplicação matemática no cálculo, anteriormente, conhecida como pura e abstrata, na concepção dos estudantes.

Nuñez e Pacheco (1998), salientam que nessa etapa a ação começa a ser realizada. No entanto, ainda no plano externo, de modo detalhado, onde os estudantes realizam todas as operações que fazem parte da ação. O estudante executa a ação e o professor controla o cumprimento de cada uma das operações. A execução da tarefa realiza-se num trabalho com pares ou em grupos. Assim, ocorreu o desenvolvimento das aulas durante toda a intervenção, os estudantes se debruçavam sobre os problemas indicados, buscando solução com discussão em grupos e sob a orientação da professora/pesquisadora.

Figura 1: Estudantes nas atividades da Etapa Material



Destacamos a importância da interação entre estudantes e da própria professora nesse processo, que de forma natural auxilia para assimilação dos conteúdos pelos estudantes, tendo em vista que apenas as aulas expositivas não são suficientes, as aulas práticas com resolução das atividades, causam mais acessibilidade de questionamentos, pois a professora tem a possibilidade de estar mais próxima nesse acompanhamento. O fragmento transcrito a seguir refere-se a um episódio que mostra como ocorreu a aula da definição precisa de limite, após os trabalhos com o conceito na forma intuitiva:

QUADRO 10: Transcrição da aula - Definição precisa de Limite

Diálogo da professora/pesquisadora com os alunos	**Ações e tempo do vídeo**
A demonstração da definição precisa de limite: 01:25’’ P: *iremos apresentar agora uma forma mais precisa de encontrar os limites, pois as formas anteriormente trabalhadas são inadequadas para solucionar problemas de maneira geral do conteúdo de limite*.	Passados 02:06’’ Os alunos permaneceram atentos[...] sem esboçar

P: *como calcular o limite de uma função de maneira mais precisa?* A professora argumentou sobre a maneira de calcular precisamente o limite de uma função sem o apoio dos modelos das tabelas para visualizar a aproximação dos valores A demonstração gráfica da função: 02:55'' P: *a aproximação máxima dos valores de x ao ponto, apresenta uma diferença mínima, tanto pela direita quando pela esquerda, mas essa diferença é tão pequena que apenas com os números não seria possível representar o valor mais próximo, logo, apresenta-se os conceitos delta e épsilon*. Questionamentos: P: *qual o objetivo desse problema?*	questionamento. Passados 02:47'' quatro alunos permaneceram atentos[...] ainda sem esboçar questionamentos, dois acompanhavam e anotavam no caderno. Desses dois alunos dialogavam entre si, provavelmente quanto a exposição da professora, e apenas um deles estava desatento a aula. Passados 08:39'' os alunos permaneceram atentos[...] ainda sem esboçar questionamentos, mas pararam de fazer anotações, e quando ouviram da professora o termo delta e épsilon demonstraram atenção mais aguçada. Nesse momento, apenas um deles estava desatento a aula. 10:40'' os alunos não responderam ao questionamento, da professora, demonstraram no momento uma expressão facial pensativa. Um dos alunos fez menção de resposta, mas desistiu.

	Legenda: P: professora **Aula**: 18/04/2013

Fonte: Santos (2015)

Observamos que, nesta aula os estudantes expressaram um maior grau de dificuldade no entendimento, isso foi perceptível. Os mesmos esboçaram em suas faces uma ligeira tensão, pois fitavam atentamente a visão para a exposição da professora, nem mesmo, faziam anotações simultâneas. Percebemos então, que para os estudantes presentes na aula, aquela informação encontrava-se em estágio de ideia ou conceito totalmente novo no momento.

Pensando nessa dificuldade, a demonstração da definição precisa de limite foi feita com o apoio de gráficos e outros elementos para não tirar o foco dos estudante do objetivo principal da aula. Nesse momento, o estudante ainda não apresenta condições de realizar as tarefas num plano mental e nem tão pouco conseguem verbalizar. Como assinala Talízina, "Permite aos alunos assimilar o conteúdo da ação, e ao professor, realizar um controle objetivo do cumprimento de cada uma das operações que formam parte da ação" (TALÍZINA, 1988, p. 110).

Nesta etapa a ação é assimilada no plano material ou materializado, de forma desdobrada e não generalizada, é executada de forma consciente e facilita a preparação do estudante para iniciar a ação que o conduz a etapa seguinte, ou seja, a etapa verbal. É importante salientar que essa etapa, a verbal e a etapa da linguagem externa para si, fazem correspondências com a etapa de Polya: executação do plano, na orientação das *Atividades de Compreensão Conceitual.*

5.1.4.4 Formação da Ação Verbal Externa

A etapa da ação verbal externa foi observada durante o desenvolvimento das atividades na fase formativa e mediadora do processo. As percepções foram destacadas pelas descrições verbais dos estudantes baseado na explicação dos mesmos, quanto as tarefas solucionadas (T-04 e T-05). Oliveira (2011, p. 229), esclarece que, "As tarefas trabalhadas nesse momento são semelhantes às tarefas da etapa material ou materializada, estruturadas a partir das possibilidades que oferece a linguagem escrita e oral". Dessa forma, optamos por análise nestas questões, pelo fato destes problemas disponibilizarem argumentos descritivos para que os estudantes fizessem interpretação das soluções.

TAREFA 4: Encontre uma equação da reta tangente à parábola $y = x^2$, no ponto P(1,1).

TAREFA 05: Suponha que uma bola é solta a partir do ponto de observação no alto da torre CN em Toronto, 450 m acima do solo. Encontre a velocidade da bola, após 5 segundos.

Na realização dessas tarefas, o Estudante E_1 não esteve presente, motivo pelo qual não estão apresentados seus resultados nessa etapa da pesquisa. O estudante E_2 solucionou a Tarefa-04 de maneira pouco consciente, apenas usando a forma descritiva conceitual de Tangente. No entanto, esta resposta foi insuficiente para responder completamente o problema, pois essa informação não é uma condição, porém é necessário conhecer, pois esse problema previa a elaboração de um modelo algébrico e uma demonstração geométrica da equação de duas retas à uma curva, que foi basicamente imperceptível pelo estudante.

Portanto, as assimilações das ações foram pouco conscientes para resolver o problema, o estudante não buscou condições essenciais sobre a equação da reta, a definição do coeficiente angular, entre outros conceitos envolvidos, o que demonstrou uma dificuldade de separar e identificar as propriedades essenciais da função, embora soubesse realizar os cálculos.

Do mesmo modo, o estudante resolveu a Tarefa-05 pouco consciente, ou seja, com ações incompletas. Deduz-se que o estudante não compreendeu o objetivo do problema, por apresentar aplicação em um contexto diferente, logo, identificou que havia elementos desconhecidos, portanto, encontrou dificuldade de interpretar e consequentemente explicar os procedimentos matemáticos, então, as ações tornaram-se mais complexas de serem assimiladas por este estudante.

Talízina (2001a), defende que a assimilação de uma atividade e os conhecimentos que nela estão envolvidos só podem ser exitosos quando o aluno passa gradualmente por todas as etapas do processo de assimilação. Partindo dessa premissa, deduzimos a partir do desempenho do estudante E_2, que este não atingiu todas as etapas desse processo.

O estudante E_3 resolveu a Tarefa-04 em nível consciente, mas, a forma materializada não estava bem desenvolvida, do mesmo modo, a forma perceptiva verbal, ainda não estavam suficientemente conscientes para expressar os elementos estruturais da definição intuitiva de limite de uma função.

Desse modo, sua descrição explicativa foi identificada como pouco consciente, não atende completamente a solução do problema, e foi insuficiente para realizar análise da compreensão, fazer relações com os conceitos e interpretação da solução:

> [...] *para encontrar a solução é necessário montar o gráfico da tabela dada. Como o ponto P já é conhecido traça-se uma curva tangenciando o ponto P, que na sua extremidade passa o ponto R, através destes dois pontos podemos chegar ao coeficiente angular, que é a solução do problema* (E_3, etapa 4, T-04).

Na Tarefa-05, o estudante resolveu de forma consciente, demonstrou melhor compreensão ao fazer a leitura completa e destacou as variáveis (distância e tempo), porém não determinou a forma algébrica, sendo essa a condição do problema, não elaborou o modelo, tentou explicar apoiado em fatos conceituais, descrição pertinente, mas não demonstrou algebricamente, afirmando:

> *O problema envolve duas variáveis: distância e tempo. Através do gráfico, podemos visualizar duas velocidades, a velocidade média e a velocidade instantânea. A reta tangente, fornece a velocidade instantânea e a reta secante a velocidade média. Podemos calcular a importância dos limites para determinar a solução de problemas que envolve velocidade e distância* (E_3, etapa 4, T-05).

Deduzimos que, o estudante não compreendeu o objetivo geral da atividade, não buscou identificar os conceitos relacionados já estudados e nem tão pouco os novos conceitos inseridos no problema, ficando apenas na interpretação do modelo. Portanto, na sua ação verbal externa, não esboçou total compreensão do mesmo.

Galperin (2001c), explica que nessa etapa, produzem-se três mudanças essenciais: a primeira é que a ação verbal estrutura-se não apenas como um reflexo real da ação realizada com o objeto, mas, também, como uma comunicação dessa ação, subordinada às exigências da compreensão do sentido específico que deve ter para as outras pessoas, consequentemente como um fenômeno da consciência social. A segunda é que o conceito passa a se constituir a base da ação, eliminando as limitações da ação com as coisas. "[...] a ação que se reflete na linguagem e adquire uma nova natureza, em virtude disto adquire novas possibilidades." (GALPERIN, 2001c, p.50). Na terceira, a ação no plano verbal apresenta-se como uma realidade material nova e estável.

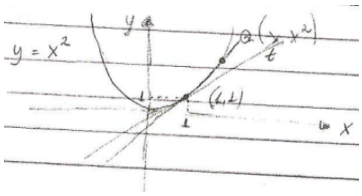
Com relação as atividades dessa etapa, o estudante E_5 revolveu a Tarefa-04 de modo totalmente consciente, extraiu todos os elementos relativos ao problema, elaborando aplicações ao modelo. Respondeu ao problema de forma explicativa, como se esperava de um resultado satisfatório, fazendo demonstração algébrica e geométrica, de acordo com a sua descrição:

> *De acordo com o problema apresentado, para encontrar uma reta t tangente à parábola, usaremos os mesmos princípios da explicação dada, onde encontrando o coeficiente angular, podemos achar a equação da reta, mas temos um problema:* $Y - Y0 = M(X - X0)$*, ou seja, só temos um ponto, e precisamos de dois pontos para encontrar o coeficiente angular m no ponto (1,1)* (E_5, etapa 4, T-04).

Esboçou um gráfico com identificação dos pontos e traçou as retas secante e tangente à direita da parábola com concavidade para cima. E continua a descrição:

> [...] *daí colocamos um ponto na parábola próximo para calcular assim o valor do coeficiente da reta secante, no caso a reta* PQ, $m_{PQ} = (x^2 - 1)/(X - 1)$. *Assim dada a fórmula para achar um ponto qualquer, ou seja, quanto mais próximo o ponto Q estiver de P, mais próximo x estará de 1* (E_5, etapa 4, T-04).

Figura 2: Gráfico do problema da Tangente construído pelo estudante E_5.



De acordo com esta descrição, conclui-se que o estudante demonstrou na forma verbal a maneira correta de descrever o problema e no modo de solucionar, usando inclusive o modelo algébrico. Demonstrou a relação algébrica por meio da equação do coeficiente angular, fez o gráfico das equações das retas, como também realizou a descrição da ação. Este estudante demonstra conhecimento em aplicar o conceito estudado, bem como relacionar os conceitos, logo, sua forma de assimilação das ações neste problema é totalmente consciente.

Conforme Núñez (2009), o grau de consciência se forma por duas vias. A primeira, se dá por meio de proposição de tarefas que exijam do aluno a tomada de consciência da lógica da estrutura da atividade em que realiza, proponha a solução de tarefas que levam à reflexão, à argumentação e explicação, como também, à reflexão consciente sobre os modos de resolução das tarefas. A segunda, por meio de tarefas que induzam os alunos a explicar ou argumentar em voz alta ou, e de forma escrita, as ações que desenvolvem. Isso exige que se trabalhe a compreensão da lógica das ações externas com sua composição e sequência operacional. Como foi proposto nas atividades em análise, os estudantes além de solucionar o problema, deveriam explicar e refletir sobre a sua solução.

Na Tarefa-05 resolveu em nível razoavelmente consciente, as três primeiras ações foram realizadas incompletas, e a ação essencial parcialmente correta. A complexidade do problema, exigiu conhecimento sobre a Lei do corpo em movimento de Galileu, talvez esse

elemento tenha sido desconhecido para o estudante, motivo pelo qual não elaborou o modelo. Daí por diante não conseguiu mais realizar a tarefa. Tentou explicar, mas seus argumentos não foram fundamentados com elementos na forma algébrica, embora tenha esboçado compreender a maneira de solucionar:

> *Nesse problema, o autor quer saber a velocidade de uma bola após 5 segundos, sendo ela solta a partir de um ponto de observação no alto da Torre CN em Toronto, cerca de 450 metros acima do solo. Como na explicação e na resolução dos problemas anteriores de velocidade, o primeiro passo é calcular a velocidade média no intervalo de tempo, temos um único instante de tempo neste caso, (t=5), porém podemos aproximar a uma velocidade média, acima do instante de tempo que é dado, t=5 até o instante t=5,1, como foi feito no problema* (E_5, etapa 4, T-05).

Observa-se que o estudante apresentou avanço na forma de compreensão, mais ainda encontrava-se razoavelmente consciente em relação a aplicação do novo conceito. Talízina (1988), apoiada nos conceitos deixados por Galperin (1957), assinala que esta etapa, a fala começa a cumprir uma nova função, na primeira e na segunda etapa esta servia principalmente de sistema de indicações que se descobriam diretamente na percepção, a tarefa do estudante não consistia em compreender as palavras, mas sim de entender os fenômenos. Ao passo que nessa etapa a fala se converte em portadora independente de todo o processo.

A etapa verbal externa demonstrou aspectos descritivos dos alunos com relação as ações realizadas nos problemas. Do mesmo modo, a ação da linguagem externa possibilitou observar por meio das análises o desempenho da expressão verbal (em voz alta) dos alunos no contexto do conteúdo de limites, seus questionamentos tomaram proporção mais aguçada neste período.

5.1.4.5 Formação da Ação em Linguagem Externa para si

Para as análises de desempenho, nesta fase, foram destacados dois problemas das ações qualitativas que expressavam a linguagem externa, por meio da descrição dos procedimentos realizados e as características das ações contidas nestes problemas. Os resultados das soluções dos problemas nesta etapa, conforme as características independentes explanada, generalizada e consciente, foram analisados de acordo com os procedimentos utilizados na Etapa Verbal Externa, onde buscou-se evidências da aquisição da forma mental, das ideias conceituais de limite, no aspecto reduzido e automatizado.

TAREFA 06: Dada a função $f(x) = x^2 + x - 6$, representada pelo gráfico abaixo. Responda:
a) Preencha as tabelas e analise o comportamento da função nos pontos da vizinhança de x = 2.

x a esquerda de 2	
x	f(x)

x a direita de 2	
x	f(x)

b) Represente os pontos das tabelas no gráfico.

TAREFA 07: Explique o que você compreende pela expressão $\lim_{x\to 2} f(x) = 7$. É possível, que nessa expressão, $f(2) = 2$? Justifique sua resposta.

O estudante E_1, na solução da Tarefa-06, demonstrou uma característica previamente consciente quando compreendeu a aplicação dos valores de *x* em *f(x)* no problema e realizou os cálculos. Desse modo, apresentou o modelo gráfico observando aproximação do valores da tabela do ponto dado, mas não observou a diferença entre o valor de *f(x)* e *x* suficientemente pequeno para que *f(x)* se aproximasse de 0. Em seu comentário *"quando x tende a 2, f(x) tende a zero",* compreende-se um entendimento intuitivamente correto, mas a abstração ainda encontrava-se em nível razoavelmente consciente para atender o objetivo da questão.

Na Tarefa-07 esse estudante obteve a interpretação da questão fazendo uso da definição de limite, sendo essa uma ação essencial. No entanto, fez uma análise sucinta do comportamento da função, e não aplicou a definição. Deduz-se que a assimilação dos conceitos da definição de limite na forma verbal descritiva do estudante, foram ideias razoavelmente inconscientes no desenvolvimento das ações das Tarefas (T-06 e T-07), logo, as suas ideias apresentavam-se ainda pouco dissociadas das ideias particulares de interpretação.

O estudante E_2 na Tarefa-06, elaborou parcialmente consciente as ações, o mesmo não realizou o detalhamento da relação funcional entre *f(x)* e *x*, apesar da descrição explicativa, não aplicou cálculos para identificar a diferença dessa relação nos pontos

atribuídos, com o resultado de *f(x)*. Entretanto, baseou sua explicação no conceito da definição:

> *[...] quando nos aproximamos do valor x=2 pela direita y = f(x) se aproxima de "0" por valor maior que 0. Quando nos aproximas do valor de x=2 pela esquerda, y = f(x) se aproxima de 0, por valor menor que 0* (E_4, T-05)

Esse foi um entendimento do conceito de limite considerado intuitivamente correto assimilado pelo estudante, no entanto, faltou detalhamentos explicitando as diferenças do valor de aproximação. Portanto, a forma de assimilação dos conceitos neste problema, obteve avanço quanto à forma particular, mas ainda encontrava-se razoavelmente consciente quanto a definição.

O estudante E_3 desenvolveu a Tarefa-06 com todas as ações em nível pouco consciente, não fez explicação detalhada de como a função se comportava ponto a ponto, em relação a diferença do resultado de *f(x)*. O enunciado explicativo do estudante foi insuficiente para esboçar compreensão da definição de limite, pois simplesmente afirmou *que "o limite da função quando x tende 2 é igual 0"*. Não deixando claro o seu raciocínio quanto a esse resultado. Portanto, observamos que o estudante apresentou uma resposta parcialmente correta e desse modo, concluimos que esta resposta não atendeu ao objetivo do problema, cabendo apenas para uma conclusão das operações realizadas. Quanto ao nível de abstração, foi identificada como pouco consistente na solução do problema, para alcançar a generalização.

A formação do grau de generalização, argumenta Núñez (2009), ocorre através da apresentação de diversos tipos de tarefas. "[...] a generalização constitui o limite das possibilidades de aplicação da ação em situação determinada" (NÚÑEZ, 2009, p. 120). A estratégia para que seja iniciado o processo de generalização é, de fato, a exigência da argumentação, da justificativa e da explicação, isto é, a expressão oral ou escrita do raciocínio utilizado pelo estudante para a solução das tarefas.

Ainda sobre o desempenho dos estudante nas atividades dessa etapa, observa-se que na Tarefa-06, o aluno E_3 solucionou em nível pouco consciente, não relacionou com a definição de limite, pois apenas afirmou que o *"limite de f(x) para x=7"*. Logo, as respostas estavam incorretas, ou seja, não atenderam aos objetivos do problema. Neste caso, deduz-se que as ideias da definição de limite, ainda estavam pouco consistentes e a forma de assimilação deste estudante, razoável.

O estudante E_4, também solucionou a Tarefa-06 em nível pouco consciente, não detalhou o comportamento ponto a ponto da função, de maneira que apresentasse o

entendimento do conceito de limite, apenas afirmou na sua descrição *"o limite da função quando x tende 2 é igual 0"*. Embora a resposta dada esteja parcialmente correta, não atendeu completamente ao objetivo do problema, que consistia em identificar uma relação funcional. Logo, a forma de assimilação deste conceito pelo estudante foi pouco consciente.

Na Tarefa-07 esse estudante solucionou parcialmente consciente as ações. Neste problema, observamos que o mesmo, não determinou completamente as condições, mas tentou justificar usando implicitamente o ideia da definição, *"o limite de* $f(x)$ *quando* x *tende a 2, será igual a 7 [...], pois nas vizinhanças de 2, f(x) é igual a 7, portanto, para x=2, f(x) se aproxima de 7"*. O primeiro período da explicação é pertinente, mas no segundo, o estudante comete um equívoco afirmando que *"para* $x = 2$*, f(x) se aproxima de 7"*, deduzimos que ainda não compreendeu que o valor de *x* deve ser diferente de 2, ou seja, o sentido é da proximidade deste ponto, mas diferente de 2.

Desse modo, as ideias do estudante E_4 ainda estavam razoavelmente conscientes neste problema, no entanto, observou-se o início da assimilação da nova ideia, mesmo com a resposta incompleta, buscou apresentar melhor a sua forma de compreensão das ações realizadas. Apresentando assim, indícios da assimilação das ideias conceituais de Limite e nível mais consciente.

O estudante E_5 na Tarefa-06 solucionou as ações em nível consciente, mas não foi realizada a compreensão da relação funcional que se esperava, sua explicação foi sucinta, simplesmente afirmando *"o limite da função quando x tende 2 é igual 0"*. Desse modo, suas ideias quanto a esta solução foram razoavelmente conscientes, a forma de assimilação e o nível de abstração ainda pouco consistente. Sua resposta muito direta não deu subsídios para uma análise mais consistente.

Na Tarefa-07 esse estudante solucionou em nível de ações pouco consciente, não fez uso da definição de limite para justificar sua resposta, quando afirmou que *"o limite de f(x) quando x tende a 2 será igual a 7"*, sua resposta, não estava totalmente incorreta, mas incompleta. Portanto, foi insuficiente para responder completamente o problema. Logo, quanto a aplicação de definição de limite, a forma de assimilação em nível de abstração também foi razoável.

Essa foi, sem dúvida, uma das etapas mais difíceis de analisar até aqui, tendo em vista que nessa etapa a ação se realiza em silêncio, sendo essa a característica que a faz diferente da etapa anterior. Nessa etapa, para Galperin (2001), a ação se reduz, não é mais detalhada em todo o sistema de operações, transformando-se em fala interna *sui generis*, que resulta desse

processo e na qual se forma as imagens ou as operações mentais do modelo da atividade, assim como a representação do conceito assimilado.

Após a execução da linguagem no plano externo, o aluno é incentivado a agir de forma independente. Essa transição da fala socializada para a linguagem interna requer uma transformação da estrutura do próprio discurso o que na sua teoria Galperin chamou de imagem sonora da palavra (OLIVEIRA, 2011). Depois que a ação passa pela linguagem externa é que a imagem do objeto e os conceitos começam a evoluir. O significado psicológico de uma imagem sonora está no fato de que é mais estável e mais forte do que uma imagem perceptiva, que evolui em função da ação materializada simples, sem o discurso subsequente. Embora a ação tenha ido "para dentro", o discurso ainda é o portador de ambas as ações e os seus objetos (GALPERIN, 2007c).

Conforme Galperin(2007d), a execução com operações materiais e com a linguagem oral, assim como a "linguagem externa para si", permite dirigir a execução da ação para níveis fundamentais da formação do indivíduo, e para tanto, sua transformação em habilidade. As interpretações feitas pelos estudantes são para si mesmos e assim começa a assumir uma nova forma, a mental, a ação começa a reduzir-se e automatizar-se rapidamente e passa para a última etapa descrita por Galperin (1959), a etapa da ação mental.

Assim, nessa etapa da pesquisa não foi possível observar grandes transformações nas habilidades dos estudantes. No geral, eles apresentaram desempenho qualitativo parcialmente consciente e pouco consciente na execução das ações, ou seja, nenhum dos estudante alcançou totalmente o nível de indicadores máximos das atividades desta fase. No entanto, foi considerado que este processo caracterizou-se pela variação da complexidade dos problemas, isto é, a cada contexto de um novo problema, inseriu-se também elementos novos do conteúdo de Limite. Portanto, todo o processo da fase formativa e mediadora foi desenvolvido no contexto da formação conceitual por ideias particulares.

5.1.4.6 Formação da Ação em Linguagem Interna: etapa da ação mental

Talízina (1988) apoiada por Galperin (1959) descreve essa etapa como a que adquire muito rapidamente um desenvolvimento automático, se faz inacessível na observação, trata-se do ato do pensamento, onde o processo está oculto, relaciona-se a uma atividade psíquica em que o aluno resolve a tarefa de forma independente e apenas o produto final, ou o resultado da atividade, é revelado a percepção.

> A expressão *ação mental* sugere a existência de uma correlação entre dois aspectos usualmente considerados dissociados entre si. Enquanto o termo *ação* relaciona-se com uma dimensão prática, influenciada pelas condições materiais e objetivas (externas), o termo *mental* refere-se a algo que acontece numa dimensão psicológica (interna), que envolve elementos de natureza abstrata e imaterial (REZENDE E VALDEZ, 2006, p. 1214, grifo do autor).

Galperin (2001a), descreve que a última etapa inicia a partir do momento em que o sujeito passa a executar a ação na forma verbal abreviada e a ação é executada para si. A tarefa de reflexão toma o lugar da comunicação e a fala é para si, transformando-se em um meio de transmissão do pensamento a outro, na transformação da linguagem como objeto do pensamento, o autor enfatiza que, todos os elementos da ação adquirem a forma de linguagem interna.

Nessa etapa da pesquisa, foi possível analisar o desempenho de apenas quatro estudantes, pois um estudante faltou durante a realização das atividades. Os detalhamentos dos dados transcritos desse teste estão dispostos no Apêndice G. Estas análises visaram observar o nível de distinção e separação das propriedades essenciais de limite pelos estudantes nas operações de desenvolvimento das ações. Outro aspecto de análise foi a transferência da característica de abstração das ações no contexto da definição de Limite sob a ótica da descontinuidade de funções e limites infinitos. É interessante destacar que nessa fase os estudantes eram convidados a fazerem a análise de suas próprias respostas, uma vez que essa etapa mantém uma correspondência com a etapa de Polya (1978): Análise da solução descrita na orientação das *Tarefas de Compreesão Conceitual.* Segue a apresentação das tarefas realizadas nessa etapa.

TAREFA 08- Explique que a função é descontínua no número dado. Esboce o gráfico da função:

i) $f(x) = \ln |x - 2|$ x = 2

j) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} \; se \; x \neq 1 \\ 2 \; se \; x = 1 \end{cases}$ x = 1

k) $f(x) = \begin{cases} e^x \; se \; x < 0 \\ x^2 \; se \; x \geq 0 \end{cases}$ x = 0

l) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x}{x^2-1} \; se \; x \neq 1 \\ 1 \; se \; x = 1 \end{cases}$ x =1

TAREFA 09 - O custo para remover x% de resíduos tóxicos num aterro é dado $S(x) = \frac{0,8x}{100-x}$ com $0 < x < 100$.

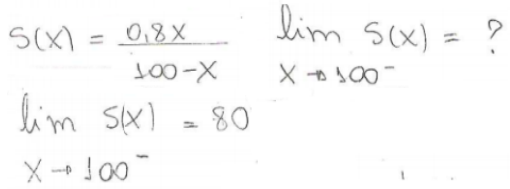
c) Calcule $\lim_{x \to 100-} S(x)$

d) Interprete o resultado obtido

No que se refere a análise dessas tarefas, o estudante E_1, na Tarefa-08 resolveu todas as ações totalmente corretas, isso implica que compreendeu corretamente os objetivos das questões, elaborou os modelos compondo uma tabela para cada questão, determinou valores para analisar o comportamento da função, encontrou as coordenadas e elaborou os gráficos, concluindo com a afirmativa do resultado de cada função. Dessa maneira, pode-se concluir que o estudante desenvolveu as ações totalmente consciente, pois fundamentou verbalmente o conceito de aplicação, ou seja, descontinuidade. Conclui-se então, que a característica abstrata das ações aplicadas nesta situação problema foram desenvolvidas e representadas na forma conceitual.

Na Tarefa-09 esse estudante também resolveu todas as ações totalmente consciente, elaborou o modelo, fez a aplicação correta do conceito de limite no infinito e encontrou a solução correta. No final da questão ele fez a seguinte observação na sua resposta: "*Destacando o intervalo que determina a função da porcentagem do custo, quanto mais distante de 100 pela esquerda, menor o custo".* Desse modo determinou que o valor máximo é de 80%. Observa-se então que a fundamentação foi consciente em relação ao conceito pois realizou os procedimentos corretos, demonstrando o nível de separação do nível de propriedades do limite e portanto, suas ações foram totalmente conscientes e o nível de abstração mais consistente.

Figura 3: Representação do Modelo elaborado pelo estudante E_1



Nessa etapa final, Talízina (1985) ressalta que o estudante deve alcançar a possibilidade de generalização máxima, a síntese máxima na execução, uma independência absoluta em relação as formas externas. Com relação aos resultados apresentados pelo

estudante E_1 durante a realização dessas atividades, observa-se que houve o processo de internalização da forma como descreve Talízina (1985), transformação das ações materiais em mentais, das ações não generalizadas para a generalizada, da forma detalhada para a abreviada, da ação consciente para a automatizada.

Embora as operações sejam feitas no plano mental, o professor possui elementos para avaliar o resultado final da habilidade trabalhada e para também saber se o aluno se afasta ou não e a que extensão dos sentidos construídos para a solução das tarefas. As tarefas trabalhadas nessa etapa caracterizam-se por serem do tipo que exige o trabalho independente, que trabalha com a transferência de aprendizagem e que estimula o pensamento criativo ao aplicar o conhecimento em novas situações (NÚÑEZ, 2009).

Quanto aos resultados do estudante E_2, na Atividade-08, desenvolveu as três primeiras ações totalmente consciente, demonstrando ter compreendido o objetivo, e elaborado o modelo para encontrar a solução com base nos conceitos de continuidade de uma função, construiu os gráficos das quatro questões. Apenas na última, apesar de ter solucionado, não determinou se a função era descontínua. Nas resoluções extraiu os resultados destacando cada uma das funções. Respondeu parcialmente ao problema, pois para uma das funções o estudante não determinou a resposta solicitada. Descreveu o motivo de três funções serem descontínuas faltando apenas a última:

> *a) descontínua, pois a função logarítmica não está definida no ponto 2;*
> *b) afirma ser descontínua porque no ponto 1 o limite não existe;*
> *c) afirma pelas condições dada da função os limites laterais não são iguais, ou seja, não existe, logo é descontínua; e*
> *d) não explicou*. (E_4, ação 4, T-08)

Portanto, observamos que este estudante desenvolveu todas as ações de maneira consciente, suas explicações foram fundamentadas no conceito de continuidades de uma função e demonstrou maior dissociabilidade dos conceitos particulares, e desta forma, consideramos que a prática foi direcionada por um conceito mental. Ao explicar o motivo da descontinuidade das funções, o estudante transforma as ações materiais (representação gráfica das funções) em ações mentais.

Na Tarefa-09 o estudante realizou todas as ações completamente consciente, desde a compreensão do objetivo do problema, a elaboração do modelo com base no conceito de limites infinitos, solucionou algebricamente e explicou a resposta. Determinou o custo solicitado no problema e de acordo com a interpretação descreveu:

> *O limite é 80 e está tendendo por valores negativos. E o limite do denominador está tendendo a zero por valores negativos. O custo percentual de remoção do lixo*

> *tóxico, próximo dos 100%, está indo pra (sic) mais infinito e não está definido* (E_4, ação 4, T-09).

A resposta do estudante demonstra a forma da ação abreviada e automatizada, o que indica a organização da solução no plano mental. Ao usar a expressão ação mental, Galperin (1989a) destaca que as ações mentais possuem, de modo implícito, um conteúdo objetivo e material, mediado pela influência direta dos conceitos mentais que a elas se aplicam. Os aspectos materiais e mentais se constituem em elementos de um mesmo e único processo, que se desenvolve objetivando promover a transformação progressiva dos aspectos materiais em mentais, incentivando a interiorização de conceitos, inicialmente de caráter operacional, para uma forma exclusivamente mental, que nunca perderá sua interligação com a prática.

Quanto a participação do estudante E_3 nessas atividades, o mesmo na Atividade-08, realizou todas as ações de maneira totalmente consciente, fez a leitura das funções e descreveu os elementos. Determinou as condições, ao descrever o modelo algébrico e geométrico para a resolução das questões, demonstrando a descontinuidade das funções. Definiu os objetivos de cada função e destacou as respostas, fazendo as seguintes interpretações:

> *a) a função é descontínua e não está definida no ponto a=2, pois não existe ln de 0;*
> *b) a função é descontínua e não está definida no 1º caso, no segundo caso ela está definida no ponto, apesar de se tratar de F(x)=2;*
> c) *na primeira função será descontínua no ponto a = 0, pois está definido qualquer número elevado a zero é igual a 1. No segundo caso está definido e não há descontinuidade* (E_6, ação 4, T-08).

De acordo com os procedimentos realizados e a fundamentação das respostas em relação ao conceito de descontinuidade, observamos que o estudante distinguiu os níveis de separação das propriedades essenciais, mantendo maior dissociabilidade dos casos particulares ao aplicar os conceitos, observamos também que ele realizou as ações de maneira consciente aplicando um nível de abstração mais consistente.

Na Tarefa-09 esse estudante desenvolveu as três primeiras ações parcialmente corretas, fez a interpretação, elaborou o modelo, no entanto, no momento da aplicação dos dados, não complementou com a resposta sobre o percentual obtido para a retirada dos resíduos tóxicos. Desse modo, não extraiu completamente os resultados significativos e relativos ao problema. A reposta dada foi incompleta, descreveu que *"o limite da função quando x tende a 100 pela esquerda é infinito, os limites laterais serão diferentes"*, faltando mencionar o percentual solicitado no problema. Apesar do estudante afirmar que a função

tende ao infinito, a aplicação não foi suficiente para encontrar a resposta, portanto, pode-se concluir que suas aplicações do conceito de limites infinitos foram razoavelmente conscientes para realizar a transformação da concepção material em forma mental.

O estudante E_5, na Tarefa-08, extraiu os elementos das funções, determinou parcialmente os objetivos das questões, calculando corretamente o limite de duas funções, sendo que as outras duas, os resultados foram desenvolvidos incompletos. Determinou as variáveis de todas as funções dadas. Nomeou e construiu os modelos parcialmente corretos, pois faltou mais atenção na exploração dos valores próximo dos pontos de descontinuidades. Encontrou o método correto para calcular duas funções, porém para resolver as outras duas, os modelos estavam incorretos. Portanto, solucionou parcialmente os modelos de forma algébrica (tabelas) e geométrica (gráficos). Desse modo, extraiu parcialmente os resultados do problema, por ter respondido corretamente duas funções de quatro. Sendo que as demais, o estudante resolveu incorretamente e não conseguiu apresentar explicação descritiva.

As descrições do estudante sobre cada uma das funções: *"a) há uma descontinuidade por não haver uma imagem para x-2; c) a solução é descontínua no ponto a=1, porque não está definida neste ponto, ou seja, não existe imagem esse número"*. As questões b) e d) ficaram sem resposta. Na Tarefa-09 resolveu todas as ações incompletas, ou seja, razoavelmente consciente, apesar de fazer a leitura dos dados, não extraiu todos os elementos. Consequentemente, determinou também parcialmente as condições e não fez relação com os valores do intervalo. Portanto, definiu parcialmente o objetivo, pois não considerou todos os elementos envolvidos na solução do problema.

A primeira ação implicou na construção parcial do modelo pelo estudante, apesar de organizar os dados em forma de tabela, não atribuiu corretamente as variáveis, o que seria fundamental para resolver o problema no intervalo dado. Encontrou o método de aplicação algébrica composta em tabela e fez uma tentativa de apresentar o gráfico. Solucionou de forma incompleta o modelo, pois, atribui variáveis incorretas para encontrar o resultado. Os elementos extraídos foram insuficientes para atender o objetivo do problema. A resposta dada pelo estudante foi incompleta e também não elaborou a justificativa de interpretação. Portanto, o desempenho deste estudante na solução da Tarefa-09, caracterizou-se por ações pouco consistentes em relação a transferência do conceito de Limite de maneira abstrata.

Essa também foi uma etapa difícil de análise, que demandou muito esforço para compreensão das ideias expostas pelos estudantes. Talízina (1988) lembra que, para desvendar os mecanismos internos que caracterizam a atividade cognitiva, não basta analisar a capacidade de resolver situações-problemas, tendo em vista que, a obtenção de uma resposta

correta não significa que o raciocínio também está correto; o sujeito pode lançar mão de diferentes tipos de raciocínios, muitas vezes incorretos para a solução de uma situação-problema. Outras vezes, o sujeito resolve corretamente a situação-problema, entretanto, não tem consciência e nem sabe explicar. Para minimizar essa dificuldade, procuramos formas diversificadas de questionar os estudantes, na tentativa de confrontar as suas respostas nas provas escritas.

Os resultados obtidos nessa fase evidenciaram que os métodos que mais favorecem o desenvolvimento mental são os que levam o aluno a pensar, que o desafiam a ir sempre mais além. São, sobretudo, aqueles que levam o aluno a começar um processo por meio de ações externas, mediante o processo de internalização, transformando-se em ações mentais. Confirmando os estudos de Galperin.

Sintetizamos no Quadro 09 os resultados obtidos nas análises do desempenho da ação verbal externa (ação verbal) e no desempenho da ação em linguagem externa.

Quadro 09: Síntese do resultado da fase formativa e mediadora

Estudante	**Desempenho na Ação Verbal Externa (Ação Verbal)**		**Desempenho na Ação em linguagem Externa (Linguagem Externa)**	
	A-04	A-05	A-06	A-07
E_1	(Faltou na aplicação)	(Faltou na aplicação)	Razoavelmente Consciente	Consciente
E_2	Pouco consciente	Razoavelmente Consciente	Pouco consciente	Pouco consciente
E_3	Razoavelmente Consciente	Razoavelmente Consciente	Razoavelmente Consciente	Pouco consciente
E_4	(Faltou na aplicação)	(Faltou na aplicação)	Pouco consciente	Razoavelmente Consciente
E_5	Pouco consciente	Razoavelmente Consciente	Consciente	Pouco consciente

Essa fase da pesquisa não apresentou os resultados esperados, entretanto, à medida que avançamos nos estudos durante a intervenção, os estudantes apresentavam melhor desenvoltura em todos os sentidos. De acordo com a nossa análise, foram vários os fatores que interferiram para esse resultados no início da pesquisa, que vai desde o grau de dificuldade na disciplina Cálculo até a forma diferenciada e nova de condução das aulas.

A síntese a seguir, apresentada no Quadro 10, demonstra o avanço na compreensão dos estudantes, os quais apresentam níveis razoavelmente consciente e conscientes na execução das atividades propostas para analisar as Tarefas 08 e 09.

Quadro 10: Síntese do Desempenho dos estudantes na etapa da Ação Mental

Estudante	Desempenho na Etapa das Ações Mentais	
	A-08	A-09
E_1	Consciente	Consciente
E_2	Consciente	Consciente
E_3	Consciente	Razoavelmente consciente
E_4	-	-
E_5	Razoavelmente consciente	Razoavelmente consciente

De acordo com Nuñez (1997) o grau de consciência, descrito nas etapas de assimilação propostas por Galperin (1957) devem ser entendidas a partir do cumprimento da ação associada ao objeto de estudo. O grau de consciência está relacionado ao saber fazer, ou seja, o aluno ao verbalizar a ação que irá executar para resolver um problema, procura, segundo Galperin (1957), traduzir a lógica da ação na lógica dos conceitos, facilitando a sua internalização.

Leontiev (2004) assinala que, a consciência só pode ser adquirida quando fundamentada na estrutura da atividade dos indivíduos, colocada nas condições do trabalho coletivo. Nestas situações, a realização de uma atividade de trabalho por um indivíduo em particular, colabora tanto para a satisfação da sua necessidade pessoal como para a satisfação da necessidade coletiva. No trabalho coletivo, a ação toma outro sentido, que é o de colaborar com os demais para que todos possam usufruir de um bem comum.

As tarefas 08 e 09 também foram elaboradas com o objetivo de analisar o grau de generalização do conceito de Limite. O grau de generalização pode ser definido como sendo a capacidade que o aluno tem de estender à ação do conceito a outra situação em que tal conceito se aplica, obedecendo os limites da sua definição. De acordo com Nuñez, Pacheco (1997, p. 430):

> Um alto grau de generalização significa: a possibilidade de o aluno aplicar com êxito a metodologia geral que orienta a atividade e todos os casos possíveis dentro dos limites de aplicação, assim como também às tarefas que representam novas situações e exigem uma transferência correta do conhecimento.

O grau de generalização foi medido por meio dessas atividades pelo fato de que

continham novas situações que retratavam o uso e o entendimento dos conceitos de Limite, destacando a aplicação desse conceito em contextos diferentes dos anteriormente trabalhados. Talízina (2008), em uma de suas pesquisas, mediu o grau de generalização através das respostas corretas obtidas em relação ao total de atividades de inclusão realizadas pelas crianças. Procedendo de modo análogo, podemos afirmar, a partir da análise dos dados disponíveis nos Quadros 09 e 10, que os estudantes apresentam grau moderado de generalização.

Desde o início do processo de intervenção, as características essenciais do conceito estavam presentes na base de orientação dada aos estudantes. De acordo com Talizina (2008), a generalização do conceito acontece a partir do momento que as suas características essenciais estão presentes na BOA, e por meio de uma ação consciente, que enfatize uma atividade com o conceito, tais características são generalizadas.

5.2 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS: DERIVADAS

Assim como a organização dos dados na primeira Unidade de estudo, apresentamos as análises descritivas dos resultados da Unidade II subdivididas nas seguintes fases: Nível de partida (diagnóstico inicial), onde foram trabalhadas as Tarefas 1 e 2; fase mediadora e formativa, com as Tarefas 3 e 4 e a fase final a qual analisamos o processo de assimilaçãoo dos estudantes na Tarefas 5.

5.2.1 Análises Descritivas do Desempenho nas atividades no Nível de Partida (Diagnóstico Inicial)

As Tarefas 1 e 2, trabalhadas para conhecer o nível de partida dos estudantes, teve como propósito observar se os mesmo fazem identificação, a partir das características que são essenciais ao conceito de derivada, ou apenas faz reconhecimento. É relevante destacar que, diferentemente da identificação, o reconhecimento está baseado em ações perceptivas de lembranças e não é necessariamente uma atividade baseada no conceito de derivada de função. Segue a apresentaçãoo dessas tarefas.

TAREFA 1: Apresento a seguir quatro problemas. **Indique** qual ou quais deles envolvem o conceito de derivada e **justifique** a sua escolha.

(a) Encontre a reta que passa pelo ponto (1, 2) e é paralela à reta tangente à parábola $y = x^2 - 4x + 3$, no ponto P(3, 0).

(b) Um triângulo equilátero está inscrito num círculo de 3 cm de raio. Calcule a área desse triângulo.

(c) Dadas as funções: $f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$ e $g(x) = \frac{1}{2}(a^x - a^{-x})$.
Demonstre que $f(x + y) = f(x) \cdot f(y) + g(x) \cdot g(y)$.

(d) Uma cidade é atingida por uma moléstia epidêmica. Os setores de saúde calculam que o número **N** de pessoas atingidas pela moléstia, depois de um tempo ***t*** (medido em dias a partir do primeiro dia de epidemia), é aproximadamente $N = 64t - \frac{t^3}{3}$.

TAREFA 2: Como você explicaria a alguém o que é derivada de uma função ***f*** no ponto x_o?

Núñez (2009), ressalta que o diagnóstico inicial tem como principal objetivo avaliar o nível de desenvolvimento dos conhecimentos e ações dos alunos sobre o conteúdo a ser assimilado, os quais se configuram como ponto de partida para o trabalho pedagógico com a unidade didática. Não se trata de um diagnóstico de pré-requisitos ou somente de ideias prévias, mas da caracterização do grau de desenvolvimento inicial da habilidade a ser formada na Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP).

Para melhor organização das análises, apresentam-se inicialmente as ações dos estudantes explicitadas de forma detalhadas ao solucionarem as tarefas 1 e 2. O Quadro 11 apresenta o detalhamento das ações dos cinco estudantes nas duas atividades realizadas no diagnóstico inicial.

QUADRO 11: Resultado das Características das Ações – Diagnóstico Inicial

Análises da Tarefa-01		
Categoria	**Compreender o problema**	**D-Quanti**
E_1	Extrair os elementos não se aplica (os dados foram fornecidos). O estudante determina as condições do problema pois identifica corretamente as questões que envolvem o conceito de Derivadas (Questões a e d). Não define o objetivo do problema, porque não foi solicitado, entretanto, demonstra compreensão, tendo em vista que justifica de modo correto a resposta dada.	5
E_2	O estudante compreende o objetivo do problema, faz a justificativa correta, explicando como são interpretadas as derivadas, entretanto, identifica de forma errada a questão (c) como uma questão que envolve o conceito de Derivada. O estudante identificou as questões (a) e (d) corretamente	4
E_3	Fica claro se o estudante compreende o objetivo do problema, pois faz a identificação correta das questões que envolvem o conceito de Derivadas, justificando de forma correta a sua resposta: *"(a) A inclinaçãoo da reta tangente compõe a definição e os conceitos que envolvem Derivadas". "(d) Todas as taxas podem ser interpretadas como inclinação das tangentes, portanto, envolve o conceito de derivadas".*	5
E_4	O estudante determina as condições do problema, identificando corretamente as questões que envolve o	4

	conceito de Derivada. Contudo, as justificativas das questões estão parcialmente corretas, tendo em vista que o estudante apenas explica o objetivo do problema e não deixa claro se possui entendimento que os mesmos envolvem o conceito de Derivadas.	
E_5	O estudante deixou claro que compreendeu o objetivo do problema, pois aponta corretamente as questões (a) e (d) como as que envolvem o conceito de Derivadas e tenta justificar a sua escolha, entretanto justificativa de modo parcialmente correto.	4
Categoria	**Construir o modelo matemático**	**D-Quanti**
E_1	A construção do modelo matemático não se aplica (já dado no problema). Realiza implicitamente através das suas justificativas as análises das unidades do modelo ao fazer relação direta com o objetivo do problema.	5
E_2	A construção do modelo matemático não se aplica (já dado no problema). Realiza implicitamente através das suas justificativas as análises das unidades do modelo ao fazer a interpretação da derivada, embora aponte uma questão que não envolve o conceito de Derivada de forma errada.	4
E_3	O estudante realiza as análises das unidades de medidas do modelo matemático. Embora a atividade não tenha modelo para ser construído, o estudante compreensão ao fazer suas justificativas.	5
E_4	Ao fazer a justificativa do motivo pelo qual as questões envolvem o conceito de Derivadas, o estudante realiza implicitamente as análises das unidades dos modelos apresentados.	4
E_5	O estudante faz a análise das unidades de medida do modelo parcialmente correta, pois identifica as questões corretamente, contudo, justifica de forma errada.	4
Categoria	**Solucionar o modelo matemático**	**D-Quanti**
E_1	O estudante seleciona o método correto para solucionar o modelo matemático e soluciona de forma totalmente correto, pois identifica as questões (a) e (d) como as que têm relação com o conceito de Derivada e justifica corretamente a sua escolha, explicitando o conceito de derivada.	5
E_2	O estudante seleciona o método correto para solucionar o modelo matemático, porém soluciona de forma parcialmente correto, pois identifica as questões (c) como um problema que possui relação com o conceito de Derivada.	4
E_3	O estudante utiliza o método correto para solucionar o modelo matemático e soluciona de forma totalmente correto, pois identifica as questões (a) e (d) como as que têm relação com o conceito de Derivada, justificando corretamente a sua escolha, explicitando o conceito de derivada.	5
E_4	No que concerne a seleção do método matemático para	4

	solucionar o modelo matemático, o estudante faz corretamente. Apresenta a solução parcialmente correta, pois embora tenha identificado as questões que possuem relação com o conceito de Derivada de modo correto, apresenta erros nas suas justificativas.	
E_5	Realiza a seleção do método matemático para solucionar o modelo matemático corretamente. Apresenta a solução parcialmente correta, pois embora tenha identificado as questões que possuem relação com o conceito de Derivada de modo correto, apresenta erros nas suas justificativas.	4
Categoria	**Interpretar a solução**	**D-Quanti**
E_1	O estudante extrai os resultados significativos fazendo relação com o objetivo do problema. Dá a resposta correta, pois faz a interpretação da solução de acordo com o objetivo descrito para a questão.	5
E_2	O estudante interpreta e faz a relação com o objetivo do problema de modo parcialmente correto. Compreende o objetivo do problema, porém não faz a interpretação da solução na sua totalidade.	4
E_3	Extrai os resultados significativos fazendo relação com o objetivo do problema. Dá a resposta correta, pois faz a interpretação da solução de acordo com o obetivo descrito para a questão.	5
E_4	Interpreta e faz a relação com o objetivo do problema de modo parcialmente correto. Compreende o objetivo do problema, porém não faz a interpretação da solução de modo a indicar total compreensão.	4
E_5	Realiza um relatório baseado no objetivo do problema, porém não apresenta indicadores de que compreende e interpreta totalmente a solução.	4

Análises da Tarefa-02		
Categoria	**Compreender o problema**	**D-Quanti**
E_1	Extrair os elementos não se aplica (os dados foram fornecidos). O estudante determina as condições do problema pois explica corretamente "o que é a derivada de uma função $\boldsymbol{f}$ no ponto x_0. O objetivo do problema não foi solicitado, mas deduz-se que o estudante compreendeu.	5
E_2	O estudante compreende o objetivo do problema, e explica o conceito de derivada num ponto elaborando o conceito a partir da definição de limite de função.	5
E_3	Não fica claro se o estudante compreendeu o objetivo do problema, pois explica de forma bastante sintetizada o conceito de derivada num ponto, fazendo a relação com o coenficiente angular de uma reta, sem apresentar detalhes.	3

E_4	O estudante determina as condições do problema, explica com detalhes o conceito de derivada num ponto, ressaltando que "*é a inclinação da reta tangente a esses ponto*".	5
E_5	O estudante determina as condições do problema e apresenta resposta satisfatória, porém um pouco confusa.	4
Categoria	**Construir o modelo matemático**	**D-Quanti**
E_1	A construção do modelo matemático não se aplica. Realiza por meio da formulação do conceito de derivada no ponto as análises das unidades do modelo e faz relação direta com o objetivo do problema.	5
E_2	Realiza implicitamente através da explicação do conceito de derivada num ponto as análises das unidades do modelo.	5
E_3	O estudante não apresenta na sua resposta as análises das unidades de medidas do modelo matemático, apresenta o conceito de derivada num ponto de modo superficial, sem deixar claro se há compreensão no que expôs.	3
E_4	Ao elaborar sua explicação sobre o significado da derivada de uma função **f** num ponto, o estudante realiza as análises das unidades dos modelos de modo totalmente satisfatório com relação ao objetivo da questão.	5
E_5	O estudante faz a análise das unidades de medida do modelo parcialmente correta, pois apresenta o conceito correto de derivada de uma função **f** num ponto, porém de forma um pouco confusa.	4
Categoria	**Solucionar o modelo matemático**	**D-Quanti**
E_1	O estudante seleciona o método correto para solucionar o modelo matemático e soluciona de forma totalmente correto, pois elabora o conceito de derivada de uma função *f* num ponto corretamente.	5
E_2	O estudante seleciona o método correto para solucionar o modelo matemático, elabora de modo claro e preciso o conceito de derivada de uma função f num ponto dado.	5
E_3	Na sua resposta o estudante não deixa claro se utiliza o método correto para solucionar o modelo matemático, pois faz a explicação do conceito de derivada de uma função **f** num ponto x_0 de forma muito resumida e superficial.	3
E_4	No que concerne a seleção do método matemático para solucionar o modelo matemático, o estudante apresenta a solução correta, elaborando com clareza a explicação para a derivada de uma função *f* num ponto x_0.	5
E_5	Realiza a seleção do método matemático para solucionar o modelo matemático corretamente. Apresenta a solução parcialmente correta, pois embora tenha demonstrado que compreendeu o conceito de derivada num ponto, o apresenta de forma confusa.	4
Categoria	**Interpretar a solução**	**D-Quanti**

E_1	O estudante extrai os resultados significativos fazendo relação com o objetivo do problema. Dá a resposta correta, pois faz a interpretação da solução de acordo com o objetivo descrito para a questão, ou seja, explica com detalhes o que a derivada de uma função *f* num ponto x_0.	5
E_2	O estudante interpreta e faz a relação com o objetivo do problema de modo totalmente correto. Compreende o objetivo do problema e apresenta a explicação na sua totalidade.	5
E_3	Não extrai os resultados significativos fazendo relação com o objetivo do problema, apresenta o conceito de derivada de uma função *f* num ponto x_0 superficialmente, demonstrando insegurança em relação a interpretação da sua solução.	2
E_4	Interpreta e faz a relação com o objetivo do problema de modo totalmente correto. Compreende o objetivo do problema e apresenta com clareza uma explicação para a derivada de uma função *f* num pontos x_0.	5
E_5	Não apresenta indicadores de que compreende e interpreta totalmente a solução apresentada para o problema, embora realize um relatório baseado no objetivo do problema de modo satisfatório.	4

A partir dos resultados dessas características, podemos inferir que o desempenho dos Estudantes E_1 e E_3 ao solucionarem a Tarefa-01 do nível de partida (Diagnóstico Inicial), apresentaram todas as ações completamente corretas, pois demonstraram nas ações realizadas que compreenderam o conceito de Derivada envolvido nas questões. Logo, seus desempenhos foram definidos como totalmente conscientes nessa fase da pesquisa.

Os estudante E_2, E_4 e E_5 na Tarefa-01, apresentaram desempenhos similares, demonstraram que não compreenderam suficientemente o contexto em que o conceito de Derivadas são apresentadas, tendo em vista que cometeram alguns erros ao justificarem os motivos pelos quais as questões tinham relação com o conceito de Derivada. Portanto, deduz-se que os conhecimentos destes estudantes, foram identificados como razoavelmente conscientes para a compreensão do conceito de Derivadas, por não demonstrarem habilidades nas análises de interpretação de suas respostas e não apresentarem elementos teóricos para justificar suas ações.

Na Tarefa-02 os estudantes E_1, E_2 e E_4 apresentaram todas as ações completas, fazendo uso da linguagem matemática correta para definir o conceito de Derivada de uma função *f* num ponto X_0. Sendo assim, deduz-se que os conhecimentos destes estudantes no que diz respeito a compreensão do conceito de derivada num ponto, foram identificadas como totalmente consciente. Os estudantes E_3 e E_5, nessa fase da pesquisa, apresentaram algumas

dificuldades para elaborar com clareza a explicação do conceito de derivada de uma função num ponto específico. Apresentaram a ação essencial parcialmente correta, logo, a assimilação desses estudantes sobre o conceito de derivadas num ponto foi identificada como razoavelmente consciente.

Na perspectiva de Talízina (1988), o ensino se transforma em uma ação consciente e independente por intermédio da compreensão da atividade com os conceitos científicos, considerando-se não somente os conteúdos específicos, mas também os conteúdos gerais (procedimentos iniciais do pensamento lógico), dentre os necessários à formação dos conceitos.

Núñez (2009) apresenta o sistema de princípios didáticos derivados da teoria de Galperin, um dos princípios discorre sobre o caráter consciente da aprendizagem em que os alunos se apropriam dos conteúdos desenvolvendo estratégias de aprender a aprender. O processo de formação de uma habilidade de modo consciente torna-se acessível aos estudantes quando eles passam por uma aprendizagem específica que garante a correção da ação executada anteriormente. A habilidade concretiza-se nos diversas situações de ensino. No entanto, é preciso observar a qualidade da internalização e relacionar essa qualidade com a quantidade de vezes de sua execução de forma adequada e coerente.

Podemos inferior, que de modo geral, os estudantes estão progressivamente elevando a qualidade de internalização dos conceitos trabalhados no ensino de Cálculo. Segue, na Tabela 18, a síntese do desempenho dos estudantes nas atividades do nível de partida (Diagnóstico Inicial).

Tabela 18: Síntese do Desempenho dos Estudante na Fase do Nível de Partida

Estudante E_1					
T	**1ª E**	**2ª E**	**3ª E**	**4ª E**	**Contexto essencial do problema**
nº 1	5	5	5	5	Solucionar o problema fazendo uso da definição de Derivadas.
Estudante E_2					
nº 1	4	4	4	4	Solucionar o problema fazendo uso da definição de Derivadas.
Estudante E_3					
nº 1	5	5	5	5	Solucionar o problema fazendo uso da definição de Derivadas.
Estudante E_4					
nº 1	4	4	4	4	Solucionar o problema fazendo uso da definição de Derivadas.
Estudante E_5					
nº 1	4	4	4	4	Solucionar o problema fazendo uso da

					definição de Derivadas.
Estudante E_1					
nº 2	5	5	5	5	Analisar e explicar o conceito de Derivada de uma função f no ponto X_0.
Estudante E_2					
nº 2	5	5	5	5	Analisar e explicar o conceito de Derivada de uma função f no ponto X_0.
Estudante E_3					
nº 2	3	3	3	2	Analisar e explicar o conceito de Derivada de uma função f no ponto X_0.
Estudante E_4					
nº 2	5	5	5	5	Analisar e explicar o conceito de Derivada de uma função *f* no ponto X_0.
Estudante E_5					
nº 2	4	4	4	4	Analisar e explicar o conceito de Derivada de uma função f no ponto X_0.

Legenda: (T) Tarefa; (1ªE) compreensão do problema; (2ªE) estabelecimento de um plano; (3ªE) execução do plano; (4ªE) revisão da solução.

Fonte: Dados da pesquisa

Podemos afirmar então, dado os resultados do desempenho dos estudantes nessa fase da pesquisa, que há um esforço direcionado para a compreensão dos conceitos estudados em Cálculo. Ressalta-se que os processos de ensino estão centrados na capacidade do indivíduo de resolver com êxito as *Tarefas de Compreensão Conceituais*. O estudante torna-se consciente pela assimilação dos conceitos no âmbito das suas aplicações. Passamos a detalhar o desempenho dos estudantes nas atividades avaliadas na fase mediadora e formativa.

5.2.2 Análises Descritivas do Desempenho nas atividades da fase Formativa e Mediadora

As Tarefas trabalhadas na fase mediadora e formativa tiveram por objetivo avaliar se os estudantes possuíam habilidades para fazer aplicação correta do conceito de Derivadas.

TAREFA 3: um balão esférico começa a ser inflado. Encontre a taxa de crescimento da área da superfície ($S = 4\pi r^2$) em relação ao raio *r* quando *r* é (a) 1 pé, (b) 2 pés e (c) = 3 pés. Que conclusão você pode tirar destes resultados?

TAREFA 4: Uma equação do movimento é dada por $s = 2t^3 - 9t^2$, onde *s* está em metros e *t*, em segundos. Encontre o instante em que a aceleração é zero. Explique sua resposta.

A

descrição de como os estudantes responderam a essas questões está relacionada no Quadro 12.

QUADRO 12: Resultado das Características das Ações – Fase formativa e mediadora

Análises da Tarefa-03		
Categoria	**Compreender o problema**	**D-Quanti**
E_1	O estudante extrai os dados do problema corretamente e determina as condições para a sua solução, pois encontra a área da superfície nas três situações dadas. Não define o objetivo do problema, porque não foi solicitado, entretanto, demonstra compreensão, tendo em vista que tira as conclusões dos resultados de modo correto.	5
E2	O estudante compreende o objetivo do problema, faz os cálculos corretamente, contudo, é bastante sucinto no momento de escrever as conclusões, deixando dúvidas quanto a compreensão que a taxa de crescimento está relacionada com o cálculo da derivada.	4
E3	Fica claro que o estudante compreende o objetivo do problema, pois extrai os dados corretamente e calcula a taxa de crescimento nas três situações dadas, finaliza com a explicação correta sobre a conclusão dos resultados que chegou.	5
E4	O estudante determina as condições do problema, fazendo corretamente os cálculos que envolvem o conceito de Derivada. Contudo, não consegue fazer nas conclusões uma relação correta sobre a taxa de crescimento da área da superfície e o conceito de derivadas.	3
E5	O estudante deixou claro que compreendeu o objetivo do problema, pois extrai os dados e resolve as questões corretamente, faz a relação dos dados com o conceito de derivada e, a partir dos resultados encontrados, faz a conclusão correta.	5
Categoria	**Construir o modelo matemático**	D-Quanti
E1	Determina as variáveis e incógnitas. A construção do modelo matemático não se aplica (já dado no problema). Realiza através das suas conclusões as análises das unidades do modelo, pois faz relação direta com o objetivo do problema.	5
E2	O estudante determina as variáveis e incógnitas. A construção do modelo matemático não se aplica (já dado no problema). Realiza as análises das unidades do modelo, contudo, escreve as conclusões de modo superficial.	4

E3	O estudante realiza as análises das unidades de medidas do modelo matemático. Embora a atividade não tenha modelo para ser construído, o estudante demonstra compreensão ao fazer os cálculos com êxito e escrever as conclusões corretamente.	5
E4	Determina as variáveis e incógnitas. A construção do modelo já foi dados, mas o estudante extrai os dados e resolve as questões corretamente. Ao escrever a conclusão que tirou dos resultados encontrados, não faz de modo correto.	3
E5	O estudante determina as variáveis e incógnitas. A construção do modelo matemático não se aplica (já foi dado no problema). Realiza as análises das unidades do modelo, pois escreve as conclusões de modo satisfatório, fazendo a relação correta da taxa de crescimento da superfície com o conceito de derivadas.	5
Categoria	**Solucionar o modelo matemático**	**D-Quanti**
E_1	O estudante seleciona o método correto para solucionar o modelo matemático e soluciona de forma totalmente correto, pois encontra a taxa de crescimento da superfície para cada dado do problema e faz a conclusão correta.	5
E_2	O estudante seleciona o método correto para solucionar o modelo matemático, faz os cálculos corretos, porém finaliza escrevendo as conclusões de modo muito superficial.	4
E_3	Utiliza o método correto para solucionar o modelo matemático e soluciona de forma totalmente correto, pois encontra o valor da taxa de crescimento da área da superfície para todos as questões, tirando as conclusões corretas para os resultados encontrados.	5
E_4	Seleciona o método matemático para resolver o modelo matemático de forma correta. Apresenta as conclusões corretamente, no entanto, as apresenta de forma muito resumida.	4
E_5	Realiza a seleção do método matemático para solucionar o modelo matemático corretamente, pois sintetizou as conclusões de modo muito superficial. Apresenta a solução correta para cada taxa calculada, mas suas conclusões estão parcialmente corretas.	4
Categoria	**Interpretar a solução**	**D-Quanti**
E_1	Extrai os resultados significativos fazendo relação com o objetivo do problema. Dá a resposta correta, pois faz a interpretação da solução de acordo com o objetivo descrito para cada questão. Fez uma conclusão geral a partir dos casos particulares dados no problema.	5
E_2	O estudante interpreta e faz a relação com o objetivo do problema de modo parcialmente correto, pois mesmo compreendendo o objetivo do problema, sintetiza muito as	4

	suas conclusões.	
E_3	Extrai os resultados significativos fazendo relação com o objetivo do problema. Responde corretamente as questões fazendo a interpretação de cada uma nas suas conclusões.	5
E_4	Interpreta e faz a relação com o objetivo do problema de modo parcialmente correto, pois não deixa claro quando escreve suas conclusões se compreende totalmente suas respostas.	4
E_5	Realiza um relatório baseado no objetivo do problema, porém não apresenta indicadores de que compreende e interpreta totalmente a solução.	4
Análises da Tarefa -04		
Categoria	**Compreender o problema**	**D-Quanti**
E_1	Extrair os dados do problema corretamente. O estudante determina as condições do problema pois faz o cálculo do instante em que a aceleração é zero, explicando de modo totalmente correto o resultado encontrado.	5
E_2	O estudante compreende o objetivo do problema, realiza o cálculo corretamente, explica sua resposta sem fazer relação com o conceito de derivada.	4
E_3	O estudante compreendeu o objetivo do problema, pois faz o cálculo correto e explica sua resposta relacionando o cálculo que fez com o conceito de derivada.	5
E_4	O estudante determina as condições do problema, faz o cálculo do instante em que a aceleração é zero de modo toalmente correto, porém resume a explicação da sua resposta sem deixar claro se compreende a relação da questão com o conceito de derivada.	4
E_5	O estudante não determina as condições, nem o objetivo do problema. Faz o cálculo parcialmente correto e não explica sua resposta.	3
Categoria	**Construir o modelo matemático**	**D-Quanti**
E_1	A construção do modelo matemático não se aplica. Realiza por meio da formulação do conceito de derivada o cálculo do instante em que a aceleração é zero, fazendo a relação do conceito de derivada com o cálculo da aceleração.	5
E_2	Realiza implicitamente através do cálculo da taxa de aceleração a aplicação do conceito de derivada, explicando de modo parcialmente correto o resultado encontrado quando a aceleração é zero.	4
E_3	O estudante fazer o cálculo correto do instante em que a aceleração é zero, explica a resposta encontrada fazendo a relação com o conceito de derivada.	5
E_4	Ao elaborar sua explicação sobre o resultado que encontrou, explica de modo muito superficial, apesar de ter utilizado o	4

	conceito de derivada para calcular o instante em que a aceleração é zero, não explica essa relação na sua resposta.	
E_5	O estudante faz a análise das unidades de medida do modelo parcialmente correta, pois calcula corretamente o instante em que a aceleração utilizando o modelo correto, no entanto, não explica sua resposta.	3
Categoria	**Solucionar o modelo matemático**	**D-Quanti**
E_1	O estudante seleciona o método correto para solucionar o modelo matemático e soluciona de forma totalmente correto, pois na explicação da sua resposta faz uso da relação do conceito de derivada com o cálculo do instante em que a aceleração é nula.	5
E_2	O estudante seleciona o método correto para solucionar o modelo matemático, responde corretamente, mas explica de modo parcialmente correto sua resposta.	4
E_3	Na sua resposta o estudante deixa claro que utiliza o método correto para solucionar o modelo matemático, pois faz a explicação do conceito do cálculo do instante em que a aceleração é nula relacionando com o cálculo de derivada da função dada como modelo matemático para o movimento.	5
E_4	No que concerne a seleção do método matemático para solucionar o modelo matemático, o estudante apresenta a solução correta, mas explica sua resposta de modo parcialmente correto.	4
E_5	Realiza a seleção do método matemático para solucionar o modelo matemático corretamente. Apresenta a solução parcialmente correta, pois embora tenha utilizado o cálculo da derivada no modelo dado, não explica a resposta encontrada.	3
Categoria	**Interpretar a solução**	**D-Quanti**
E_1	O estudante extrai os resultados significativos fazendo relação com o objetivo do problema. Dá a resposta correta, pois faz a interpretação da solução relacionando o conceito de derivada no cálculo do instante em que a aceleração é zero.	5
E_2	O estudante interpreta e faz a relação com o objetivo do problema de modo parcialmente correto. Compreende o objetivo do problema, faz o cálculo correto, mas não apresenta a explicação na sua totalidade.	4
E_3	Extrai os resultados significativos fazendo relação com o objetivo do problema, apresenta o conceito de derivada para fazer a interpretação da sua solução.	5
E_4	Interpreta e faz a relação com o objetivo do problema de modo totalmente correto. Compreende o objetivo do problema e faz a interpretação da solução encontrada parcialmente correta.	4
E_5	Não apresenta indicadores de que compreende e interpreta totalmente a solução, pois apesar de ter respondido	3

	corretamente o cálculo, não explica sua resposta.	

Conclui-se a partir dos dados explicitados no quadro 12, que os estudantes E_1 e E_2 realizaram todas as ações essenciais dos problemas fazendo uso correto do conceito de Derivadas, pois fizeram a generalização dos casos particulares apresentado nas questões. Deixaram claro nas ações realizadas que compreenderam o conceito envolvido nas atividades, tendo em vista que interpretaram corretamente a solução, relacionando o cálculo do instante em que aceleração é nula com o conceito de derivadas. Logo, conclui-se que esses estudantes desenvolveram as ações em nível totalmente consciente.

Os estudantes E_2 e E_4, conforme o detalhamento das soluções, elaboram corretamente as ações para o desenvolvimento dos cálculos de acordo com o objetivo do problema, realizam os cálculos corretamente, no entanto, apresentam as explicações de suas respostas de forma resumida, o que nos faz compreender que executam as ações em nível razoavelmente conscientes. Já o estudante E_5 nessas atividades, apresentou um nível pouco consciente, tendo em vista que realiza algumas ações essenciais dos problemas incompletas e não apresentam explicações para suas respostas ou as fazem de modo superficial, e portanto, suas ações são consideradas insuficientes para analisar se houve a compreensão da aplicação do conceito de derivada.

Na perspectiva de Talízina (1988), o ensino se transforma em uma ação consciente e independente por meio da compreensão da atividade com os conceitos científicos, considerando-se não somente os conteúdos específicos, mas também os conteúdos gerais que envolvem os procedimentos iniciais do pensamento lógico, dentre os necessários à formação dos conceitos. No caso das atividades realizadas na fase mediadora e formativa, o conceito envolvido nas questões foi o de Derivadas. Com excessão do estudante E_5, os demais estudantes apresentaram alto grau de independência na execução de suas tarefas. Esse comportamento tem estreita relação com a organização do ensino a partir da BOA III. Conforme Talízina (1988, p. 105): “Uma característica dos estudantes que já assimilaram o modo de atividade com base orientadora do terceiro tipo (sistêmico) é que são capazes de construir independentemente não somente as invariantes conhecidas do sistema, mas também as novas”. A nossa garantia de que os estudantes alcançaram grau de independência está no fato dos mesmos demonstrarem a compreesão do conceito geral de Derivada a partir da resolução de um caso específico (taxa de crescimento da área de uma superfície – Atividade 3). A síntese do desempenho dos estudantes na fase mediadora e formativa está relacionada na Tabela 19.

Tabela 19: Síntese do Desempenho dos Estudante na Fase Mediadora e Formativa

Estudante E_1					
T	**1ª E**	**2ª E**	**3ª E**	**4ª E**	**Contexto essencial do problema**
nº 3	5	5	5	5	Solucionar o problema fazendo relação da taxa de crescimento de uma superfície dada com o conceito de Derivadas.
Estudante E_2					
nº 3	4	4	4	4	Solucionar o problema fazendo relação da taxa de crescimento de uma superfície dada com o conceito de Derivadas.
Estudante E_3					
nº 3	5	5	5	5	Solucionar o problema fazendo relação da taxa de crescimento de uma superfície dada com o conceito de Derivadas.
Estudante E_4					
nº 3	3	3	4	4	Solucionar o problema fazendo relação da taxa de crescimento de uma superfície dada com o conceito de Derivadas.
Estudante E_5					
nº 3	5	5	4	4	Solucionar o problema fazendo relação da taxa de crescimento de uma superfície dada com o conceito de Derivadas.
Estudante E_1					
nº 4	5	5	5	5	Analisar e explicar uma equação do movimento a partir do uso do cálculo de derivada.
Estudante E_2					
nº 4	4	4	4	4	Analisar e explicar uma equação do movimento a partir do uso do cálculo de derivada.
Estudante E_3					
nº 4	5	5	5	5	Analisar e explicar uma equação do movimento a partir do uso do cálculo de derivada.
Estudante E_4					
nº 4	4	4	4	4	Analisar e explicar uma equação do movimento a partir do uso do cálculo de derivada.
Estudante E_5					
nº 4	3	3	3	3	Analisar e explicar uma equação do movimento a partir do uso do cálculo de derivada.

Legenda: (T) Tarefa; (1ªE) compreensão do problema; (2ªE) estabelecimento de um plano; (3ªE) execução do plano; (4ªE) revisão da solução.

Fonte: Dados da pesquisa

Durante todo o processo da realização das ações, ocorre o controle, sendo, como

assegura Talízina (1988), inicialmente externo e na sequência como uma conduta do próprio estudante. O controle externo realizado pelo professor na condução das aulas garante o êxito dos estudantes no processo de compreensão e execução das tarefas. Entretanto, é importante salientar que um dos fatores influenciadores no desempenho dos estudantes nessa pesquisa, além da organização da prática pedagógica sobre o Cálculo Diferencial e Integral segundo as etapas de Galperin, foi o número relativamente pequeno de estudantes integrantes da pesquisa.

5.2.3 Análises Descritivas do Desempenho nas atividades da Fase Final

No bloco de questões onde constam as atividades trabalhadas para análise na fase final dessa unidade, traz as aplicações da derivada em diferentes contextos, a tarefa que selecionamos para análise, apresenta uma aplicação na área da saúde.

> **TAREFA 5:** Uma cidade é atingida por uma moléstia epidêmica. Os setores de saúde calculam que o número **N** de pessoas atingidas pela moléstia, depois de um tempo ***t*** (medido em dias a partir do primeiro dia de epidemia), é aproximadamente N = $64t - \frac{t^3}{3}$. Qual a taxa de expansão da epidemia quando t = 4?

A descrição de como os estudantes responderam essa atividade está relacionado no Quadro 13.

QUADRO 13: Resultado das Características das Ações – Fase Final

Análises da Tarefa-05		
Categoria	**Compreender o problema**	**D-Quanti**
E_1	O estudante extrai os dados do problema corretamente e determina as condições para a sua solução, pois encontra a taxa de expansão da epidemia quando o tempo é igual a 4 dias. Não define o objetivo do problema, porque não foi solicitado, entretanto, demonstra compreensão, tendo em vista que tira as conclusões dos resultados de modo correto.	5
E2	O estudante compreende o objetivo do problema, faz os cálculos corretamente, escreve as conclusões, demonstrando que o resultado encontrado N(4) = 48 é a taxa de expansão da epidemia.	5
E3	Fica claro que o estudante compreende o objetivo do problema, pois extrai os dados corretamente e calcula a taxa de expansão da epidemia por meio da derivada da função	5

	que representa o número de pessoas atingidas pela moléstia (epidemia) e aplica corretamente para N = 4.	
E4	O estudante determina as condições do problema, fazendo corretamente os cálculos que envolvem o conceito de Derivada. Aponta no final dos cálculos que o resultado obtido diz respeito a taxa de expansão da epidemia.	5
E5	O estudante deixou claro que compreendeu o objetivo do problema, pois extrai os dados e resolve as questões corretamente, faz a relação dos dados com o conceito de derivada e, a partir do resultado encontrado, conclui que este é a taxa de expansãoo da epidemia.	5
Categoria	**Construir o modelo matemático**	D-Quanti
E1	A construção do modelo matemático não se aplica (já dado no problema). Realiza através das suas conclusões as análises das unidades do modelo, pois faz relação direta com o objetivo do problema.	5
E2	O estudante determina as variáveis e incógnitas. A construção do modelo matemático não se aplica (já dado no problema). Realiza as análises das unidades do modelo, contudo, escreve as conclusões de modo satisfatório.	5
E3	O estudante realiza as análises das unidades de medidas do modelo matemático. Embora a atividade não tenha modelo para ser construído, o estudante demonstra compreensão ao fazer os cálculos com êxito, porém não indica que o resultado encontrado se refere a taxa de expansão da epidemia.	4
E4	Determina as variáveis e incógnitas. A construção do modelo já foi dado, mas o estudante extrai os dados e resolve a questão corretamente. Ao escrever a resultado, explica que este se refere a taxa de expansão da epidemia.	5
E5	O estudante determina as variáveis e incógnitas. A construção do modelo matemático não se aplica (já foi dado no problema). Realiza as análises das unidades do modelo, pois escreve as conclusões de modo satisfatório, fazendo a relação correta do resultado do cálculo da derivada com a taxa de expansão da epidemia.	5
Categoria	**Solucionar o modelo matemático**	**D-Quanti**
E_1	O estudante seleciona o método correto para solucionar o modelo matemático e resolve de modo totalmente correto, pois encontra a taxa de expansão da epidemia a partir do cálculo da derivada da função	5
E_2	O estudante seleciona o método correto para solucionar o modelo matemático, faz o cálculo correto e apresenta o resultado da derivada no ponto 4 como a taxa de expansão da epidemia para o tempo igual a 4 dias.	5

E_3	Utiliza o método correto para solucionar o modelo matemático e soluciona de forma totalmente correto, pois encontra o valor da taxa de expansão da epidemia correta, porém não indica na sua resposta que o resultado encontrado é a taxa.	4
E_4	Seleciona o método matemático para resolver o modelo matemático de forma correta. Apresenta as conclusões corretamente.	5
E5	Realiza a seleção do método matemático para solucionar o modelo matemático corretamente. Apresenta a solução correta para cada taxa calculada e indica que o resultado encontrado representa a taxa de expansão da epidemia.	5
Categoria	**Interpretar a solução**	**D-Quanti**
E1	Extrai os resultados significativos fazendo relação com o objetivo do problema. Dá a resposta correta, pois faz a interpretação da solução de acordo com o objetivo descrito para cada questão. Entretanto, não fez uma conclusão geral apontando o resultado encontrado como a taxa de expansãoo da epidemia.	4
E2	O estudante interpreta e faz a relação com o objetivo do problema de modo totalmente correto, pois faz a intrpretação que o resultado encontrado na derivada no ponto 4 representa a taxas de expansão da epidemia.	5
E3	Extrai os resultados significativos fazendo relação com o objetivo do problema. Responde corretamente a questão, mas não faz um interpretação para o resultado obtido no cálculo.	3
E4	Interpreta e faz a relação com o objetivo do problema de modo totalmente correto, deixa claro quando escreve suas conclusões que o resultado encontrado diz respeito a taxa de expansão da epidemia.	5
E5	Realiza um relatório baseado no objetivo do problema a partir dos cálculos apresentados, faz a interpretaçãoo correta dos resultados relacionando o resultado da derivada no ponto igual a 4 com a taxa de expansãoo da epidemia para o tempo igual a 4 dias.	5

Observa-se, a apartir do exposto, que a essa altura da pesquisa os estudantes já estão familiarizados com o método de ensino, preocupam-se com o objetivo das questões que se propõem resolver. De forma geral, nessa atividade da fase final, os estudantes determinam as variáveis e incógnitas, realizam as análises das unidades do modelo, pois escrevem as conclusões de modo satisfatório. Interpretam e fazem a relação com o objetivo do problema de modo totalmente correto, deixam claro quando escrevem suas conclusões que o resultado encontrado diz respeito a taxa de expansão da epidemia.

Apenas os estudantes E_1 e E_3 não fazem a indicação que o resultado encontrado no cálculo da derivada no ponto $t = 4$, sendo t o tempo em dias, com a taxa de expansão da epidemia. Contudo, o fato desses estudantes não explicitarem suas respostas, não nos obriga a compreender que os mesmos não responderam essa questão de forma consciente, dado que realizaram os cálculos corretamente.

Conclui-se com esses resultados que, com o avanço do processo, os estudantes passam a executar as ações com mais autonomia e independência cognitiva. Promovem a transferência da aprendizagem a novas situações, aplicando os conceitos do Cálculo em situações reais, como por exemplo, utilizando o conceito de derivadas para calcular a taxa de expansão de uma epidemia (aplicação na área da saúde).

A síntese do desempenho dos estudantes nessa fase da pesquisa está relacionada na Tabela 20.

Tabela 20: Síntese do Desempenho dos Estudante na Fase Mediadora e Formativa

Estudante E_1					
T	**1ª E**	**2ª E**	**3ª E**	**4ª E**	**Contexto essencial do problema**
nº 5	5	5	5	4	Solucionar o problema fazendo relação da taxa de expansão da epidemia no tempo t = 4 com o cálculo da derivada num ponto.
Estudante E_2					
nº 5	5	5	5	5	Solucionar o problema fazendo relação da taxa de expansão da epidemia no tempo t = 4 com o cálculo da derivada num ponto.
Estudante E_3					
nº 5	5	4	4	3	Solucionar o problema fazendo relação da taxa de expansão da epidemia no tempo t = 4 com o cálculo da derivada num ponto.
Estudante E_4					
nº 5	5	5	5	5	Solucionar o problema fazendo relação da

					taxa de expansão da epidemia no tempo t = 4 com o cálculo da derivada num ponto.
Estudante E_5					
nº 5	5	5	5	5	Solucionar o problema fazendo relação da taxa de expansão da epidemia no tempo t = 4 com o cálculo da derivada num ponto.

Legenda: (T) Tarefa; (1ªE) compreensão do problema; (2ªE) estabelecimento de um plano; (3ªE) execução do plano; (4ªE) revisão da solução.

Fonte: Dados da pesquisa

Na etapa final, ressalta Talízina (1988), deve-se alcançar a generalização máxima, a síntese máxima na execução, total independência em relação às formas externas. O processo de internalização da habilidade é fechado, que consiste na transformação das ações materiais em mentais, das ações não generalizadas para a generalizada, da forma detalhada para a abreviada, da ação coletiva e compartilhada para a ação independente, da ação consciente para a automatizada. Nesse momento, a habilidade de resolver problemas envolvendo o conceito de derivadas é realizada com independência no plano mental.

Apresentam-se a seguir as análises das atividades trabalhadas na unidade II (conceito de Derivadas) sob o ponto de vista da teoria de Galperin, destacando a descrição do desempenho dos estudantes no decorrer de cada etapa.

5.2.4 Análises por Etapas de Formação das ações Mentais segundo Galperin – Unidade II

Como já discutido nesse trabalho, Galperin (1986a), descreve que o processo de internalização da atividade externa em interna é concebido como um ciclo cognoscitivo, no qual se destacam momentos funcionais. Esse momentos, segundo o autor, não podem ser considerados de forma linear, porém, podem ser separados metodologicamente para análise. Reafirmamos que essas etapas são: motivacional; de estabelecimento do esquema da base orientadora da ação (BOA); de formação da ação no plano matrial ou materializado; de formação da ação no plano da linguagem externa; mental. A análise do processo de internalização e generalização do conceito de Derivadas segue a ordem dessas etapas.

5.2.4.1 Etapa Motivacional

Essa etapa, conforme Núñez e Pacheco (1998, p. 99), é considerada por Talízina como etapa zero, “em que ainda não há nenhum tipo de ação, nem são introduzidos conhecimentos; ela tem como tarefa principal preparar os alunos para assimilarem os novos conhecimentos”. o novo conhecimento a ser assimilado pelos estudantes no decorrer da observação dessa etapa, foi o conceito de Derivada de função. Desta forma, retomamos o *Problema da Tangente* já trabalhado na unidade anterior no conceito de Limite de função para que os estudantes fizessem a interpretação da Derivada como a inclinação da Reta Tangente.

A síntese do desempenho dos estudantes nessa etapa está apresentada na Tabela 21, a média foi obtida a partir das notas nas categorias de: compreensão do problema; estabelecimento de um planejamento; execução do plano e revisão da solução dos problemas trabalhados (Tarefas 1 e 2 – Unidade II).

Tabela 21: Média do desempenho por estudante nas Tarefas 1e 2 (Unidade II)

Estudantes/Tarefas	**Médias**				
	E_1	**E_2**	**E_3**	**E_4**	**E_5**
Atividade-01	5	4	5	4	4
Atividade-02	5	5	2,8	5	4
Média geral por estudante	5	4,5	3,9	4,5	4

Fonte: Dados da pesquisa.

De modo geral, as atividades foram desempenhadas com êxito pelos estudantes. Tentamos durante a realização dessas tarefas criar neles uma motivação interna, ou seja, mostrando para os discentes que os conhecimentos adquiridos poderiam servir de meios para outros fins (Aplicar os conceitos na resolução de problemas do cotidiano). Deve-se criar nos alunos uma disposição positiva para o estudo, já que “A motivação para aprender é sempre determinada por valores que apóiem e justifiquem aprendizagem como atividade de estudo” (NÚÑEZ E PACHECO, 1998, P. 100). Esses autores ainda acrescentam: mesmo que a teoria inicie o procedimento com uma motivação, esta deve ser mantida durante todo o processo de assimilação dos conceitos. Na sequência da etapa motivacional, segue a etapa de estabelecimento do esquema da Base Orientadora da Ação (BOA).

5.2.4.2 Etapa da Base Orientadora da Ação: a influência da orientaçãoo nas aulas práticas

Galperin (1959) assinala que:

> A parte orientadora é a instância diretiva e, precisamente, no fundamental, depende dela a qualidade de execução. Se elaborarmos um conjunto de situações em que se deva aplicar essa ação conforme o plano de ensino, essas situações ditarão um conjunto de exigências para a ação que se forma e, juntamente com elas, um grupo de propriedades que respondem a essas exigências e estão sujeitas à formação (GALPERIN, 1959, p. 27).

Essa etapa deve ser estabelecida em conjunto, professor e aluno, num processo de elaboração do conhecimento o qual se organiza o modelo da atividade que realizarão. O aluno deve se dispor de todos os conhecimentos necessário para o objeto da ação, as condições, os meios de controle e os limites de aplicação da atividade. Como já foi mencionado nesse trabalho, dentre as Bases Orientadoras da Ação estabelecidas por Galperin, optamos por trabalhar com a BOA do tipo III, a escolha se deu pelo fato desta ser uma das base orientadoras mais estudadas e também por apresentar vantagens demonstradas por diversas pesquisas (NÚÑEZ E PACHECO, 1988; H. G. SÁLMINA, 1988; Z. A. RESCHETOVA, 1989; N. F. TALÍZINA, 1987). Entre as vantagens, Núñez e Pacheco (1988) detacam:

> 1. oferece grande possibilidades para o trabalho independente, porque aumentam as oportunidades de trabalho criativo;
> 2. é mais produtiva, por seu caráter generalizado;
> 3. libera o aluno da necessidade de estudar cada fenômeno particular de um assunto. Constitui uma forma nova de armazenamento da informação: em vez de muitso casos particulares com métodos particulares para sua análise, o aluno assimila um método único por meio de casos particulares. O aluno pode perceber a essência atrás de cada apresentaçãoo específica;
> 4. é uma orientação teórica, penetra na essência dos fatos, com os quais consegue contribuir de forma planejada para o desenvolvimento do pensamento teóricos dos alunos;
> 5. garante uma adequada generalizaçãoo dos conteúdos;
> 6. possui uma rapidez inerente, apresenta poucas falhas, estabilidade e possibilidade de maior transferência dos conteúdos para situações novas;
> 7. economiza o tempo para o aprendizado (NÚÑEZ E PACHECO, 1998, p. 102).

No processo da organizaçãoo do ensino, para analisar o desempenho dos estudantes nessa etapa de estabelecimento do esquema da Base Orientadora da Ação, trabalhamos diversas atividades, das quais selecionamos duas (Tarefas 3 e 4 – Unidade II), para realizar a análise dos dados. Assim os estudantes junto com a professora/pesquisadora construíam um sistema de ações para estabelecer o modelo a ser executado com vistas à realização das atividades propostas. Nesse sistema era incluído a orientaçãoo, a execução e o controle. Talízina (1988), assinala que nessa etapa os estudantes recebem orientações necessárias sobre

o objetivo de cada ação, é a etapa em que estes fazem o reconhecimento prévio da ação para que junto com o professor criem condições para elaboração e o cumprimento da BOA.

Na pesquisa, essa etapa foi sem dúvida muito enriquecedora, pois a participação dos estudantes revela que há um processo de organização das ideias em torno do conceito de derivada. Os questionamentos feitos pelos estudantes no momento da organização e elaboração do esquema da BOA foi o que baseou nossas conclusões.

> *"Professora, todas essas taxas que calculamos podem ser interpretadas como inclinação das retas tangentes?" (Estudantes E_2).*
> *" Podemos dizer que a inclinação da reta tangente é a Derivada?"(Estudante E_1).*
> *"Como fica no gráfico? nesse ponto (3, -6)? É a equação da reta tangente a essa parábola? (Estudante E_4).*

Talízina (1988), ressalta que essa etapa tem grande importância na formação da ação. Isso ficou claro na pesquisa, pois este foi o momento da introdução do objeto de estudo. Durante esse processo da elaboração da BOA, os estudantes em contato com as atividades faziam, em conjunto com a professora/pesquisadora, uma mediação entre a ação e a solução da situação-problema. Essa base orientadora da ação precisa ser colocada em prática. Por exemplo, Talízina (1988) adverte, é inútil esperar que se forme o pensamento matemático para começar a ensinar matemática, pois só o ensino de matemática conduz ao desenvolvimento do pensamento matemático. Na sequência da elaboração da BOA inicia o processo de formação da ação material ou materializada.

5.2.4.3 Formação da Ação Material ou Materializada nas Atividades Práticas

A prática da Base Orientadora da Ação se realiza nessa etapa. A ação começa a ser realizada, porém, ainda no plano externo, de modo detalhado os estudantes realizam as operações que são necessárias nas ações. A execução das atividades é feita pelos estudantes e o controle é realizado pela professora/pesquisadora. Salientamos que diante da boa participação dos estudantes na etapa anterior, houve êxito nessa etapa. A execução das atividades eram feita em pares. A interação entre estudantes e professora contribuiu de forma natural para assimilação do conceito de derivada.

Durante a ação do controle feito pelo professor/pesquisador foi buscado um momento especial e significativo na execução das atividade realizada pelos estudantes. Desse modo, observamos que três estudantes, pela forma de questionar e fazer as proposições na tentativa de responder as atividades, demonstraram iniciar o processo de organização das ideias para

assimilação do conceito de Derivadas. Embora os outros dois estudantes não tenham se manifestado, também concluímos que os mesmos organizavam suas ideias corretamente, dado descrito na solução das atividades por eles realizadas.

A base orientadora da ação teve um caráter diretivo e nessa etapa a condição inicial foi determinar o sistema conceitual no qual se insere o conceito de Derivada de Função. O procedimento elaborado para a solução das atividades proporcionou a compreensão do conceito envolvido nas questões e as discussões promoveram momentos de reflexão sobre a importância e aplicabilidade do Cálculo Diferencial e Integral. Ao comparar o desempenho e participação dos estudantes nessa Unidade II e a anterior, Unidade I, percebe-se o avanço. Estima-se que os estudantes já estão familiarizados com a organização do ensino, em que os conceitos surgem a partir dos questionamentos feitos nas *Tarefas de Compreensão Conceitual.*

Nessa etapa a ação é assimilada no plano material ou materializado, de forma não generalizada, porém é realizada de forma consciente de modo a facilitar a preparação do estudante para dá início as etapas verbal e da linguagem externa para si. Assim, todas as atividades realizadas no plano material os estudantes formulam também na linguagem externa para que seja facilitada a verbalização, condição importante para o desenvolvimento mental.

A síntese do desempenho dos estudantes nessa etapa está apresentada na Tabela 22, a média foi obtida a partir das notas nas categorias de: compreensão do problema; estabelecimento de um planejamento; execução do plano e revisão da solução dos problemas trabalhados (Tarefas 3 e 4 – Unidade II).

Tabela 22: Média do desempenho por estudante nas Tarefas 3 e 4 (Unidade II)

Estudantes/Atividades	**Médias**				
	E_1	**E_2**	**E_3**	**E_4**	**E_5**
Atividade-03	5	4	5	3,5	4,5
Atividade-04	5	4	5	4	3
Média geral por estudante	5	4	5	3,8	3,8

Fonte: Dados da pesquisa.

5.2.4.4 Formação da Ação Verbal Externa

Essa etapa foi observada a partir do desempenho dos estudantes nas Tarefas 3 e 4 (Unidade II) da fase mediadora e formativa.

TAREFA 3: um balão esférico começa a ser inflado. Encontre a taxa de crescimento da área da superfície ($S = 4\pi r^2$) em relação ao raio *r* quando *r* é (a) 1 pé, (b) 2 pés e (c) = 3 pés. Que conclusão você pode tirar destes resultados?

TAREFA 4: Uma equação do movimento é dada por $s = 2t^3 - 9t^2$, onde *s* está em metros e *t*, em segundos. Encontre o instante em que a aceleração é zero. Explique sua resposta.

As análises foram elaboradas considerando as descrições verbais dos estudantes. Os estudantes, nessas tarefas, extraem os dados dos problemas corretamente e determinam as condições para a sua solução, pois encontram a área da superfície nas três situações dadas. Os estudantes E_2, E_4 e E_5 são bastantes sucintos na explicação de suas respostas e não fazem uma relação completa dos cálculos com o conceito de Derivada:

> *"Podemos ver que "s" está em função de "r" (raio) a cada unidade que aumenta o "r", 1 pé, ele duplica, assim podemos observar nos resultados das taxas que variam" (Estudante E_2 –T-03).*
> *"A área da superfície do balão aumenta de 2 unidades" (Estudante E_4 – T-03).*

Logo, suas ideias com relação ao conceito de Derivada, apresentam-se razoavelmente conscientes para explicar completamente a interpretação dos procedimentos. Nota-se, que neste momento, os Estudantes E_4 e E_5 ainda estavam dependentes das orientações práticas. Contudo, os estudantes E_1 e E_3 resolveram as tarefas dessa fase totalmente conscientes, extraíram todos os dados relativo aos problemas, elaborando satisfatoriamente explicações para as respostas dadas, demonstrando que compreenderam a aplicaçãoo do conceito de Derivada de Funções.

> *"A taxa de crescimento da área da superfície $S = 4\pi r^2$ está relacionada com a derivada da função S" (Estudante E_1 –T-03).*
> *"Nesse caso a aceleração é encontrada pelo valor da segunda derivada. A aceleração é zero quando aplica a segunda derivada no ponto zero" (Estudante E_3 – T-04).*
> *"Calculei a segunda derivada da função e apliquei em zero, pois a segunda derivada retrata o movimento dos objetos"(Estudante E_1 –T-04).*

Observa-se que os estudantes avançaram na compreensão dos conceitos estudados. A ação verbal aqui foi apresentada através da escrita, da explicação de suas respostas. Núñez e

Pacheco (1998), salientam que os elementos da ação são representados de forma verbal (oral ou escrita), ou seja, o aluno deve resolver a tarefa oralmente ou utilizando a linguagem escrita. A ação se converte numa ação teórica, baseada em palavras e conceitos verbais. "Os alunos podem definir sua compreensão dos conceitos e procedimentos em diferentes domínios, articulando seus pensamentos enquanto resolvem um problema ao assumir o papel de crítico ou de monitor da atividade em grupo" (NÚÑEZ E PACHECO, 1998, p. 105).

Nessa etapa, "[...] a ação vai se transformando até atingir a lógica dos conceitos e portanto, começa a se generalizar" (NÚÑEZ E PACHECO, 1998, p. 106). Talízina (1998) assinala que as etapas anteriores serviam de sistema de indicação que se apresentavam por meio da percepção, a tarefa para o aluno consistia em compreender e dominar os fenômenos.

> A teoria de Galperin considera a palavra como um instrumento fundamental da interiorização. Isso permite separar da ação a imagem e a operação, substituindo-as pelos próprios movimentos linguísticos dos aluno. Os signos têm por princípio uma forma externa, material, e, ao se interiorizarem, tornam-se internos, ideias (NÚÑEZ E PACHECO, 1998, p. 106).

A generalização da ação nesta etapa adquire novas possibilidades que se apresentam na forma verbal da ação. Em particular, por meio da linguagem podem apresentar novas situações que não poderiam ter lugar nas etapas anteriores, explica Talízina (1998). Argumentar as ações durante a sua execução, possibilita o desenvolvimento de estratégias metacognitivas. Assim, explicam Núñez e Ramalho (2012), o aluno vai tomando consciência dos procedimentos que utiliza, porque são esses e não outros, sobre como se aplicam os conceitos, sobre seus êxitos e erros na aprendizagem. Comparando sua atividade com o modelo (BOA) aprende a regular suas ações e, desta forma, forma um tipo de controle interno, isto é, aprende a aprender. Os autores salientam que a análise dos erros facilita a aprendizagem por compreensão.

5.2.4.5 Formação da ação em linguagem externa da si

As observações dessa etapa foram realizadas pelo desempenho dos estudantes no mesmo bloco de atividades que foram trabalhadas na etapa anterior (Tarefas 3 e 4), aplicação do conceito de Derivada. Os resultados apresentados pelos estudantes nas soluções dos problemas, conforme as características independente, generalizada e consciente, foram analisados de acordo com os procedimentos utilizados na etapa verbal externa, onde buscamos evidências da aquisição da forma mental das ideias conceituas de Derivadas, no aspecto reduzido e automatizado.

Dese modo, o desempenho dos estudantes foi caracterizado como parcialmente consciente e totalmente consciente na execução das ações. Os estudantes E_2, E_3 e E_5 solucionaram corretamente os itens das atividades que envolviam os cálculos, explicaram os resultados de modo superficial e não conseguiram descrever com precisão, da forma que se esperava, a relação dos resultados obtidos com o conceito de derivada, sendo que esta era uma ação essencial. Conclusão, estes estudantes apresentaram característica de parcialmente consciente.

Já os estudantes E_1 e E_4, nas tarefas T-03 e T-04 apresentaram um alto grau de assimilação, pois realizaram os cálculos corretamente, demonstrando facilidade ao realizar as ações, descrevendo de forma clara e objetiva, fundamentando de forma oral e escrita como resolveram e porque o modo de solução envolvia o conceito de derivada. Conclui-se então que estes estudantes apresentaram um caráter totalmente consciente na realização das ações.

Essa etapa, como já mencionado nesse trabalho, os estudantes fazem as interpretações para si mesmos, a ação se realiza em silêncio. A forma mental começa ser assumida, a ação reduz-se e automatiza-se rapidamente. É o processo natural para passar à última etapa descrita por Galperin (1959), a etapa da ação mental.

Sintetizamos no Quadro 14 os resultados obtidos nas análises do desempenho da ação verbal externa e externa para si.

QUADRO 14: Síntese do resultado da fase formativa e mediadora

Estudante	**Desempenho na Ação Verbal Externa e externa para si**	
	T-03	T-04
E_1	Totalmente Consciente	Totalmente Consciente
E_2	Parcialmente Consciente	Parcialmente Consciente
E_3	Totalmente Consciente	Totalmente Consciente
E_4	Razoavelmente Consciente	Parcialmente Consciente
E_5	Parcialmente Consciente	Razoavelmente Consciente

Fonte: Dados da pesquisa.

5.2.4.6 Formação da ação em linguagem interna: etapa da ação mental

A etapa mental da ação é a fase final no caminho da transformação da ação de externa para interna. Núñez e Pacheco (1998), explicam que a transformação da ação verbal externa em mental segue o caminho da transformação da linguagem em voz alta em sua imagem sonora. A ação tem uma base de articulação expressa em forma de linguagem externa par si, se reduz e automatiza com rapidez, convertendo-se em uma ação por fórmulas.

As tarefas caracterizam-se por serem do tipo que exige um trabalho independente, que trabalha com a transferência de aprendizagem, que estimula o pensamento criativo ao aplicar o conhecimento em situações novas (NÚNEZ, 2011). Desse modo, nessa etapa da pesquisa, as atividades elaboradas para o desenvolvimento da ação mental estavam incluídas no bloco de questões onde constam aplicações da derivada em diferentes contextos, a atividade que selecionamos para análise, apresenta uma aplicação na área da saúde.

> **TAREFA 5:** Uma cidade é atingida por uma moléstia epidêmica. Os setores de saúde calculam que o número **N** de pessoas atingidas pela moléstia, depois de um tempo ***t*** (medido em dias a partir do primeiro dia de epidemia), é aproximadamente $N = 64t - \frac{t^3}{3}$. Qual a taxa de expansão da epidemia quando $t = 4$?

A proposta de trabalho nesse bloco de atividades foi que os estudantes organizassem seu estudo de forma independente, sem nenhum nível de ajuda, ou seja, os estudantes devem trabalhar as atividades no plano mental. Para tanto, se faz necessário elaborar tarefas que estimulem a criatividade, a transferência de conhecimentos para aplicação em novas situações. Optamos por analisar o desempenho dos estudantes nessa etapa com uma situação-problema na área da saúde que envolve a aplicação do conceito de Derivada.

De todos os resultados analisados, nesta atividade foi onde os estudantes apresentaram melhor desempenho. Demonstrando ter compreendido o objetivo do problema, os estudantes E_1, E_2, E_4 e E_5 desenvolveram todas as ações de maneira totalmente conscientes. De acordo com os procedimentos apresentados na solução, fundamentaram suas respostas em relação ao conceito de derivadas, interpretaram o problema de modo totalmente correto, deixaram claro quando escreveram suas conclusões que o resultado encontrado tem estreita relação com o conceito de Derivada da função.

Apenas o estudante E_3 apresentou característica parcialmente consciente, pois solicitou ajuda da professora, demonstrando que não tinha segurança se encontrava a taxa de expansão da epidemia por meio do cálculo da derivada. *E_3: "Professora, aqui pra eu encontrar essa taxa tenho que calcular a derivada?"* A professora respondeu que sim e perguntou *"porque a*

taxa é dada pela derivada dessa função?" O estudante não soube responder. Deduz-se então, que o estudante não atingiu um grau de generalização que o possibilite aplicar o conceito estudado numa nova situação de modo consciente e independente. Este estudante ainda encontra-se em processo para avançar na independência cognitiva. As ajudas nos momentos iniciais do processo de formação da habilidade garantem essa independência, o que foi perceptível com os demais estudantes.

De todo modo, esses resultados nos indica que houve avanço do processo de assimilação do conceito de derivada, os estudantes passaram a executar as ações com mais autonomia e independência cognitiva. No geral, os estudantes promoveram a transferência da aprendizagem a uma nova situação, aplicando os conceitos do Cálculo em situações reais, como por exemplo, utilizando o conceito de derivadas para calcular a taxa de expansão de uma epidemia (aplicação na área da saúde). A Tabela 23 relaciona a média de desempenho por estudante na atividade 5 da Unidade II.

Tabela 23: Média do desempenho por estudante na Tarefa 5 (Unidade II)

Estudantes/Tarefa	**Média Geral por Estudante**				
	E_1	**E_2**	**E_3**	**E_4**	**E_5**
Tarefa-05	4,8	5	4	5	5

Fonte: Dados da pesquisa.

Galperin (2001b) explica que a etapa mental "[...] se transforma num processo automático e, como consequência disso, precisamente na sua parte verbal, se destaca da consciência; assim, o processo verbal se transforma num processo oculto e, em seu sentido, mais completo, num processo interno" (GALPERIN, 2001b, P. 60 – 61). É nessa etapa que o conteúdo sensorial da ação inicial se transforma em representação mental, "[...] a ação objetal e o pensamento sobre ela constiuem os elos terminais de um processo único, e em sua sucessão genética esboçam o quadro de uma transformação do processo material em processo psíquico" (GALPERIN, 1987, p. 126).

Na seção que segue, discutiremos a orientação e a execução das tarefas de estudo na proposta de Galperin para o conceito de Integral de Função. Essa Unidade III de ensino foi organizada na disciplina Cálculo Diferencial e Integral II.

5.3 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS: INTEGRAL DEFINIDA DE FUNÇÃO DE UMA VARIÁVEL REAL

Como procedemos nas unidades anteriores, as análises nessa Unidade III, partiram da observação e da forma como cada estudante interagiu no decorrer das aulas, sobretudo, pelo desempenho nas tarefas propostas para o estudo de Integral Definida de função de uma variável. De início foram propostas situações problemas envolvendo o cálculo de área por meio da aproximação de uma região por retângulos para formular a ideia de uma integral definida, que é o conceito básico do cálculo integral.

Iniciamos as discussões buscando suscitar nos estudantes uma predisposição para a aprendizagem. A apresentação das tarefas dessa etapa foram planejadas com vistas a perceber o nível de conhecimento dos estudantes acerca dos conceitos estudados. As análises descritivas dos resultados foram subdivididas nas etapas: Nível de Partida; Desempenho na assimilação da avaliação mediadora e formativa e desempenho na assimilação nos conceitos gerais (fase do teste final).

5.3.1 Análises Descritivas do Desempenho nas atividades do Nível de Partida (Diagnóstico Inicial)

O diagnóstico inicial foi desenvolvido por meio da resolução de um bloco de tarefas de compreensão conceitual que envolvia o conceito intuitivo de área. Como proposta de oferecer uma motivação externa aos estudantes, partimos de uma discussão da unificação das ideias do Cálculo, ressaltando este de um modo diferente da matemática já estudada pelos estudante. Como menos estático e mais dinâmico. O Cálculo trata de variação e de movimento, bem como de quantidades que tendem a outras quantidades. Nosso estudo iniciou com os problemas da área e da distância, usados para formular a ideia de uma integral definida, conceito básico do cálculo integral.

A Tarefa-01 foi trabalhada no nível de partida e selecionada para análise, visou calcular a área de uma região contornada por uma curva.

TAREFA 1: Use os retângulos para estimar a área da região parabólica S ilustrada na figura. A área está sob a parábola $y = x^2$ de 0 até 1.

A discussão foi iniciada pelo seguinte questionamento feito pela professora: *"qual o significado da palavra área?"* Houve a participação de todos os estudantes, contudo, as respostas foram dadas a partir da explicação da área de regiões com lados retos. O estudante E_2 exemplificou: *"A área do retângulo é definida pelo produto do comprimento e da largura"*. Por outro lado, os estudantes perceberam a dificuldade de calcular a área sob a curva dada, $y = x^2$. Pela participação dos estudantes, foi fácil deduzir que todos tinham uma ideia intuitiva do que era a área de uma região. Porém, tornar precisa essa ideia, dando uma definição exata de área, nenhum estudante conseguiu.

O diálogo entre a professora e os alunos proseguiu. A professora lembrou que, ao definir uma tangente, primeiro foi aproximado a inclinação da reta tangente por inclinações de retas secantes, tomando o limite dessas aproximações. Então a professora pediu que os estudantes pensassem numa ideia similar para calcular a área da região. Os estudantes tabalhavam em pares, demonstravam interesse em solucionar a questão. Outra orientação dada pela professora: "*Vocês devem aproximar a região S por retângulos e depois tomar o limite das áreas desses retângulos à medida que o número de retângulos vai aumentando"*. Após as orientações os estudantes debruçaram-se para executar a tarefa e a professora realizava o controle.

No contexto educativo, Galperin (1987) afirma que a orientação é a explicação da tarefa proposta, das condições para que essa tarefa seja desenvolvida. O estudante para desenvolver um trabalho precisa saber os objetivos e os passos para desenvolvê-lo, ou seja, precisa receber orientações necessárias para a execução da ação, isto é, a resolução da tarefa que ele assumiu. O autor ainda explica que a orientação, entretanto, não é somente um momento inicial da atividade, é contínua, pode ocorrer durante todo o processo de desenvolvimento da atividade, sendo a base da execução e do controle do desenvolvimento das ações. Sobre o controle, Núñez; Ramalho e Albino (2013, p. 400), esclarecem que, "[...] a parte do controle se dirige ao acompanhamento da ação, à comparação e a correção de acordo com o modelo da orientação".

No Quadro 15 está descrito as características das ações realizadas pelos estudantes na Tarerfa-01 da Unidade III. Com a proposição dessa tarefa foi estabelecido o nível de partida para a compreensão do conceito de Integral de Função.

QUADRO 15: Resultado das Características das Ações – Diagnóstico Inicial

Análises da Tarefa-01 – Unidade III		
Categoria	**Compreender o problema**	**D-Quanti**
E_1	O estudante extrai os elementos do problema. Determina as condições para a solução e determina de modo correto o objetivo do problema, pois faz a divisão da região em retângulos para o cálculo da área conforme orientação recebida.	5
E_2	O estudante compreende o objetivo, extrai os elementos do problema corretamente e divide a área da região com retângulos para o cálculo da área hachurada.	5
E_3	Fica claro que o estudante compreende o objetivo do problema, extrai os dados corretamente, divide a região hachurada em retângulos e explica que a soma da área desses retângulos se aproxima da área da região S.	5
E_4	O estudante determina as condições do problema, extrai os dados de modo correto. Contudo, mesmo subdividindo a região S em retângulos e calculando a área de cada um, não deixa claro que a soma dessas áreas se aproxima da área da região S.	4
E_5	O estudante deixou claro que compreendeu o objetivo do problema, pois extrai os dados corretamente, fazendo a divisão da região S em retângulos e após a soma das áreas desses retângulos, aponta que o resultado se aproxima do valor da área da região S.	5
Categoria	**Construir o modelo matemático**	**D-Quanti**
E_1	A construção do modelo matemático não se aplica (já dado no problema). Realiza implicitamente as análises das unidades do modelo ao fazer relação da soma das áreas dos retângulos com a aproximação da área da figura dada.	5
E_2	A construção do modelo matemático não se aplica (já dado no problema). Realiza implicitamente através das suas justificativas as análises das unidades do modelo ao fazer a relação da soma das áreas do retângulo com o valor aproximado da área da figura.	5
E_3	O estudante realiza as análises das unidades de medidas do modelo matemático. Embora a atividade não tenha modelo para ser construído, o estudante compreende o objetivo, divide a região em retângulos e faz a relação da soma da área desses retângulos com a área da figura.	5
E_4	O estudante faz as análises parcialmente correta. Apesar de usar o procedimento correto, conforme orientação dada, dividindo a área da região S em retângulos e calculando as áreas desses retângulos, não explica na sua resposta que a	4

	soma dessas áreas se aproxima da área da região S.	
E_5	O estudante faz a análise das unidades de medida do modelo corretamente, pois subdivide a região dada em retângulos, calcula as áreas desses retângulos e explica que o resultado se aproxima do valor da área da região S.	5
Categoria	**Solucionar o modelo matemático**	**D-Quanti**
E1	O estudante seleciona o método correto para solucionar o modelo matemático e soluciona de forma totalmente correto, pois encontra o valor aproximado para a área da região S.	5
E2	O estudante seleciona o método correto para solucionar o modelo matemático e resolve corretamente.	5
E3	O estudante utiliza o método correto para solucionar o modelo matemático e soluciona de forma totalmente correto, pois identifica que a soma das áreas dos retângulos é uma aproximação da área da figura dada.	5
E4	No que concerne a seleção do método matemático para solucionar o modelo, o estudante faz corretamente. Apresenta a solução parcialmente correta, pois embora tenha dividido a figura em retângulos e calculado a soma das áreas desses retângulos, não exprime que o resultado encontrado se aproxima do valor da área da região S.	4
E5	Realiza a seleção do método matemático para solucionar o modelo matemático corretamente. Apresenta a solução correta, relacionando a soma das áreas dos retângulos com a área da figura dada.	5
Categoria	**Interpretar a solução**	**D-Quanti**
E1	O estudante extrai os resultados significativos fazendo relação com o objetivo do problema. Dá a resposta correta, pois faz a interpretação do cálculo da área da região S a partir da soma das áreas dos retângulos.	5
E2	O estudante interpreta e faz a relação com o objetivo do problema de modo totalmente correto. Compreende o objetivo do problema, porém não faz a interpretação da solução na sua totalidade.	4
E3	Extrai os resultados significativos fazendo relação com o objetivo do problema. Dá a resposta correta, pois faz a interpretação da solução (cálculo da área da região S) de acordo com o obetivo descrito para a questão.	5
E4	Interpreta e faz a relação com o objetivo do problema de modo parcialmente correto. Compreende o objetivo do problema, porém não faz a interpretação da solução de modo a indicar total compreensão.	3
E5	Realiza um relatório baseado no objetivo do problema, apresenta indicadores de que compreende e interpreta totalmente a solução.	5

Podemos observar, que os estudantes estão progressivamente elevando a qualidade de

internalização dos conceitos trabalhados no ensino de Cálculo. Segue, na Tabela 24, a síntese do desempenho dos estudantes nas atividades do nível de partida (Diagnóstico Inicial), na Unidade III – estudo da Integral.

Tabela 24: Síntese do Desempenho dos Estudante na Fase do Nível de Partida – Unidade III

A	**1ª E**	**2ª E**	**3ª E**	**4ª E**	**Contexto essencial do problema**
nº 1	5	5	5	5	Solucionar o problema da área da região S fazendo uso do conceito do limite das somas das áreas dos retângulos proximantes.
Estudante E_2					
nº 1	5	5	5	4	Solucionar o problema do cálculo da área da região S fazendo uso do conceito do limite das somas das áreas dos retângulos proximantes.
Estudante E_3					
nº 1	5	5	5	5	Solucionar o problema do cálculo da área da região S fazendo uso do conceito do limite das somas das áreas dos retângulos proximantes.
Estudante E_4					
nº 1	4	4	4	3	Solucionar o problema do cálculo da área da região S fazendo uso do conceito do limite das somas das áreas dos retângulos proximantes.
Estudante E_5					
nº 1	5	5	5	5	Solucionar o problema do cálculo da área da região S fazendo uso do conceito do limite das somas das áreas dos retângulos proximantes.

Legenda: (T) Tarefa; (1ªE) compreensão do problema; (2ªE) estabelecimento de um plano; (3ªE) execução do plano; (4ªE) revisão da solução.

Fonte: Dados da pesquisa

Esses resultados demonstram que os estudantes apresentam um nível de habilidade significativamente consciente para a solução da atividade proposta no nível de partida. Dado que essa etapa se trabalha a motivação, buscamos relacionar as situações problemas de modo a criar necessidades cognitivas para promover a compreensão dos conceitos de Integral. "Os motivos têm uma importância fundamental na aprendizagem, uma vez que atuam como orientadores, dinamizadores e reguladores de todo o processo" (NÚÑEZ E RAMALHO, 2012, p. 165).

Esses autores aconselham trabalhar com atividades em forma de situações-problemas, pois asseguram que a resolução de problemas tem se mostrado uma via eficiente para a motivação da aprendizagem. Eles explicam ainda que a tarefa se converte em um problema cognitivo, que deve satisfazer os seguintes requisitos: "a) apresentar uma dificuldade cognitiva para os alunos, ou seja, requer reflexão sobre o problema objeto de estudo; b) despertar o interesse cognitivo nos alunos; c) se apoia na experiência anterior e no conhecimento dos alunos" (NÚÑEZ E RAMALHO, 2012, p. 165). Tais características foram observadas durante o planejamento das Atividades de Compreensão Conceitual, sobretudo, nas questões trabalhadas no nível de partida para assimilação dos conceitos de Limite, Derivada e Integral de Funções.

5.3.2 Análises Descritivas do Desempenho da Assimilação na avaliação Formativa e Mediadora

O planejamento das atividades a serem trabalhadas para assimilação do conceito de Integral se deu a partir das observações feitas na etapa anterior, a do nível de partida. Seguiu-se por base os conhecimentos dos estudantes, esse procedimento foi de extrema importância na condução do processo da fase formativa, que é a etapa mais longa e possui um maior número de aulas. Os problemas selecionados foram determinantes para a assimilação do conceito de Integral pelos estudantes, demonstrado no desempenho individual durante o processo. No decorrer do procedimento foram trabalhadas diferentes atividades, contudo, a nossa análise nessa fase, se deu por meio de uma atividade proposta em uma avaliação formal.

De modo geral, as atividades trabalhadas na fase mediadora e formativa tiveram o objetivo de calcular a integral definida de uma função a partir do estudo da área de retângulos utilizando a soma de *Rieman*, entre outras técnicas. Os resultados da Tarefa-02 serviu para análise nessa fase.

TAREFA 2: Ache uma aproximação para a integral $\int_0^4 (x^2 - 3x)dx$ usando uma soma de Riemann com extremos direitos e n = 8. Explique o significado do cálculo realizado.

Os detalhes do desenvolvimento das ações realizadas pelos estudantes na Tarefa-02 estão relacionados no Quadro 16 e demonstram o desempenho qualitativo de acordo com as características das etapas das *Tarefa de Compreensão Conceitual*, relacionadas com o

conceito de cada situação que representa a ação essencial, para encontrar a solução. Assim como nas outras unidades já apresentadas na assimilação dos conceitos de Limite e Derivada, os inidicadores quantitativos representam o desempenho das ações quanto a realização completa do indicador essencial e os demais associados a ação, classificados numa escala de [1–5].

QUADRO 16: Resultado das Características das Ações – Fase Mediadora e Formativa

Análises da Tarefa-02 – Unidade III		
Categoria	**Compreender o problema**	**D-Quanti**
E_1	O estudante extrai os elementos do problema. Compreende o objetivo e determina as condições para a solução de modo correto, pois usa a soma de Riemann para calcular a integral.	5
E_2	O estudante compreende o objetivo do problema, extrai os elementos corretamente e calcula a integral usando a soma de Riemann.	5
E_3	Fica claro que o estudante compreende o objetivo do problema, pois o mesmo extrai os dados corretamente, calculando a integral nos limites dados usando a soma de Riemann	5
E_4	O estudante determina as condições do problema, porém não extrai os dados do problema de modo correto, cometendo um erro no cálculo da soma de Riemann	3
E_5	O estudante deixou claro que compreendeu o objetivo do problema, pois extrai os dados corretamente, fazendo o cálculo da integral por meio da soma de Riemann satisfatoriamente.	5
Categoria	**Construir o modelo matemático**	D-Quanti
E1	A construção do modelo matemático não se aplica (já dado no problema). O estudante determina corretamente as variáveis e realiza implicitamente as análises das unidades do modelo ao fazer relação da soma de Riemann com o resultado da integral.	5
E2	A construção do modelo matemático não se aplica (já dado no problema). Realiza implicitamente através das suas justificativas as análises das unidades do modelo ao fazer a relação da soma de Riemann com o cálculo da integral.	5
E3	O estudante realiza as análises das unidades de medidas do modelo matemático. Embora a atividade não tenha modelo para ser construído, o estudante compreende o objetivo e determina as variáveis de modo correto. Faz a relação da soma de Riemann com o resultado da integral no intervalo dado.	5

E4	Apesar de usar o procedimento correto, não determina as variáveis corretamente e, portanto, o estudante faz a análise das unidades de medidas do modelo matemático parcialmente correta.	3
E5	O estudante faz a análise das unidades de medida do modelo corretamente, pois determina as variáveis e incógnitas da função dada de modo correto.	5
Categoria	**Solucionar o modelo matemático**	D-Quanti
E1	O estudante seleciona o método correto para solucionar o modelo matemático e soluciona de forma totalmente correto, pois encontra o valor da integral nos extremos dados.	5
E2	O estudante seleciona o método correto para solucionar o modelo matemático e resolve corretamente, encontrando corretamente o resultado.	5
E3	O estudante utiliza o método correto para solucionar o modelo matemático e soluciona de forma totalmente correto, pois calcula o valor da integral nos extremos dados a partir da soma de *Riemann*.	5
E4	No que concerne a seleção do método matemático para solucionar o modelo, o estudante faz corretamente. Apresenta a solução parcialmente correta, pois embora utilize a soma de Riemann para solucionar o problema, retira dados errados no problema.	4
E5	Realiza a seleção do método matemático para solucionar o modelo matemático corretamente. Apresenta a solução correta, relacionando o cálculo da soma de *Riemann* com o valor da integral nos extremos.	5
Categoria	**Interpretar a solução**	D-Quanti
E1	O estudante extrai os resultados significativos fazendo relação com o objetivo do problema. Dá a resposta correta, pois faz a interpretação do cálculo da integral como o resultado da soma de *Riemann* para o *n* dado.	5
E2	O estudante interpreta e faz a relação com o objetivo do problema de modo totalmente correto. Compreende o objetivo do problema, fazendo a interpretação da solução na sua totalidade.	5
E3	Extrai os resultados significativos, fazendo relação com o objetivo do problema. Dá a resposta correta, pois faz a interpretação de que a soma da área dos n retângulos equivale ao valor da integral.	5
E4	Interpreta e faz a relação com o objetivo do problema de modo parcialmente correto. Compreende o objetivo do problema, porém não faz a interpretação da solução de modo a indicar total compreensão, pois utiliza dados errados na solução.	3

E5	Realiza um relatório baseado no objetivo do problema, apresenta indicadores de que compreende e interpreta totalmente a solução.	5

Conforme o detalhamento das ações realizadas pelos estudantes na Tarefa-02 da fase mediadora e formativa, observamos que somente o estudante E_4 demonstrou nível na execução das ações pouco consciente, pois ao cometer um erro para extrair os dados do problema, o resolve de modo parcialmente correto, não relacionando a soma das áreas dos *n* retângulos na soma de *Riemann* com o cálculo da integral nos extremos dados. Os demais estudantes desenvolveram as ações em nível totalmente consciente, demonstrando compreensão ao extrair os dados do problema, fazendo o cálculo da soma de *Riemann* corretamente e relacionando ao cálculo da integral, sendo essa a condiçãoo essencial do problema.

Segue, na Tabela 25, a síntese do desempenho dos estudantes nas atividades da fase mediadora e formativa, na Unidade III – estudo da Integral.

Tabela 25: Síntese do Desempenho dos Estudante na Fase Mediadora e Formativa – Unidade III

T	**1ª E**	**2ª E**	**3ª E**	**4ª E**	**Contexto essencial do problema**
nº 2	5	5	5	5	Solucionar o problema da área da região S fazendo uso do conceito do limite das somas das áreas dos retângulos proximantes.
Estudante E_2					
nº 2	5	5	5	5	Solucionar o problema do cálculo da área da região S fazendo uso do conceito do limite das somas das áreas dos retângulos proximantes.
Estudante E_3					
nº 2	5	5	5	5	Solucionar o problema do cálculo da área da região S fazendo uso do conceito do limite das somas das áreas dos retângulos proximantes.
Estudante E_4					
nº 2	3	3	4	3	Solucionar o problema do cálculo da área da região S fazendo uso do conceito do limite das somas das áreas dos retângulos proximantes.
Estudante E_5					
nº 2	5	5	5	5	Solucionar o problema do cálculo da área da região S fazendo uso do conceito do

		limite das somas das áreas dos retângulos proximantes.

Legenda: (T) Tarefa; (1ªE) compreensão do problema; (2ªE) estabelecimento de um plano; (3ªE) execução do plano; (4ªE) revisão da solução.

Fonte: Dados da pesquisa

Portanto, suas ideias com relação a solução do problema, o qual envolve o cálculo da integral por meio da soma de *Riemann*, foram identificadas como totalmente conscientes. Rezende e Valdes (2006) salientam que as ações classificadas como conscientes e racionais, garantem que os estudantes foram capazes de colocar em prática as orientações oferecidas pela Base Orientadora da Ação (BOA) para organizar o ensino. O grau de consciência, segundo Núñez e Ramalho (2012), se forma em primeiro lugar, quando o aluno toma consciência da lógica da estrutura da atividade que realiza, em segundo lugar, quando o aluno é capaz de explicar suas ações em voz alta ou de forma escrita.

5.3.3 Análises Descritivas do Desempenho da Assimilação dos Conceitos Gerais – Etapa Final

No teste final dessa Unidade III, as atividades trabalhadas tiveram por objetivo avaliar a compreensão dos estudantes acerca da aplicação do Teorema Fundamental do Cálculo. Esse Teorema, é um dos mais importante do Cálculo, pois estabelece uma conexão entre os dois ramos do Cálculo: o Cálculo Diferencial e o Cálculo Integral, apresenta uma forma de computar as áreas e integrais muito mais facilmente, sem que seja necessário calculá-las como limite de somas, a exemplo do cálculo utilizando a soma de *Riemann*. A análise nessa etapa foi feita a partir do desempenho dos estudantes na Tarefa-03.

TAREFA 3: Uma empresa possui uma máquina que se deprecia a uma taxa contínua $f = f(t)$, onde t é o tempo medido em meses desde seu último recondicionamento. Como a cada vez que a máquina é recondicionada incorre-se a um custo fixo A, a empresa deseja determinar o tempo ótimo T (em meses) entre os recondicionamentos. Explique por que $\int_0^t f(s)ds$ representa a perda do valor da máquina sobre o período de tempo t desde o último recondicionamento.

O propósito principal de trabalhar com problemas dessa natureza nessa fase da pesquisa, foi visualizar a aprendizagem dos estudantes por meio do progresso nas etapas descritas por Galperin (1959) na sua teoria, que passa de material a mental. O detalhamento das ações realizadas pelos estudantes para a solucionar essa atividade está descrito no Quadro 17.

QUADRO 17: Resultado das Características das Ações – Fase Final

Análises da Tarefa-03 – Unidade III		
Categoria	**Compreender o problema**	**D-Quanti**
E_1	O estudante extrai os elementos do problema. Compreende o objetivo e determina as condições para a solução de modo correto, pois elabora a sua resposta fazendo uso do Teorema Fundamental do Cálculo.	5
E_2	O estudante compreende o objetivo do problema, extrai os elementos corretamente, contudo, não organiza os dados de modo a representar a perda do valor da máquina sobre o tempo de forma totalmente correto.	4
E_3	Fica claro que o estudante compreende o objetivo do problema, pois o mesmo extrai os dados corretamente, descrevendo a integral como a perda do valor da máquina.	5
E_4	O estudante determina as condições do problema, extrai os dados do problema de modo correto, mas não deixa claro como da integral está relacionado a perda do valor da máquina sobre o período dado.	3
E_5	O estudante deixou claro que compreendeu o objetivo do problema, pois extrai os dados corretamente, fazendo a relação do cálculo da integral com a perda do valor da máquina no tempo dado de modo satisfatório.	5
Categoria	**Construir o modelo matemático**	D-Quanti
E1	A construção do modelo matemático não se aplica (já dado no problema). O estudante determina corretamente as variáveis e realiza as análises das unidades do modelo ao que a integral dada expressa a perda do valor da máquina no tempo dado.	5
E2	A construção do modelo matemático não se aplica (já dado no problema). Realiza implicitamente através das suas justificativas as análises das unidades do modelo de modod parcialmente correto.	4
E3	O estudante realiza as análises das unidades de medidas do	5

	modelo matemático. Mesmo que a atividade não tenha modelo para ser construído, o estudante compreende o objetivo e determina as variáveis de modo correto. Faz o uso do Teorema Fundamental do Cálculo para expressar a perda depreciação do valor da máquina.	
E4	O estudante faz a análise das unidades de medidas do modelo matemático parcialmente correta, pois não deixa claro na organização dos dados que a integral representa a perda do valor da máquina.	3
E5	O estudante faz a análise das unidades de medida do modelo corretamente, pois determina as variáveis e organiza os dados para resolver de modo a indicar que a integral representa a perda do valor da máquina	5
Categoria	**Solucionar o modelo matemático**	D-Quanti
E1	O estudante seleciona o método correto para solucionar o modelo matemático e resolve de forma totalmente correto, pois encontra demonstra a relação da integral com a perda do valor da máquina.	5
E2	O estudante seleciona o método correto para solucionar o modelo matemático e resolve de modo parcialmente correto, encontrando de forma implícita a relação da integral com a depreciação da máquina.	4
E3	O estudante utiliza o método correto para solucionar o modelo matemático e soluciona de forma totalmente correto, pois calcula relaciona a integral ao valor da máquina no tempo igual a t.	5
E4	No que concerne a seleção do método matemático para solucionar o modelo, o estudante faz parcialmente correto. Apresenta a solução sem explicar a relação da integral com a perda do valor da máquina, sendo esta a ação essencial do problema.	3
E5	Realiza a seleção do método matemático para solucionar o modelo matemático corretamente. Apresenta a solução correta, relacionando o cálculo da integral com o valor da depreciação da máquina.	5
Categoria	**Interpretar a solução**	D-Quanti
E1	O estudante extrai os resultados significativos fazendo relação com o objetivo do problema. Dá a resposta correta, pois explica que a integral representa a depreciação do valor da máquina.	5
E2	O estudante interpreta e faz a relação com o objetivo do	4

	problema de modo parcialmente correto. Compreende o objetivo do problema, mas não faz a interpretação da solução na sua totalidade.	
E3	Extrai os resultados significativos, fazendo relação com o objetivo do problema. Dá a resposta correta, pois faz a interpretação de que a integral representa o valor da depreciação da máquina.	5
E4	Interpreta e faz a relação com o objetivo do problema de modo parcialmente correto. Compreende o objetivo do problema, porém não explica a integral como a perda no valor da máquina.	3
E5	Realiza um relatório baseado no objetivo do problema, apresenta indicadores de que compreende e interpreta totalmente a solução, pois explica de modo detalhado porque a integral representa a perda do valor da máquina.	5

O detalhamento das ações realizadas pelos estudantes na Tarefa-03, indica que o estudante E_3 demonstrou nível na execução pouco consciente, o estudante E_4, parcialmente consciente e os demais estudantes apresentaram nível totalmente conscientes, pois executaram a ação essencial do problema de modo satisfatório. No geral, fizeram uso do Teorema Fundamental do Cálculo, explicando o contexto do problema de forma independente, sem o apoio de material externo e do professor, dando indícios que a assimilação do conceito já se estabelece no plano mental. A síntese do desempenho dos estudantes nessa etapa está apresentada na Tabela 26.

Tabela 26: Síntese do Desempenho dos Estudante na Fase Final – Unidade III

T	**1ª E**	**2ª E**	**3ª E**	**4ª E**	**Contexto essencial do problema**
nº 3	5	5	5	5	Solucionar o problema explicando porque $\int_0^t f(s)ds$ representa a perda do valor da máquina sobre o período de tempo *t*.
Estudante E_2					
nº 3	4	4	4	4	Solucionar o problema explicando porque $\int_0^t f(s)ds$ representa a perda do valor da máquina sobre o período de tempo *t*.
Estudante E_3					
nº 3	5	5	5	5	Solucionar o problema explicando porque

					$\int_0^t f(s)ds$ representa a perda do valor da máquina sobre o período de tempo *t*.
Estudante E_4					
nº 3	3	3	3	3	Solucionar o problema explicando porque $\int_0^t f(s)ds$ representa a perda do valor da máquina sobre o período de tempo *t*.
Estudante E_5					
nº 3	5	5	5	5	Solucionar o problema explicando porque $\int_0^t f(s)ds$ representa a perda do valor da máquina sobre o período de tempo *t*.

Legenda: (T) Tarefa; (1ªE) compreensão do problema; (2ªE) estabelecimento de um plano; (3ªE) execução do plano; (4ªE) revisão da solução.

Fonte: Dados da pesquisa

Os dados indicam que a estratégia de apresentar tarefas diferentes nas quais se graduam os níveis de ajuda para a solução possibilita que o estudante avance na independência cognitiva. "As ajudas nos momentos adequados contribuem para o desenvolvimento da independência cognitiva, visto que o aluno aprende com a ajuda do outro como mediador" (NÚÑEZ; RAMALHO E ALBINO, 2013, p. 409). Nessa etapa, Talízina (1985) adverte que deve-se alcançar a possibilidade de generalização máxima, a síntese máxima na execução da tarefa, uma total independência em relação às formas externas. Nesse momento a habilidade de explicar o conceito de integral deve ser realizada no plano mental. Na sequência, apresentamos as análises da Unidade III (conceito de Integrais), sob o ponto de vista da teoria de Galperin, destacando a descrição etapa por etapa.

5.3.4 Análises por Etapas de Formação das ações Mentais segundo Galperin – Unidade III

A teoria de Galperin explica a assimilação do conhecimento em etapas, sua essência consiste em primeiro encontrar a forma adequada da ação; segundo, encontrar a forma material que representa a ação, e, terceiro, transformar a ação externa em interna. Nessa transformação, explicam Núñez e Pacheco (1998), são produzidas mudanças na forma da ação. Quando se estrutura uma ação completamente nova, a forma da ação é primeiro material, em seguida, verbal e, por último, mental. A análise do desempenho dos estudantes na internalização do conceito de Integral está apresentada nessa ordem.

5.3.4.1 Etapa Motivacional

Galperin (2001c) defende que a motivação deve permear todas as demais etapas, para o autor, se o aluno estiver motivado para as tarefas de ensino, é possível a formação das ações e dos conhecimentos que compõem a estrutura da ação. Portanto, explica Oliveira (2011, p. 222), "[...] deve-se assegurar, em todo o processo de apropriação da habilidade, a existência de motivos necessários para que o aluno cumpra, motivado, as tarefas de estudo e as atividade que lhe são ofertadas".

Nesse sentido, como possibilidade de introduzir o conceito de Integral de funções e despertar o interesse dos estudantes, organizamos a etapa inicial do ensino por meio de questionamentos que pudessem movimentar os estudantes na busca de respostas: *"qual o significado da palavra área?"; "como podemos calcular a área sob uma curva?; "o que devemos fazer pra solucionar o problema?* Por meio desses questionamentos a professora/pesquisadora pretendia identificar as necessidades dos estudantes, além de inseri-los ativamente na tarefa, tornando-os sujeitos no processo de ensino e aprendizagem.

A Tarefa-01 (Unidade III), foi utilizada pra análise nessa etapa:

TAREFA 1: Use os retângulos para estimar a área da região parabólica S ilustrada na figura. A área está sob a parábola $y = x^2$ de 0 até 1.

O envolvimento dos estudantes, mediante a busca de solução para os questionamentos, foi a nossa garantia da existência de motivos necessários para que estes cumpram a tarefa de forma adequada. Houve a participação dos estudantes, respondendo os questionamentos por meio de exemplos, o que nos fez deduzir que todos tinham uma ideia intuitiva do que era a área de uma região. Embora os estudantes, no momento inicial, não tivessem esboçado uma ideia precisa para a área da região S, após as arientações, conseguiram resolver o problema de forma correta.

Sintetizamos o desempenho dos estudantes nessa etapa e apresentamos na Tabela 27, a média foi obtida a partir das notas nas categorias de: compreensãoo do problema;

estabelecimento de um planejamento; execução do planejamento e análise da solução encontrada no problema (Atividade 1- Unidade III).

Tabela 27: Média do desempenho por estudante na Tarefa-01 (Unidade III)

Estudantes/Tarefa	Médias				
	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
Média geral por estudante	5	4,8	5	3,8	5

Fonte: Dados da pesquisa.

A etapa que segue estabelece uma orientação diretiva fundamental para a qualidade na execução da tarefa pelo estudante, é o momento da elaboração do esquema da Base Orientadora da Ação.

5.3.4.2 Etapa da Base Orientadora da Ação: a influência da orientação nas aulas práticas

Sobre a elaboração do esquema da Base Orientadora da Ação, Galperin (2011c) salienta que ter um plano de ação não significa que o aluno domine a ação, contudo o fato de tê-lo lhe garante a possibilidade de executar a ação sem ter habilidade necessária para isso. Núñez (2009), explica que a Base Orientadora da Ação constitui o modelo da atividade, um projeto de ação que deve refletir todas as partes estruturais e funcionais da atividade (orientação, execução e controle). Portanto, o conteúdo da base orientadora da ação deve subsidiar o aluno com todas as condições necessárias para a estruturação correta da habilidade a ser desenvolvida. No caso do nosso trabalho, a BOA do tipo III constitui a orientação sobre como compreender os conceitos chaves do Cálculo: Limite, Derivada e Integral.

Talízina (1988) esclarece que esta etapa é uma das mais importantes no processo de formação da ação. Na construção dessa base que é dado o início da introdução do objeto de estudo. É necessário trabalhar com o sistema de características suficientes e necessárias que caracterizam os conceitos trabalhados no Cálculo. Ao professor cabe oferecer um conjunto de procedimentos que possibilite ao aluno construir de forma independente a Base Orientadora da Ação.

Essa etapa, em todas as unidades, proporcionou maior visibilidade sobre a participação dos estudantes, foi o momento de visualizar a organização das ideias em torno do conceito de Integral. Ocorre um trabalho coletivo, em pares, professor e aluno, na busca de construir um

sistema de ações para o estabelecimento do modelo a ser executado na solução das tarefas. A orientação parte do professor para que o aluno tenha a possibilidade de construir de forma independente a Base Orientadora da Ação. Assim, os estudantes devem decobrir o conjunto de características essenciais para a compreensão e aplicação do conceito de Integral na solução das tarefas.

A construção da Base Orientadora da Ação é marcada por questionamentos levantados pelos estudantes com vistas a traçar um plano que os levem a solução dos problemas. Com relação ao grau de consciência, o estudante E_4 demonstrou nível na execução das ações pouco consciente, tendo em vista que cometeu um erro ao extrair os dados do problema, o resolve de modo parcialmente correto, não consegue relacionar a soma das áreas dos *n* retângulos na soma de *Riemann* com o cálculo da integral nos extremos dados. Contudo, os demais estudantes desenvolveram as ações em nível totalmente consciente, demonstraram compreensão ao extrair os dados do problema e fizeram o cálculo da soma de *Riemann* corretamente, relacionando ao cálculo da integral, sendo essa a condiçãoo essencial do problema.

O grau de consciência, revela a capacidade dos estudantes para elaborar um esquema de solução das tarefas de acordo com os fundamentos propostos e explicar como fazem o planejamento. Segundo Núñez e Pacheco (1998), o grau de consciência se vincula aos conhecimentos processuais e procedimentais relacionados ao modo do *saber fazer*. Foi possível também observar, durante a elaboração da Base Orientadora da Ação, o grau de independência dos estudantes. É importante destacar que todos os estudantes trabalharam de forma independente, executando com sucesso as tarefas com ou sem ajuda externa.

O grau de independência está relacionado ao momento em que os estudantes podem elaborar sozinhos uma estratégia para solucionar os problemas, em que eles podem desenvolver as ações sem apoio ou ajuda. Para se chegar a esse nível, adverte Núñez e Ramalho (2012), é necessário possibilitar um tipo de ajuda que permita a realização correta das ações e a transição de uma etapa, a outra.

5.3.4.3 Etapa da Formação da Ação no Plano Material ou Materializada

É nessa etapa que se realiza a prática da ação. Essa prática ainda ocorre no plano externo, de modo detalhado os estudantes realizam as operações que são necessárias nas ações. “Nessa etapa o aluno executa a ação e o professor controla o cumprimento de cada uma das operações. A execução da tarefa realiza-se num trabalho com pares ou em grupos”

(NÚÑEZ E PACHECO, 1998, p. 103). Os alunos se apoiam nos esquemas da BOA. Como na etapa de elaboração da Base Orientadora da Ação, os estudantes apresentaram bom desempenho, não tiveram dificuldades em executar as ações para solucionar os problemas.

O procedimento elaborado permitiu a compreensão do conceito de Integral envolvido nas questões, as discussões e interação entre professor e alunos promoveu momentos enriquecedores de reflexão sobre porque e como se aplica o cálculo de Integrais nas diferentes situações apresentadas, como por exemplo, o cálculo de uma área como o limite da soma das áreas dos retângulos (Tarefa-01 dessa unidade). Na análise geral dessa etapa, tendo em vista a resolução da Tarefa-02, observamos que os estudantes extrairam os dados significativos do problema, levando em conta seu objetivo. Expressaram a resposta corretamente, fazendo a interpretação do cálculo da integral como o resultado da soma de *Riemann*.

Desse modo, podemos considerar que os estudantes revelam os níveis de desenvolvimento intelectual, como resultado do processo de assimilação do conceito de Integral, demonstrando um caráter consciente da ação. Talízina (2001), explica que o grau de consciência está relacionado com a compreensão da lógica da estrutura da atividade que o estudante realiza, e também, com a forma em que se apresenta a tarefa, que exige uma reflexão consciente sobre os modos de resolução das situações-problemas. A síntese do desempenho dos estudantes nessa fase, foi extraída a partir da média das notas nas categorias de: compreensão do problema; estabelecimento de um plano; execução do plano e análise da solução.

Tabela 27: Média do desempenho por estudante na Tarefa-02 (Unidade III)

Estudantes/Tarefa	**Médias**				
	E_1	**E_2**	**E_3**	**E_4**	**E_5**
Média geral por estudante	5	5	5	3,3	5

Fonte: Dados da pesquisa.

5.3.4.4 Etapa da Formação da Ação Verbal Externa

Nessa etapa, a análise foi realizada a partir do desempenho dos estudantes na Tarefa-02, cujo objetivo foi a compreensão do conceito de Integral a partir da soma de *Riemann*.

TAREFA 2: Ache uma aproximação para a integral $\int_0^4 (x^2 - 3x)dx$ usando uma soma de Riemann com extremos direitos e n = 8. Explique o significado do cálculo realizado.

O aprendizado da linguagem é uma condição importante para o desenvolvimento mental, pois o conteúdo da experiência histórica do homem, a experiência histórico-social, não está consolidada apenas nas coisas materiais, mas também está distribuída e refletida na forma verbal da linguagem (NÚÑEZ E PACHECO, 1998).

Nessa etapa o ponto chave da nossa observação foi o modo pelo qual os estudantes explicavam o significado do cálculo que realizavam para fazer a aproximação do valor da integral pela soma de *Riemann*. Essa ação foi observada tanto de forma oral, no momento da interação e organização das ideias pelos estudantes, como pela escrita nas respostas dadas para a segunda parte da Tarefa-02.

Os estudantes E_1, E_2, E_3 e E_5 demonstraram-se bastante seguros em relação as atividades realizadas nessa Unidade III (estudo do conceito de Integral). As transcrições que seguem dizem respeito às explicações desses estudantes sobre o significado do cálculo feito na Tarefa-02:*"A soma da área dos 8 retângulos é aproximadamente igual ao valor da integral* $\int_0^4 (x^2 - 3x)dx$*" (E_1 - A-02). "O valor encontrado na soma da área dos retângulos, é aproximadamente igual a área sob a curva* $x^2 - 3x$ *no intervalo de 0 a 4"(E_2 _ A-02). "A área da região dada por* $x^2 - 3x$ *no intervalo [0, 4] se aproxima do limite da soma das áreas dos retângulos aproximantes" (E_5).*

> Na etapa da linguagem externa, a linguagem se converte em portadora de todo o processo: tanto da tarefa como da ação, pelo que o aluno deve orientar-se não somente para o conteúdo do objeto mas também para a expressão verbal, evitando o formalismo das ações verbais (NÚÑEZ E PACHECO, 1998, p. 105).

A questão da linguagem, como via de comunicação, é de fundamental importância na teoria de Galperin. Quando há uma exigência da argumentação durante a solução do problema, desenvolve a capacidade do aluno para ter consciência sobre o que faz (NÚÑEZ; RAMALHO; ALBINO, 2013). Essa habilidade de se ter consciência sobre o que se faz, argumentar e explicar, Talízina (2001) chama de reflexão. A etapa seguinte é a da formação da linguagem externa para si, essa não difere da etapa anterior em relação ao caráter detalhado e de generalização.

5.3.4.5 Etapa da Formação da Ação em Linguagem Externa para si

Os resultados apresentados pelos estudantes na resolução das atividades para análise dessa etapa, baseou-se nas características independente e consciente. Reafirmamos que nessa etapa a ação se realiza em silêncio, sem a linguagem escrita, como se fosse uma interpretação

para dentro. Nos procedimentos de análise, utilizamos os mesmos usados na etapa verbal externa, onde buscamos avaliar as ideias conceituais de Integral formuladas pelos estudantes.

O desempenho dos estudantes foram identificados como parcialmente e totalmente consciente na execução das ações. O Estudante E_4 determinou as condições do problema, porém não extrai os dados de modo correto. Embora tenha feito a seleção do método matemático para solucionar o modelo corretamente, comete um erro no cálculo da soma de *Riemann*. Desse modo, o desempenho do estudante foi caracterizado como parcialmente consciente. Todos os demais estudantes, na Tarefa-02, apresentaram auto grau de assimilação, pois na realizaração da tarefa, utilizaram o método correto para solucionar o modelo matemático e solucionaram de forma totalmente correto, pois calcularam o valor da integral nos extremos dados a partir da soma de *Riemann*, dado que garante a estes estudantes desempenho caracterizado como totalmente consciente.

Com relação ao grau de independência, foi observado que a ajuda prestada pelos pares e pela própria professora/pesquisadora, garantiu o desenvolimento da independência cognitiva, visto que, os estudantes no decorrer do processo passaram a executar as ações com mais autonomia. "É importante destacar que a autonomia não é individualismo, mas sim condição de um sujeito disposto a colaborar, a continuar aprendendo uns com os outros [...] Dessa forma, a ação avança da etapa compartilhada para a ação independente" (NÚÑEZ; RAMALHO; ALBINO, 2013, p. 395). A etapa seguinte é a que permite organizar o trabalho dos alunos no plano mental, é a fase final no percurso da transformação da ação verbal externa para a interna.

5.3.4.6 Etapa da Formação da Ação em Linguagem Interna: ação mental

Ao utilizar a expressão ação mental, Galperin (1989a) ressalta que as ações mentais possuem, de maneira implícita, um conteúdo objetivo e material, mediado pela influência direta dos conceitos mentais que a elas se aplicam. As análises realizadas nessa etapa partiram de um conjunto de tarefas que envolviam aplicação do conceito de integral em diferentes contextos, como por exemplo, o cálculo de área. A atividade selecionada para avaliar o desempenho dos estudantes nessa etapa, tratava sobre a perda do valor de uma máquina que se deprecia a uma taxa contínua, dada por uma função.

TAREFA 3: Uma empresa possui uma máquina que se deprecia a uma taxa contínua $f = f(t)$, onde t é o tempo medido em meses desde seu último recondicionamento. Como a cada vez que a máquina é recondicionada incorre-se a um custo fixo A, a empresa deseja determinar o tempo ótimo T (em meses) entre os recondicionamentos. Explique por que $\int_0^t f(s)ds$ representa a perda do valor da máquina sobre o período de tempo t desde o último recondicionamento.

A intenção era que os estudantes fizessem a transferência de conhecimentos para aplicação em novas situações, bem como também, fazer a transformação das ações materiais em mentais. Nessa etapa, a habilidade de identificar e explicar o conceito e as diferentes formas de aplicação da Integral, deve ser realizada pelos estudantes com independência no plano mental.

O desempenho dos estudantes nessa etapa indicou que: dois estudantes, E_2 e E_4, apresentaram respectivamente, nível na execução das ações, pouco consciente e parcialmente consciente. Os demais estudantes apresentaram nível totalmente conscientes, pois executaram a ação essencial do problema de modo satisfatório, realizando a explicação do contexto do problema de forma independente, sem o apoio de material externo e do professor, destacando com objetividade o motivo da integral representar a depreciação do valor da máquina. Desse modo, observamos que esses estudantes dão indícios que a assimilação do conceito já se estabelece no plano mental.

Esses resultados indicam que houve um avanço no processo de assimilação do conceito de Integral. A síntese do desempenho dos estudantes nessa etapa, está apresentada na Tabela 29 e foi extraída a partir da média das notas nas categorias de: compreensão do problema; estabelecimento de um plano; execução do plano e análise da solução.

Tabela 29: Média do desempenho por estudante na Tarefa-03 (Unidade III)

Estudantes/Tarefa	**Médias**				
	E_1	**E_2**	**E_3**	**E_4**	**E_5**
Média geral por estudante	5	4	5	3	5

Fonte: Dados da pesquisa.

As ações mentais referem-se à prática direcionada por um conceito mental, portanto, uma prática consciente. Nas ações mentais rompem-se a dissociação entre o pensamento e a ação (REZENDE E VALDES, 2006). De acordo com Galperin (1989c), é um erro separar a ação mental do seu conteúdo objetivo e prático, do mesmo modo que não se pode reduzir a

ação mental à dimensão operatória. O autor ainda explica, "[...] o estudo da formação das ações mentais somente é possível quando se considera a influência exercida pelos aspectos objetivos sobre as ações do indivíduo" (GALPERIN, 1989c, p. 46).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao estabelecer como objetivo dessa pesquisa investigar se a organização do ensino de Cálculo baseada nos pressupostos da Teoria da Formação por Etapas das Ações Mentais de Galperin, promove a aprendizagem dos conceitos de Limite, Derivada e Integral nos estudantes da Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação de Roraima, buscamos submeter a teoria a uma realidade que vivenciamos enquanto professora de Cálculo.

A principal evidência da pesquisa foi a de que a organização do ensino orientado pelos pressupostos básicos da teoria de Galperin favorece a aprendizagem dos estudantes em Cálculo Diferencial e Integral. Os ganhos obtidos revelam-se tanto em relação à aquisição do conhecimento, quanto em relação ao próprio desenvolvimento cognitivo do estudante.

No que concerne à aquisição do conhecimento, a ideia de organizar o ensino utilizando o esquema da Base Orientadora da Ação do tipo III, mostrou-se viável, tendo em vista que, essa base de orientação propicia ao estudante condições para mais rápido, atuar de maneira autônoma e também oferecer subsídios para generalização nas situações de aprendizagem. Galperin em suas pesquisas, nas quais investigou as consequências do ensino organizado a partir dessa base orientadora, afirma que "[...] a maioria das crianças avançou do nível empírico-ingênuo para o modo teórico de pensamento no campo específico de solução de problemas com ampla transferência para outros campos e generalização teórica [...]" (ARIEVITH; STETSENKO, 2000, p. 82).

Diferente do ensino tradicional, no qual, geralmente, a aprendizagem ocorre por ensaio e erro, com pouca transferência ou generalização de conhecimento e grande ênfase na memorização, o ensino caracterizado pela BOA do tipo III tem um impacto positivo no desenvolvimento humano. "[...] é um tipo de ensino que se adianta ao desenvolvimento, pois o professor orienta o estudante, propiciando condições para que ele possa agir autonomamente na resolução das tarefas implicando um tipo de ensino que inicia na ZDP do estudante" (BASSAN, 2012, p. 97). Professor e aluno elaboram junto a base orientadora da ação, por meio do qual, o estudante, posteriormente, sozinho conseguirá generalizar e resolver outras tarefas.

Postas em prática, essas ideias revelaram-se instrumentos valiosos do professor na implementação de práticas pedagógicas voltada para um ensino pleno de significado e, portanto, possível de ser aplicado em Cálculo Diferencial e Integral. Tal visibilidade, no entanto, ainda depende, em parte, da possibilidade de se trabalhar com um número reduzido de alunos, como foi o caso da nossa pesquisa.

Há, a respeito da aplicação da teoria aqui tratada, as nossas condições educacionais, alguns aspectos a ser considerados: primeiro, deve haver um clima pedagógico favorável à aprendizagem; segundo, é imprescindível que o professor domine o conteúdo a ser ensinado; e terceiro, o professor, necessariamente, precisa ter embasamento teórico consistente para dar conta de pôr em prática a teoria. Essas, na nossa avaliação, são condições básicas para o sucesso da aprendizagem dos estudantes.

Os dados da presente pesquisa mostraram o valor teórico da teoria da formação por etapas das ações mentais para o ensino de Cálculo. Assim como já vem sendo constatado em outras pesquisas, mostra-se uma teoria robusta em condições de ser aplicada. No entanto, requer cuidados, sobretudo, no que diz respeito ao domínio do professor sobre os preceitos da teoria, visões aligeiradas e superficiais abrem espaços para críticas.

Analisando os dados dessa pesquisa, a partir da participação dos estudantes nas aulas, da observação na construção da base orientadora da ação para os três conceitos estudados e dos resultados das avaliações formais, chega-se a conclusão que, boa parte dos estudantes foram capazes, não só de compreender os conceitos, como também de se desenvolver do ponto de vista cognitivo. Muitas foram as evidências a esse respeito e em cada uma delas, havia a configuração de que os pressupostos teóricos da teoria da formação por etapas das ações mentais podem fornecer meios para encaminhar o estudante a aprendizagem dos conceitos estudados.

Outro fator relevante, foi a estratégia utilizada no encaminhamento das aulas, formada pela base de orientação das *Tarefas de Compreensão Conceitual*, a construção de um plano de solução das atividades pelos estudantes promoveu uma evolução gradativa, de modo a torná-los independentes em suas ações. Sabemos que o processo de internalização da atividade externa em interna, determinado por Galperin (1959), demanda tempo, e relatar como se deu o desenvolvimento cognitivo dos estudantes nessa perspectiva implica uma avaliação criteriosa, e isso só foi possível, dado o número relativamente pequeno de estudantes que participaram como sujeitos na pesquisa.

A orientação metodológica derivada da teoria em questão, possibilita-nos a compreensão de como são internalizados os conceitos que estão presentes, desde a etapa material das ações até a sua representação mental. Isso nos permite pensar essa teoria como uma possibilidade para viabilizar a elaboração de uma metodologia de ensino voltada para o desenvolvimento do pensamento teórico nos estudantes, que consiste na reflexão sobre o que está aprendendo, como está aprendendo, e como conquistar independência na forma de aprender.

No processo formativo, consideramos o interesse e o envolvimento dos estudantes como um dos componentes necessários à aprendizagem de Cálculo. Desse modo, se fez necessário que estes se envolvessem na atividade de aprendizagem para construir a base orientadora da ação a qual conduziria à aprendizagem dos conceitos. A construção da base orientadora da ação pelos estudantes, como estratégia formativa, contribuiu para facilitar a reelaboração da habilidade de resolver situações no ensino dos conceitos de Cálculo. Essa etapa não foi fácil de ser construída, visto que, os estudantes não tinham o hábito de se envolver com a orientação da própria tarefa que teriam de realizar.

As construções dos esquemas para solucionar as tarefas elaboradas pelos estudantes, se transformaram em instrumentos para guiar a própria atividade, mas, mesmo assim, eles precisaram de apoio da professora/pesquisadora nessa construção. O apoio se dava a partir das orientações, explicações e o controle da atividade de aprendizagem. A etapa materializada foi de grande valia para o processo de apropriação dos conceitos estudados em Cálculo: nela aconteceram as dúvidas dos estudantes, os erros ainda relacionados com a tarefas de compreensão dos conceitos, o redirecionamento, a regulação e a reorientação quanto ao domínio dos conceitos de Limite, Derivada e Integral.

É importante destacar que, embora a turma tivesse um número reduzido de estudantes, nem todos conseguiram transformar o conteúdo da ação numa representação mental, com todas as tarefas trabalhadas. Outro fator que destacamos, foi que o tempo necessário para a apropriação dos conceitos de modo generalizado, consciente e independente não foi similar para os estudantes; e isso, foi um obstáculo à reelaboração de algumas tarefas de ensino.

Por fim, percebemos, neste trabalho, que o desenvolvimento da habilidade de organizar o ensino de conceitos em um nível satisfatório de consciência e de generalização teórica, exige do professor tempo, criatividade e comprometimento em todos os momentos que envolvem a aprendizagem dos estudantes. A discussão desta tese, referente ao processo de apropriação dos conceitos trabalhados em Cálculo Diferencial e Integral, cumpre os seus objetivos de desenvolver uma abordagem de ensino que trata sobre a organização de uma base orientadora, construída em conjunto: professor e aluno, com vistas a assimilação dos conceitos de modo generalizado e consciente.

Assim explicitamos as possibilidades formativas que podem ser alcançadas pelo professor ao adotar tanto a estratégia de trabalhar com as *Tarefa de Compreensão Conceitual*, como com a Teoria de Galperin na sua sala de aula. Pelo exposto, podemos concluir que a Teoria da Formação por Etapas das Ações Mentais de Galperin se apresenta como uma possibilidade metodológica para a organização do ensino de Cálculo Diferencial e Integral,

voltada à formação de sujeitos autônomos, críticos, reflexivos e capazes de resolverem problemas envolvendo os conceitos de Cálculo em diferentes situações e contextos.

REFERÊNCIAS

ABREU, Osvaldo Honório de. *Discutindo algumas relações possíveis entre a intuição e rigor e entre imagem conceitual e definição conceitual no ensino de Limite e continuidade em Cálculo I*. Dissertação (Mestrado). UFOP: Ouro Preto, 2011.

ALVARENGA. R. C. M. A *análise deheurísticas da resolução de problemas matemáticos*. REVEMAT. Florinópolis – SC, V. 9, n. 1, p. 58 – 68, 2014.

APOLINÁRIO, Fábio. *Metodologia da Ciência: filosofia e prática da pesquisa*. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

ARÁUJO, R.; MOREIRA, L. F. N. Monitoria da disciplina de cálculo. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO, XXXIII, Campina Grande, 2005.

ARIENITH, I; STETSENKO, A. *The Quality of Cultural Tools and Cognitive Development: Gal´perin´s Perspective and Its Implications. Human Development*, Basel, v.43, n.2, p. 69-92, mar./ apr. 2000.

ARIEVITCH, I; HAENEN, J. P.P. *Connecting Sociocultural Theory and educational pratice*: Galperin´s Approach. Educational Psycologist. v.3, n.40, p.155-165, 2005.

AUSUBEL, David P.; Joseph D.; HANESIAN, Helen. *Psicologia Educacional*. Editora Interamericana Ltda. Rio de Janeiro, 1980.

BARON, M. *Curso de história da matemática:* origens e desenvolvimento do cálculo, volumes 1, 2 e 3. Brasília: Editora da Universidade de Brasília, 1985.

BARRICHELLO, Leonardo. *Análise de resolução de problemas de cálculo diferencial em um ambiente de integração escrita*. 2008, 127f. Dissertação (Mestrado). Universidade Estadual Paulista. Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2008.

BARUFI, M. C. B. A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral. 1999. Tese (Doutorado) - Faculdade de Educação, USP, São Paulo, 1999.

BASSAN, L. H. Teoria da Formação das ações mentais pore tapas, de P. Galperin, e o processo de humanização/ Larissa Helyne Bassan. – Marília 2012. 108f. Tese (Doutourado em Educação) Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Filosofia e Ciências, 2012.

BATISTA, R. J. *Uma breve introdução à história do Cálculo Diferencial e Integral*. Colégio Militar de Curitiba – Livreto 160 p – 3aV - Print.job, 2010.

BECKER, F. 1993. *Modelos Pedagógicos e Modelos Epistemológicos*. Porto Alegre. Paixão de Aprender, n.5:18-23.

_____. *A epistemologia do professor: o cotidiano da escola*. Petrópolis, RJ: Vozes, 1993.

_____. O que é o construtivismo?. Ideias, n. 20. São Paulo: FDE, 1994. p. 87-93. Disponível em: <http://www.crmariocovas.sp.gov.br/pdf/ideias_20_p087- 093_c.pdf>. Acesso em: fevereiro de 2014.

BECKER, Howard S. *Métodos de Pesquisas em Ciências Sociais*. São Paulo: Ucitec, 1993.

BLANCK, G. (1996). Vygotsky:o homem e sua causa.*In*: MOLL,L.C.*Vygotsky e a educação*: implicações pedagógicas a psicologia sócio-histórica. (pp. 31-35). Porto Alegre, RS: Artes Médicas.

BOGDAN, Robert C. e BIKLEN, Sari Knopp. *Investigação qualitativa em Educação*. Porto, Portugal: Porto Editora, 1994.

BOYER, Carl Benjamin. *Cá***lculo**. Tradução. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992. (Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula; v. 6).

_____. *História da Matemática*. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria do Ensino Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais:* Matemática: MEC/SEF, 1997, 1998, 1999, 2000, 2002, 2006.

_____. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997b.

BROUSSEAU, Guy. *Os diferentes papéis do professor*. In: PARRA, C. (org.). Didática da matemática: *reflexões psicopedagógicas*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. p.48-72.

CAMPOS, D. F. *Debates na historiografia da matemática e a história do surgimento do cálculo infinitesimal segundo Boyer*. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Minas Gerais. Programa de pós-graduação em História. Belo Horizonte, 2006.

CHARNAY, Roland. *Aprendendo (com) a resolução de problemas*. In: PARRA, C. (org.). Didática da Matemática: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. p.36-47.

COLL, C.; PALACIOS, J. e MARCHESI, A. *Desenvolvimento psicológico e educação: psicologia da educação.* Tradução de Angélica Mello Alves. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

CRESWELL, John W. *Projeto de pesquisa: métodos qualitativos, quantitativos e misto*. tradução Magda Lopes. 3. Ed. Porto Alegre: Artmed, 2010.

DAMAZIO, A; PERES, E. S.; NURNBERG J. *Contribuições da teoria de ações mentais de Galperin à prática pedagógica*. In: Anais do III Simpósio e VI Fórum Nacional de Educação. Torres: ULBRA, 2009.

D'AMBRÓSIO, Beatriz S. A Evolução da Resolução de Problemas no Currículo Matemático In: I Seminário de Resolução de Problemas. (I SERP). Rio Claro: Unesp. 2008. v. único. Disponível em: http://gprpem.blogspot.com.br/p/publicacoes.html. Acesso em: 01 jun. 2015.

DANTE, Luiz R. *Formulação e resolução de problemas de matemática*: teoria e prática. 1 ed. – São Paulo: Ática, 2010.

DARSIE, M. M. P. 1999. *Perspectivas Epistemológicas e suas implicações no processo de Ensino e de Aprendizagem*. UNICiências, Cuiabá, UNIC, v. 3, p. 8-21.

DAVYDOV, V. V. Problemas do ensino desenvolvimental: *A experiência da pesquisa teórica e experimental na psicologia.* Trad. de José Carlos Libâneo. **Revista Educação Soviética**, agosto, v. 30, n. 8, 1988.

DAVIS, C. (1993). O construtivismo de Piaget e o Sócio-interacionismo de Vygotsky.In: *Anais do Seminário Internacional de Alfabetização & Educação*, 35-52. UNIJUI, RS.

D'AVOGLIO, A. R. *Derivada de uma função num ponto: uma forma significativa de introduzir o conceito.* Dissertação (Mestrado). São Paulo: PUC, 2002.

_____. *O Desenvolvimento de Conceitos Matemáticos no Contexto do Processo Extrativo do Carvão***.** Florianópolis: UFSC, 2000. Tese (Doutorado).

DAVYDOV, V. V. *Tipos de generalización en la enseñanza.* 3ª ed. Habana: Editorial Pueblo y Educación, 1982. 485p.

_____. *La ensenãnza escolar y el desarrollo psiquico:* investigación teórica y experimental. Moscu: Editorial Progresso, 1988.

DEMO, Pedro. *Pesquisa participante: Mito e realidade*. Rio de Janeiro: Senac, 1984.

DINIZ, Maria I. Resolução de problemas e comunicação. In: SMOLE, Kátia S.; DINIZ Maria I. (orgs). *Ler, escrever e resolver problemas*: Habilidades básicas para aprender matemática. – porto Alegre: ArtMed Editora, 2001, 0. 87 – 97.

DUARTE, D. M. *O ensino do conceito de função afim: uma proposição com base na teoria de Galperin.* Dissertação (Mestrado) – Universidade Extremo Sul Catarinense. Programa de pós-graduação em Educação. Criciúma, 2011.

ECHEVERRÍA, Maria D. P. P.; POZO, Juan I. Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. In: POZO, Juan I. (Org.). *A solução de problemas*: Aprender a resolver, resolver para aprender. – Porto Alegre: ArtMed, 1998, p. 13 – 42.

EVES, H. *Introdução à história da Matemática*. Campinas, SP: Unicmp, 2004.

FIORENTINI, D. *Alguns modos de ver e conceber o ensino de matemática no Brasil*. In: Revista Zetetiké, ano 3, n° 4, 1995.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. *Investigações em Educação Matemática:* Percursos teóricos e metodológicos. São Paulo: Autores Associados, 2009.

FERREIRA, A. M. *Resgate da inserção das noções elementares do Cálculo (em particular, das noções de limite) durante o ensino médio*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciˆnias Exatas. Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. Vitória-SC, 2014.

GALPERIN, P. Ya. *Tipos de orientación y tipos de formación de acciones y de los conceptos*. Informe de la Academia de Ciencias Pedagógicas de la RSFSR, Moscú, n. 2, 1959.

_____. *Study of the intellectual development of the child*. Soviet Psychology, Moscou, v. 27, n 3, p. 26-44, maio/jun. 1989a.

_____. Organization of mental activity and effectiveness of learning. Soviet Psychology, Moscou, v. 27, n. 3, p. 65 – 82, may/june 1989c.

_____. Acerca del lenguaje interno: In: ROJAS, L. Q. (Comp). *La formación de las funciones psicológicas durante el desarollo del niño.* Tlaxcala: Editora Universidad Autónoma de Tlaxcala. p. 57 – 66, 2001b.

_____. Sobre la formación de los conceptos y de las acciones mentales. In: ROJAS, Luis Quintanar (Compilador). *La formacion de las funciones psicológicas durante el desarrollo del niño.*Tlaxcala: Universidad Autónoma de Tlaxcala, 2001c. p. 45-56.

_____. Acerca del lenguaje interno. In: ROJAS, Luis Quintanar (Compilador). *La formacion de las funciones psicológicas durante el desarrollo del niño.*Tlaxcala: Universidad Autónoma de Tlaxcala, 2001d. p.57-65.

_____. *Tipos de orientación y tipos de formación de las acciones de los conceptos*. In: SEGARTE IZNAGA, A. L.; MARTÍNEZ CAMPO, G.; RODRÍGUEZ PÉREZ, M. E. (Orgs). *Psicología del desarrollo del escolar*. Tomo I. La Habana: Editorial Félix Varela, 2003, p. 146-246.

_____. *Sobre la formación de los conceptos y de las acciones mentales*. Boletín de La Universidad Estatal de Moscú, No. 4, 1957.

_____, P. Ya. *Sobre el método de formación por etapas de las acciones intelectuales*. In ILIASOV, I. I.; LIAUDIS, V. Ya. Antologia de la psicologia pedagógica y de las edades**.** La Habana: Pueblo y Eduacación, 1986a. p. 114-118.

_____. *Sobre la investigacion del desarrollo intelectual Del niño*. In. La psicologia evolutiva y pedagógica en la URSS. Editorial Progreso, Moscú, 1987, p. 125-143.

_____. Stage-by-stage formation as a method of psychological investigation. *Journal of Russian and East European Psychology*, Armonk, v. 30, n. 4, p. 60-80, july/aug, 1992.

.; TALYZINA, N. F. *La formación de conceptos geométricos elementales y su dependência sobre la participación dirigida de los alumnos*. In: Psicologia Soviética Contemporánea. Instituto Del Libro, 1967, p. 273-302.

GALPERIN, P. YA; ZAPORÓZHETS, A. e ELKONIN, D. *Los problemas de la formación de conocimientos y capacidades em los escolares y los nuevos métodos de enseñanza en la escuela*. In: La psicologia evolutiva y pedagógica en la URSS. Editorial Progreso, Moscú, 1987, p. 300-313.

GARZELLA, Fabiana Aurora Colombo. *A disciplina de Cálculo I: análises das relações da relações entre as práticas pedagógicas do professor e seus impactos nos alunos*. Tese (Doutorado). Campinas: UNICAMP, 2013.

GRATTAN-GUINESS, I. *O que foi e o que deveria ser o Cálculo?* Zetetiké, Campinas – SP, v. 5, n. 7, p. 69-94, jan/jun, 1997.

GEHLEN, S. T. *A função do problema no processo de ensino-aprendizagem de ciências: contribuições de Freire e Vygotsky*. Tese (Doutorado). Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de pós-graduação em educação científica e tecnológica, Florianópolis, 2009.

GEHLEN, S. T.; DELIZOICOV, D. A. *Dimensão epistemological da noção de problema na obra de Vygotsky: implicações no ensino de ciências*. Investigações em Ensino de Ciências – V17 (1) pp. 59 – 79, 2012.

KAMII, C. A criança e o número: *implicações educacionais da Teoria de Piaget*. Campinas: Papirus, 1988.

KAMII, C.; CLARK, G. Reinventando a Aritmética: *interpretações na teoria de Piaget*. Campinas: Papirus, 1986.

KURATA, Katsuyoshi. *O ensino de Cálculo para cursos superiores de Tecnologia na área ambiental: aspectos motivacionais do aluno*. Dissertação (Mestrado). São Paulo: CEETEPS, 2007.

LEONTIEV, A. *O Desenvolvimento do Psiquismo.* Lisboa: Livros Horizonte. 1978.

_____. *O Desenvolvimento do Psiquismo***.** São Paulo, Centauro, 2004.

LOCKE, John. *Ensaio Acerca do Entendimento Humano*. Trad. Anoar Aiex. São Paulo: Editora Abril. 1978.

LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R. V. (Org.). Ensino Desenvolvimental: *vida, pensamento e obra dos principais representantes russos*. Uberlândia: EDUFU, 2013.

LUCI, M. A. *A proposta de Vigotiski: a psicologia sócio-histórica*. Profesorado. Revista Currículum y formación del professorado, 10, 2, (2006).

LUDKE M.; ANDRÉ, M. A. *Pesquisa em Educação:* abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MAJMUTOV, M. I. *La enseñanza problémica*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación, 1983.

MARCO, Fabiana Fiorezi de. Estudo dos processos de resolução de problema mediante a construção de jogos computacionais de matemática no ensino fundamental / Fabiana Fiorezi de Marco. -- Campinas, SP: [s.n.], 2004.

MARTINS, Joel e BICUDO, Maria A. V. *A pesquisa qualitativa em psicologia. Fundamentos e recursos básicos.* São Paulo: Educ/Moraes, 1989.

MAYER, R. *Pensamiento, resolución de problemas y cognición*. Barcelona: Paidós, 1986.

MENDOZA, Héctor José Garcia. *Estudio del efecto del sistema de acciones em el proceso del aprendizaje de los alumnos en la actividad de situciones problema en matemática en la asignatura de álgebra lineal, en el contexto de la Facultad Actual de la Amazonia.* Tese (Doutorado em Psicopedagogia) - Universidad de Jaén (UJAEN), Espanha, 2009.

MIRANDA, A. M. As tecnologias da informação no estudo de Cálculo na perspectiva da aprendizagem significativa. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto, 2010.

MORENO, Beatriz R. *O ensino do número e do sistema de numeração na educação infantil e na 1a série.* In: PANIZZA, Mabel. (org.). Ensinar matemática na educação infantil e nas séries iniciais. Porto Alegre: Artes Médicas, 2006. p.43-76.

MOYSÉS, Lucia. *Aplicações de Vygotsky à educação matemática*. Campinas, SP:Papirus, 1997. – (Coleção Magistério: Formação e Trabalho Pedagógico).

NIEMANN, F. A.; BRANDOLI, F. *Jean Piaget: um aporte teórico para o construtivismo e suaas contribuições para o processo de ensino e aprendizagem da língua portuguesa e matemática.* IX ANPED SUL – Seminário de Pesquisa em Educação da região Sul, 2012.

NÚÑEZ, B. I; PACHECO, G. O. *Formação de conceitos segundo a teoria de assimilação de Galperin.* In: **Caderno de Pesquisa**, Natal, n 105, p. 92-109, nov. 1998.

_____. *La formación de conceptos científicos:* una perspectiva desde a teoria de La actividades. Natal: EUFRN, 1997.

_____. *Vygotsky, Leontiev e Galperin: formação de conceitos e princípios didáticos*. Brasília, GO: Líber Livro, 2009.

NÚÑEZ I. B.; RAMALHO, B. L.; ALBINO, M. G. F. *Os indicadores qualitativos da ação e as tarefas de aprendizagem; reflexões teórias e didáticas na teoria de P. Ya. Galperin*. In: Revista Amazônica, LAPESAM/GMPEPPE/UFAM/CNPq/EDUA. Ano 6, Vol XI, número 2, 2013, Jul-Dez, pag. 388-415.

NÚÑEZ I. B.; RAMALHO, B. L. Desarrollo de una unidad didáctica para el estudo de los processos de oxidación-reducción en el pre-universitário: contribuciones de la teoria de P. Ya. Galperin. In: Temas de Ensino e Formação de Professores de Ciências. EDUFRRN editora. Natal/RN, 2012. p. 153 – 178.

NÚÑEZ I. B.; MARUJO M. P.; MARUJO, L. E.; DIAS, M. A. 20014. *O uso de situações problemas no ensino de Ciências*. In: NÚÑEZ, Isauro Beltrán; RAMALHO, Betânia Leite. Fundamentos do ensino-aprendizagem das Ciências Naturais e da Matemática: o novo ensino médio. Porto Alegre: Sulina, 2004. p. 145 – 171.

OLIVEIRA, Marcus Vinícius de Faria. Pensamento Teórico e formação docente: apropriaçãoo de saberes da tradiçãoo lúdica na perspectiva da teoria da formação das ações mentais por etapas de P. Ya. Galperin. RN, 2011. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Ciências Sociais e Aplicadas. Programa de Pós Graduação em Educação.

ONUCHIC, Lourdes R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, Maria A. V. (Org.). *Pesquisa em Educação matemática*: concepções e perspectivas. – São Paulo: Editora UNESP, 1999, p. 199 – 218.

ONUCHIC, Lourdes R.; ALLEVATO, Norma S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, Maria A. V.; BORBA, Marcelo C. (orgs.). *Educação Matemática*: pesquisa em movimento. – 3 ed. São Paulo: Cortez, 2009, p. 213 – 231.

ONUCHIC, L.R.; ALLEVATO, N. S. G. *Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas.* Bolema, Rio Claro (SP), v. 25, n. 41, p. 73 – 98. Dez, 2011.

PALMA, R. C. D. da. *A produção de sentidos sobre o aprender e ensinar matemática na formação inicial de professores para a Educaçãoo Infantil e anos iniciais do Ensino Fundamental / Rute Cristina Domingos da Palma. – Campinas, SP: [s.n.], 2010.*

PIAGET, Jean. *O nascimento da inteligência na criança*. 4. ed. Rio de Janeiro: Guanabara, 1987.

PINEDO, C. Q.; PINEDO, K. S. *Introdução à epistemologia da ciência*: Universidade Federal de Tocantins: Campus Palmas, 2008.

POFFO, E. M. *A resolução de problemas como metodologia de ensino. uma análise a partir das contribuições de Vygotsky*. II Seminário em R. P. UNESP: Campus Rio Claro – São Paulo, 2011.

POGGIOLI, L. Estratégias de resolución de problemas. Serie enseñando a aprender. Caracas: Polar, 2001. Disponível em http:// www fpolar.org.ve/poggioli/poggio05.htm.

POLYA, G. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.
_____. A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático. Tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. – 2 reimp. – Rio de Janeiro: interciência, 1995.

POZO, J. I. *Teorias cognitivas da aprendizagem*. Tradução de Juan Acuña Llorens. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998.

_____. *A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender* / Juan Ignácio Pozo, María del Puy Pérez Echeverría, Jesús Domínguez Castillo, Miguel Ángel Gómez Crespo, Yolanda Postigo Angón; trad. Beatriz Affonso Neves – Porto Alegre: ArtMed, 1998.

RAMALHO, B. L.; NÚÑEZ, I. B.; GAUTHIER, Clermont. *Formar o professor, profissionalizar o ensino*. Perspectivas e desafios. 2. ed. Porto Alegre: Sulina, 2004.

REGO, Tereza Cristina. *Vygotsky: uma perspectiva histórico-cultural da educação*. 25 ed. – Petrópolis-RJ. Vozes, 2014.

REIS, F. da S. *A tensão entre rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos*. Tese (Doutorado). Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação. Campinas, 2001.

RESHETOVA, Z. A. *Análisis sistémico aplicado a la educación superior*. La Habana: CEPES, 1989.

REZENDE, Alexandre; VALDES, Hiram. *Galperin: implicações educacionais da teoria de formação das ações mentais por estágios*. In: Educação & Sociedade, Campinas, v. 27, n. 97, p. 1205-1232, set/dez. 2006.

REZENDE, W. M. *O ensino de cálculo: dificuldades de natureza epistemológica*. 2003. Tese (Doutorado) – Faculdade de Educação, USP, São Paulo, 2003.

RIBEIRO, M. V. *O ensino do conceito de integral, em sala de aula, com recursos da história da matemática e da resolução de problemas*. Dissertação (Mestrado). Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Rio Claro- SP, 2010.

ROSENBAUM, L.; BEHOUNEK, K. J. y BURCALOW, J. V. (1989): "Step int problem Solving wuith cooperative learning". Arithmetic teacher, 36 (7) 7 – 11.

ROSSI, M. I.; ALLEVATO, N. S. G. *Resolução de problemas como metodologia para o ensino de equações diferencias*. In: Anais do Encontro de produção discente. PUC-SP/Cruzeiro do Sul. São Paulo. p 1 – 9. 2012.

RUBTSOV, Vitaly. *A atividade de aprendizagem e os problemas referentes à formação do pensamento teórico dos escolares.* In: GARNIER, Catherine; BEDNARZ, Nadine; ULANOSVSKAYA, Irina. (Orgs.). Após Vygotsky e Piaget: perspectivas social e construtivista, escolas russas e ocidental. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. p. 129-137.

SÁLMINA, N. G. *La Actividad Cognoscitiva de los alunos y modo de construir la asignatura*. La Habana: CEPES, 1988.

SÁNCHEZ HUETE, Juan Carlos. *O ensino da matemática:* fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas/ Juan Carlos Sánches Huete e José A. Fernádez Bravo; tradução Ernani Rosa. – Porto Alegre: ArtMed, 2006.

SANDÍN ESTEBAN, Maria Paz. *Pesquisa qualitativa em educação: fundamentos e tradições*. Tradução Miguel Cabrera. Porto Alegre: AMGH, 2010.

SANTOMAURO, Beatriz. Três ideias sobre a aprendizagem. In: Revista Nova Escola. Edição 237, Nov, 2007.

SANTOS, F. M. T. dos; GRECA, I. M. *A pesquisa em ensino de ciências no Brasil e suas metodologias*/ organizadoras Flávia Maria Teixeira dos Santos, Ileana Maria Greca. 2 ed. Rev. Ijuí: Ed. Unijuí, 2011. – 440 p. – (Coleção educação em ciências).

SANTOS, Solange A. *Estudo da aprendizagem na Atividade de Situações Problema em Limite de funções de uma variável fundamentado na teoria de formação por etapas das ações mentais de Galperin, na licenciatura em matemática no Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia de Roraima.* Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências). Universidade Estadual de Roraima, 2014.

SILVA, Petronildo Bezerra da. *Desenvolvimento e avaliação de uma abordagem de ensino de química centrada na curiosidade científica dos estudantes e elaborada com base na teoria da formação das ações mentais por etapas de Galperin* / Petronildo Bezerra da Silva. – Recife, 2011.

STERNBERG, Robert J.; GRIGORENKO, Elena L. Inteligência plena: ensinando e incentivando a aprendizagem e a realizaçãoo dos alunos. Trad. Maria Adriana Veríssimo Veronese – Porto Alegre: ArtMed, 2003.

STEWART, James. Cálculo, volume I/ James Stewart. 5 ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.

TALL, D. (Ed.) (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht, Kluwer Academic Publ.

TALÍZINA, N. F. *Conferencias sobre "Los Fundamentos de La Enseñanza em La Educación Superior"***.** Havana: Universidad de La Habana, Deparatamento de Estudios para El Perfeccionamiento de La Educación Superior, Editorial Progresso, 1985.

_____. *Métodos para la creación de programas de enseñanza*. Camaguey: Universidad de Camaguey, 1987.

_____. La formación de los conceptos matemáticos. In:_____(Org.). *La formacion de las habilidades del pensamento matemático.* México: Facultad de Psicologia Universidad Autónoma de San Luis Potosí, 2001a. p.21-39.

_____. *La formación de las habilidades del pensamiento matemático*. Facultad de Psicología de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí. S.L.P., México, 2001.

_____. *Psicologia de La Enseñanza*. Moscu: Editorial Progreso, 1988.

TORRES, T. I. M. *O ensino de cálculo numa perspectiva histórica: da régua de calcular ao Moodle*. REVEMAT – Revista Eletrônica de Educação Matemática. V.4.1, p. 18 – 25, UFSC, 2009.

VALSINER, Jaan e VEER, René van der. "The encoding of distance: The concepto f the 'zone of proximal development'and its interpretations". In: COC – KING, Rodney R. E RENNINGER, Ann. The development and mesning of psychological distance. Nova Jersey: Erlbaum, 1991.

VASCONCELOS, M. S. *A difusão das ideias de Piaget no Brasil*. São Paulo: Casa do Psicólogo, 1996.

VIEIRA, A. F. *Ensino de Cálculo Diferencial e Integral, das técnicas ao humans-with-media.* Tese (Doutorado). Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo. Programa de Pós-graduação em Educação. Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática. São Paulo, 2013.

VYGOTSKY L. S. *et al*. *Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem*. Tradução de: Maria da Pena Villalobos. – 11ª edição – São Paulo: Ícone, 2010.

VYGOTSKY, L. S. *A construção do pensamento e linguagem.* São Paulo: Martins Fontes, 2001.

_____. *A formação social da mente***.** São Paulo: Martins Fontes, 1998.

_____. *Pensamento e linguagem*. São Paulo: Martins Fontes, 1998.

_____. *Pensamento e linguagem*. São Paulo: Martins Fontes, 2005.

WROBEL, J. S.; ZEFERINO, M. V. C. *Um mapa do ensino de Cálculo nos últimos 10 anos do COBENGE*. In. XLI Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia, COBENGE, 2013. Gramado – RS. Anais... Gramado, 2013.

APÊNDICES

APÊNDICE A: TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Pesquisa: A ORGANIZAÇÃO DO ENSINO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL A PARTIR DA ATIVIDADE DE SITUAÇÕES PROBLEMAS NA PERSPECTIVA DAS TEORIAS DAS AÇÕES MENTAIS E DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

Eu, _____,
acadêmico (a) do curso de em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia de Roraima – IFRR, portador (a) do RG _____,
residente na _____,
e-mail _____, abaixo assinado, dou meu consentimento livre e esclarecido para participar como voluntário da pesquisa supracitada, sob a responsabilidade da pesquisadora **NILRA JANE FILGUEIRA BEZERRA**, aluna do curso de Doutorado em Educação em Ciências e Matemática da Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática – REAMEC e da professoa **DRA. MARTA MARIA POTIN DARSIE**, orientadora da Pesquisa.

Assinando este Termo de Consentimento, estou ciente de que:

a) O objetivo da pesquisa é Investigar se a Atividade de Situações Problemas como Metodologia de Ensino, baseada nos pressupostos da Teoria da Formação por Etapas das Ações Mentais de Galperin, promove Aprendizagem Significativa dos conceitos de Limite, Derivada e Integral Definida de uma função de uma variável, na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I e II do curso de Licenciatura em Matemática no Instituto Federal de Roraima;
b) As aulas serão observadas, filmadas e gravadas e eventualmente fotografadas;
c) As fotografias poderão ser utilizadas como ilustração no trabalho final da pesquisa (Tese);
d) Durante o estudo do Módulo na disciplina Cálculo I, estarei participando nas aulas e respondendo as atividades;
e) Ao final da pesquisa, caso tenha interesse, poderei ter acesso aos resultados da mesma;
f) Estou livre para interromper, a qualquer momento, minha participação nesta pesquisa;
g) A participação nesta pesquisa é voluntária;

h) Os meus dados pessoais, bem como os vídeos produzidos nas aulas serão mantidos em sigilo e os resultados obtidos com a pesquisa serão utilizados somente para alcançar os objetivos da mesma, incluindo a publicação na literatura científica especializada;
i) Poderei entrar em contato com a pesquisadora sempre que necessário através do e-mail nilrajane@ifrr.edu.br;
j) Obtive todas as informações necessárias para poder decidir conscientemente sobre a minha participação na referida pesquisa;
k) Este Termo de Consentimento é feito em duas vias, de modo que uma permanecerá em meu poder e outra com a pesquisadora.

Boa Vista, 12 de março de 2013.

_____
Assinatura do participante

_____
Assinatura da Pesquisadora

_____
Assinatura da responsável pela pesquisa (Orientadora)

APÊNDICE B: DIÁRIO ESTRUTURADO

1. **Aula Nº**: ---------- **Data**:...../...../2013

2. **Descrição dos objetivos da aula:** (Detalhar os objetivos a serem alcançados na aula)

3. **Tipo de Aula:** (Expositiva, dialogada, aula prática com resolução de exercícios, no laboratório, etc.).

4. **Descrição do desenvolvimento da aula**: (Anotação de todo o movimento no decorrer da aula, desde a orientação do ensino até o movimento de aprendizagem dos estudantes).

5. **Comentários**: (Espaço reservado aos comentários do pesquisador sobre a apreciação da aula).

APÊNDICE C - GUIA DE OBSERVAÇÃO (Turma)

1. Os objetivos de ensino são enunciados (mencionar) e esclarecidos para os alunos

2. Relação dos objetivos de ensino com as ideias estabelecidas

3. Motivação dos alunos a partir dos objetivos de ensino.

4. Aprendizagem dos os alunos nos elementos prévios dos conteúdos em relação aos objetivos

APÊNDICE D - GUIA DE OBSERVAÇÃO 2 - (Estudante)

TAREFAS DE COMPREENSÃO CONCEITUAL

Problema:

ESTUDANTE E_1

E01	**Categoria 1: Compreensão do problema**	
	O estudante identificou as partes principais do problema, ou seja, a incógnita, os dados, a condicionante. Caso haja uma figura relacionada ao problema, é importante desenhá-la e adotar uma notação adequada.	Caraterísticas
	Categoria 2: Estabelecimento de um plano	
	O estudante sabe quais são os cálculos, construções, etc., que deve efetuar para encontrar a solução do problema considerado	Caraterísticas
	Categoria 3: Execução do Plano	
	O plano foi executado e correspondeu a solução correta do problema proposto.	Caraterísticas
	Categoria 4: Revisão da solução	
	É possível verificar o resultado? É possível verificar o argumento? É possível utilizar o resultado ou método em outro problema	Caraterísticas

APÊNDICE E – Resultados do Teste Diagnóstico: Análise Descritiva

RESULTADO POR ALUNO DA ANÁLISE DO SISTEMA DE AÇÕES: Teste Diagnóstico

Estudante E_1: Resultado das Características das Ações no problema resolvido

Categoria	Análises da Atividade-01	D-Quanti
Compreender o problema	Extrair os elementos não se aplica (os dados já foram fornecidos) a função $f(x) = 8000 - 1000x$ e tabela de dados. O aluno determina as condições do problema, pois utiliza a sequencia dos valores de $x$disponível na tabela de dados e a função para realizar o prognóstico dos próximos dois anos f(4) e f(5).De acordo com os procedimentos dos cálculos, o estudante define claramente o objetivo do problema, pois avalia $f(4)$ e $f(5)$, a partir dos resultados.Conclui que se trata de uma função decrescente, ou seja, a cada ano a produção da fábrica diminui 1000 unidades do seu produto, ao aplicar os valores de x de forma crescente na função, partindo de f(4) até f(8), desenvolvendo os cálculos a estudante encontrou o ano que a fábrica encerraria a produção (8º ano) e esboçou o gráfico, traçando a reta nos pontos: $(0,8000);\ (1,7000);\ (2,6000);\ (3,5000);$ $(4,4000);\ (5,3000);\ (6,2000);\ (7,1000)$	5
Construir o modelo matemático	O estudante identifica que f(x) está relacionado com o prognóstico da produção, e o valor de x com os anos. A construção do modelo matemático não se aplica (já dado no problema). Realiza implicitamente através dos cálculos a análise das unidades do modelo ao fazer relação direta com o objetivo do problema.	5
Solucionar o modelo matemático	Identifica que a função f(x) é o modelo matemático que está relacionado com a tabela, pois faz relação com o conceito geral de função linear crescente $f(x) = ax + b$ descrita no início da questão. O estudante determinou o prognóstico para f(4) e f(5), fazendo uso do modelo informado. Construiu o gráfico corretamente (decrescente) traçando a reta nos pontos: $(0,8000);\ (1,7000);\ (2,6000);\ (3,5000);\ (4,4000);$ $(5,3000);\ (6,2000);\ (7,1000)\ e\ (8,0)$, apresentado o máximo de precisão manuscrita, proporcionando a visualização de cada ponto. No entanto, traçou a reta iniciando no ponto $(0,8000)$ até o $(8,0)$. Observa-se que o ponto $(0,8000)$ não pode ser identificado nesta função.	**4**
Interpretar a solução	O estudante explica cada etapa realizada e esboça uma compreensão. Dá a resposta de forma parcialmente completa para a questão, pois ao esboçar o gráfico acrescenta um ponto a mais, porém, de maneira incorreta. Não realizou um relatório descritivo (sendo que este item não foi claramente solicitado para os estudantes), mas de acordo com os procedimentos abordados e desenvolvimento da ideia, o estudante apresenta condições que se relacionam diretamente com o objetivo do problema, apresentando possíveis habilidades de construir e solucionar novamente o modelo matemático.	5

Estudante E_1: **Resultado das Características das Ações no problema resolvido**

Categoria	Analises da Atividade-02	D-Quanti
Compreender o problema	Extrai completamente os elementos do problema, nominando cada um $x = salário$, $Aluguel = R\$\ 120{,}00$, $man = 3x/4$, resto para a poupança. A partir dos elementos dados o aluno precisa elaborar o modelo para encontrar à solução da questão posterior. Desse modo, o aluno elabora o modelo.Observa-se que o mesmo define o objetivo do problema quando demonstra um exemplo aplicando ao modelo definido.	5
Construir o modelo matemático	Determina claramente as variáveis e nomina cada uma delas, quando descreve: x = salário, aluguel = R$ 120,00, man = 3x/4 e poupa o resto. A partir dos elementos extraídos do problema, o aluno encontra o modelo seguindo os passos: Realiza análise das unidades variáveis, pois após a elaboração do modelo, demonstra um exemplo: Para $x = 1000$ $P(x) = x - (120 + \frac{3}{4}x)$ $P(x) = \frac{x}{4} - 120$ $P(x) = x - \frac{3}{4}x - 120$ $P(x) = \frac{1000}{4} - 120$ $P(x) = 250 - 120$ $P(x) = x - (120 + \frac{3}{4}x)$	**5**
Solucionar o modelo matemático	A partir do modelo o aluno demonstra um exemplo para comprovar que através do modelo é possível determinar o valor que será poupado pelo empregado. Soluciona a questão a) que é a elaboração do modelo e a questão b) quando determina o salário que o empregado deve ganhar para poupar $R\$\ 240{,}00$, ou seja, $P = 240$, fez a solução do modelo e encontrando o resultado do salário: $240 = \frac{x}{4} - 120$ $960 = x - 480$ $P(x) = \frac{1000}{4} - 120$ $P(x) = 250 - 120$	5
Interpretar a solução	Determina e relaciona corretamente os elementos do problema com o objetivo. Desse modo determina as respostas das questões a) e b). A descrição do aluno permite observar um breve ensaio de compreensão que possibilita uma relação direta com o objetivo e a construção novamente do modelo de acordo com o enunciado "*o empregado ganha valor x, mas sabemos que gata ¾ do salário com manutenção, e então, sobra ¼, de onde ele paga o aluguel e o que sobra é poupado*".	5

Estudante E_1: Resultado das Características das Ações no problema resolvido

Categoria	Analises da Atividade-03	D-Quanti
Compreender o problema	Extrai os elementos, identificando os pontos dados (2,3) e (0,0) e aplica na fórmula $y = (24x - x\text{^}2)/12$ para encontrar o valor de y. Observa-se pelo desenvolvimento dos cálculos que o aluno determina as condições do problema, iniciando com a aplicação dos pontos dados no problema para encontrar a equação da reta que representa o ponto de interseção em que as plantas atingem a mesma altura. Sim, determina quando observa que precisa encontrar a equação da reta que possibilitará encontrar um ponto em comum.	5
Construir o modelo matemático	Determinar as variáveis, como também os pontos dados no problema para encontrar a partir do modelo dado, a equação que determinar um ponto em comum, ou seja, o crescimento quando as plantas A e B atingirem a mesma altura. Faz a aplicação dos pontos na equação geral da reta. Constrói o modelo a partir dos pontos dado, fazendo uso geral do modelo da equação da reta, onde determina que. O aluno especifica graficamente na resolução do problema, determina a análise das unidades de forma implícita, no desenvolvimento dos cálculos e no resultado discrimina a unidade.	5
Solucionar o modelo matemático	O aluno faz a aplicação dos pontos dados no problema no modelo geral da equação da reta: $3 - 0 = \mathrm{m}(2 - 0)$ $3 = 2\mathrm{m}$ $\mathrm{m} = 3/2$ $0 = 3/2.0 + \mathrm{b}$ $\mathrm{b} = 0$ $\mathrm{y} = 3/2\ \mathrm{x}$ Encontrando assim, uma forma para solucionar o problema.A partir dos pontos (2,3) e (0,0), encontra a equação: $\mathrm{y} = 3/2\ \mathrm{x}$ $3/2\ \mathrm{x} = (24\mathrm{x} - \mathrm{x}\text{^}2)/12$ $36\mathrm{x} = 48\mathrm{x} - 2\mathrm{x}\text{^}2$ $2\mathrm{x}\text{^}2 + 36\mathrm{x} - 48\mathrm{x} = 0$ $2\mathrm{x}\text{^}2 - 12\mathrm{x} = 0$ $2\mathrm{x}\text{^}2 - 6\mathrm{x} = 0$ $\mathrm{a} = 1, \mathrm{b} = -6$ e $\mathrm{c} = 0$ Por meio da fórmula de Báskara, encontra os valores das raízes: x'=6 e x" = 0. Que substituindo na equação: y=3/2 x, para encontrar o valor de y e consequentemente o valor da altura das plantas.	5
Interpretar a solução	Extrai os elementos e faz a relação com o objetivo do problema. Sim, dar resposta. Observa-se mediante da descrição do aluno sua capacidade de realizar a operação de análise e a relação direta com o objetivo do problema "de acordo com o enunciado as plantas nasceram no mesmo dia e foram tratadas com adubos diferentes, apresentaram gráficos diferentes para a relação de crescimento. No entanto, a **reta** que representa estas funções se tocam em um dado instante, apesar de ser uma do 1º grau e a outra do 2º, este ponto representa o dia em que as plantas estão com a mesma altura. Para sabermos as coordenadas desse ponto basta **igualar as funções**, encontrando o dia, e depois substituir esse valor em uma das funções para sabermos a altura".	5

Estudante E_2: Resultado das Características das Ações no problema resolvido

Categoria	Analises da Atividade-01	D-Quanti
Compreender o problema	Não se aplica (os dados já foram fornecidos) a função $f(x) = 8000 - 1000x$ e tabela de dados. Determina as variáveis e o objetivo do problema, pois utiliza a sequência dos valores de x da tabela de dados e a função para determinar o prognóstico dos próximos dois anos $f(4)$ e $f(5)$, substituindo diretamente o valor de x. Conclui com o resultado do prognóstico, que *"a produção vai caindo a cada ano 1000 unid*". Observa-se que o estudante não explica claramente este comportamento. Para determinar o prognóstico de encerramento da produção da fábrica, o estudante optou por igualar o termo $f(8) = 0$, desse modo isolando a variável x determinou que, seria no 8º ano, menciona a resposta $x = 8$ anos, afirmando em sua descrição "*em 8 anos a produção vai parar*". O estudante esboçou o gráfico desta função, identificando os pontos em parte de forma implícita, traçando a reta nas coordenadas dos pontos: $(1, 7000)$ e $(8, 0)$.	5

Construir o modelo matemático	Não se aplica. Identifica que $f(x)$ está relacionado com o prognóstico da produção e x com os anos. Pois, em suas respostas utiliza os termos "*em 4 anos*" e "*em 5 anos*", o resultados dos prognósticos dos dois anos seguintes. Não se aplica (já dado no problema). Realiza as ações de forma mais implícita e objetiva, as descrições e justificativa são sucintas, mas os resultados estão corretos.	5
Solucionar o modelo matemático	Identifica que a função $f(x)$ é o modelo matemático que está relacionado com a tabela, pois se utiliza dos termos "*anos*" e "*produção*" quando se refere às variáveis x e y na ilustração do gráfico: $y(prod)$ e $x(anos)$. Explicou que os prognósticos para $f(4)$ e $f(5)$ "*continuam caindo*" a cada ano que passa. Construiu o gráfico de maneira correta trançando a reta nas coordenadas: $(1, 7000)$ e $(8, 0)$ e ressalta a função $f(x) = 8000 - 1000x$, próximo à reta. Porém, não descreveu o comportamento do gráfico da	**4**

	função.	
Interpretar a solução	Explica de modo sucinto cada ação realizada e esboça uma compreensão e habilidade para relacionar os dados como o objetivo do problema. Apresenta resultados corretos, porém parte dos procedimentos realiza de forma implícita (mental). Não realizou (sendo que este item não foi claramente solicitado para os estudantes), mas de acordo com os procedimentos e desenvolvimento da ideia, o estudante apresenta **condições e habilidades para construir o modelo matemático** e **solucionar**, mas ainda não demonstrou habilidades de interpretação de forma descritiva.	5

Estudante E_2: Resultado das Características das Ações no problema resolvido

Categoria	Analises da Atividade-02	D-Quanti
Compreender o problema	O aluno ler o problema e extrai os dados organizando da seguinte forma: $P = poupança = P(x)$. Determinando diretamente que $120 + 3x/4 + P = x$. Por meio da organização dos dados, observar-se que, determina as condições do problema ao organizar o modelo da questão. Do mesmo modo que determina as condições implicitamente, o estudante determina o objetivo do problema quando organiza os dados em um modelo matemático para encontrar o resultado.	5
Construir o modelo matemático	Determina as variáveis e incógnitas, porém nomina apenas a variável dependente relacionada à poupança $P(x)$. Constrói de maneira objetiva o modelo matemático a partir dos dados do problema iniciando com $P = x - 3x/4 - 120$ e finalizando $P(x) = x/4 - 120$. O aluno não faz análise descritiva das unidades do modelo matemático.	**5**
Solucionar o modelo matemático	O estudante observa que, o modelo matemático é uma função de 1º grau, que faz uso para determinar o salário do empregado da fábrica. Soluciona o modelo matemático com base no dado $poupança = 240$, para encontrar o salário do empregado por meio da função determinada no início do problema.	5
Interpretar a solução	O estudante encontra o modelo matemático para solucionar o problema e encontrar o resultado a partir do modelo e do dado poupança = 240. Modelo $P(x) = x/4 - 120$. Resposta ao problema: então o salário mensal deve ser de *R*$ 1.440,00. Responde aos objetivos do problema ao final da questão o aluno explica *"o total do salário é a soma de tudo que ele gata e poupa, então a soma de ambos é o total do salário, logo, podemos encontrar poupança (P) em função do salário (x) isolando P. para poupar R$ 240, 00 precisa aplicar na função encontrada 'modelo' poupança em função do salário*". Nesta mesma linha de raciocínio o aluno demonstra possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo e solucionar.	5

Estudante E_2: Resultado das Características das Ações no problema resolvido

Categoria	Analises da Atividade-03	D-Quanti
Compreender o problema	O aluno ler o problema e extrai os dados do problema fazendo a seguinte abordagem:$P1$ (2,3) e $P2$ (4,6) Planta A e $y =$ $(24x - x\text{^}2)/12$ Planta B. Observa-se que o aluno determina as condições do problema quando classifica os dados da Planta A e B, fazendo a relação com a equação geral da reta $m =$ $\Delta y/\Delta x =$ $3/2$. Observa-se pela estrutura da organização dos dados o aluno define o objetivo do problema.	5
Construir o modelo matemático	Determina os parâmetros matemáticos necessários para identificar as variáveis. Faz uma identificação objetiva das equações das Plantas A e B. A partir dos pontos $P1$ (2,3) e $P2$ (4,6) aplicando a $m =$ $\Delta y/\Delta x =$ $3/2$ $=> y - y_0 = m(x - x_0)$, substituindo os dados $y - 3 = 3/2(x - 2)$, desse modo determina a equação da Planta $A = y = 3/2\ x$.No decorrer do desenvolvimento do problema faz sempre comentários na identificação dos dados Planta A e Planta B.	5
Solucionar o modelo matemático	Determina os parâmetros matemáticos necessários para identificar as variáveis. Faz uma identificação objetiva das equações das Plantas A e B. A partir dos pontos $P1$ (2,3) e $P2$ (4,6) aplicando a $m =$ $\Delta y/\Delta x =$ $3/2$ $=> y - y_0 = m(x - x_0)$, substituindo os dados $y - 3 = 3/2(x - 2)$, desse modo determina a equação da Planta $A = y = 3/2\ x$.No decorrer do desenvolvimento do problema faz sempre comentários na identificação dos dados Planta A e Planta B. **Solucionar o Modelo Matemático**: Determina o modelo matemático a partir do modelo da equação geral da reta, encontrando uma equação para a Planta A, e posteriormente **<u>iguala</u>** com a equação dada da Planta B.A partir das duas equações o aluno faz o seguinte procedimento de resolução: $3/2\ x = (24x - x\text{^}2)/12$ $48x - 2x\text{^}2 = 36x$ $-2x\text{^}2 + 48x - 36x = 0$ $2x\text{^}2 - 12x = 0$ $2x(x - 6) = 0$ $2x = 0 => x\text{^}' = 0$ $x - 6 = 0 => x'' = 6$	5
Interpretar a solução	Extrai claramente os dados do problema que são significativos para a solução. O aluno determina o momento em que as plantas atingiram a mesma altura, fazendo a ressalva, $A = B = 9$ metros (basta substituir x = 9 nas duas equações). Então em 06 dias A e B vão ter a mesma altura depois de nascidas. O aluno descreve: "analisando o gráfico vimos que a Planta (A) cresce a cada 2 dias 3 metros de altura, ou seja, a altura está em função do tempo. Primeiramente, analisei que em 4 dias ela vai estar com 6 metros de altura, a partir deste ponto pode encontrar a função que é a altura em função do tempo. Como o crescimento da Planta B é y=(24x- x^2)/12 de acordo com o enunciado, então para termos a altura de A igual a de B, basta igualarmos as duas funções".	4

Estudante E_3: Resultado das Características das Ações no problema resolvido

Categoria	Analises da Atividade-01	D-Quanti
Compreender o problema	Extrair os dados não se aplica (os dados já foram fornecidos) a função $f(x) = 8000 - 1000x$ e tabela de dados. Determina as condições e o objetivo, mas, de maneira implícita sem demonstrar os cálculos, apenas apresentando os resultados dos prognósticos *"nos próximos dois anos a produção será de 4000 no primeiro e 5000 no segundo"*. Informa que a produção será encerrada em "*oito anos, pois f(x) = 0*", neste momento não se dispõe de subsídios suficientes para identificar se o estudante determina claramente as condições do problema. No entanto, elabora o gráfico da função identificando os pontos corretamente. Para determinar o prognóstico de encerramento da produção da fábrica, o estudante fez demonstração em termos matemáticos, mas descreveu "*em oito anos a produção para, pois f(x) = 0*". O estudante esboçou o gráfico desta função, identificando os pontos em parte de forma implícita, traçando a reta nas coordenadas dos pontos: $(1,7000), (2,6000), (3,5000), (4,4000), (5,3000)\ e\ (6,2000)$.	5
Construir o modelo matemático	Identifica implicitamente que $f(x)$ está relacionado com o prognóstico da produção e x com os anos. Pois, em suas respostas utiliza os termos "anos" e "produção", dos resultados dos prognósticos dos dois anos seguintes. Realiza as ações de forma mais implícita e subjetiva, as descrições são sucintas, os cálculos são insuficientes para mais análises, mas os resultados estão parcialmente corretos, faltando elaborar melhor o modelo do gráfico.	4
Solucionar o modelo matemático	Identifica que a função $f(x)$ é o modelo matemático que está relacionado com a tabela, pois se utiliza dos termos "anos" e "produção". Sim, mas de maneira implícita, identificou os prognósticos para $f(4)$ e $f(5)$, mas não explicou. Construiu o gráfico de maneira parcialmente correta, traçando a reta nas coordenadas: $(1,7000)$ e $(6,2000)$. Porém, não descreveu o comportamento do gráfico da função e não identificou os eixos.	**4**
Interpretar a solução	Descreveu, mas de maneira implícita de modo sucinto cada ação realizada, identifica-se uma possível compreensão para relacionar os dados como o objetivo do problema, pois apresentou resultados parcialmente corretos, porém parte dos procedimentos realiza de forma implícita (mental). Não realizou o relatório (sendo que este item não foi claramente solicitado para os estudantes), mas apresenta aspectos de solução do modelo.	4

Estudante E_3: Resultado das Características das Ações no problema resolvido.

Categoria	Analises da Atividade-02	D-Quanti
Compreender o problema	Compreender o problema: *O aluno faz a extração dos dados do seguinte modo: salário = x reais, aluguel = 120,00, manutenção = 3x/4 e poupança = 1x/4. Determina parcialmente por tentativa de ensaio e erro, onde busca um resultado em um modelo incompleto conforme descreve P = 1x/4.* *O aluno não define com clareza o objetivo do problema no desenvolvimento da questão, pois os dados descritos são insuficientes para realizar tal análise, e conforme o resultado encontrado, observou-se que o aluno não considerou todos os elementos dados no problema mesmo após tê-los identificado, esquecendo-se de subtrair o valor do aluguel (-120), chegando a um resultado incorreto.*	2
Construir o modelo matemático	Construir o Modelo Matemático*: O aluno identifica e descreve as variáveis do problema fazendo a descrição individual.* *Identifica as variáveis do seguinte modo: salário = x reais, aluguel = 120,00, manutenção = 3x/4 e poupança = 1x/4. O aluno constrói o modelo matemático por tentativa de ensaio e erro, não conseguindo fazer relação entre os elementos P(x) = (1/4)x. Não faz nenhuma análise descritiva dos dados.*	**2**
Solucionar o modelo matemático	**Solucionar o Modelo Matemático**: O modelo encontrado pelo aluno não foi suficiente para encontrar a solução do problema. Não recomendado na ocasião. Soluciona o modelo, no entanto, não foi suficiente para encontrar o resultado do problema.	2
Interpretar a solução	**Interpretar a Solução**: Extrai os elementos significativos, porém não faz relação completa com o objetivo do problema. Não responde ao objetivo do problema, devido ao modelo ter sido construído com falta de elementos, e consequentemente o resultado encontrado foi inferior. Não realizou nenhum relatório descritivo e também não foi observado no desenvolvimento dos cálculos elementos matemáticos de compreensão para determinar o objetivo do problema.	2

Estudante E_4: Resultado das Características das Ações no problema resolvido

Categoria	Analises da Atividade-01	D-Quanti
1ª Ação: Compreender o problema	Extrair os dados não se aplica (os dados já foram fornecidos) a função $f(x) = 8000 - 1000x$ e tabela de dados. Determina, mas, de maneira implícita sem demonstrar os cálculos, apenas apresentando os resultados descritos dos prognósticos "*nos próximos dois anos a produção sofre uma diminuição de* 2000 *unidades, pois, a cada ano que passa a produção diminui 1000 unidades*", dessa maneira observa-se que o estudante determina as condições do problema. Identificou o momento em que a produção deverá parar e elaborou o gráfico. O estudante define o objetivo	5

	do problema, mas de forma implícita. Para determinar o prognóstico de encerramento da produção da fábrica, o estudante não fez a demonstração em termos matemáticos, mas descreveu "*a produção vai parar quando, não houver nenhuma unidade, ou seja, quando y = 0, logo a função se torna nula, quando x = 8, portanto passados 8 anos*". Posteriormente, esboçou o gráfico desta função, identificando os pontos em parte de forma implícita, traçando a reta nas coordenadas dos pontos: $(1,7000), (2,6000)\ e\ (3,5000)$.	
2ª Ação: Construir o modelo matemático	O modelo já foi dado não se aplica. Mas, identifica implicitamente que $f(x)$ está relacionado com o prognóstico da produção e x com os anos. Pois, em suas descrições utiliza os termos "*anos*" e "*a produção*", dos resultados dos prognósticos dos dois anos seguintes. Realiza as ações de forma implícita e subjetiva, as descrições são sucintas, os cálculos são insuficientes para mais análises, mas os resultados estão parcialmente corretos, devido o esboço incompleto do gráfico.	5
3ª Ação: Solucionar o modelo matemático	Observa-se pelos resultados que o estudante identifica de forma implícita que a função $f(x)$ é o modelo matemático que está relacionado com a tabela, pois se utiliza dos termos "*anos*" e "*produção*" na descrição das respostas. Identificou os prognósticos explicando que para os próximos dois anos a fabricação sofreria uma diminuição de 2000 unidades. Construiu o gráfico de maneira parcialmente correta trançando a reta nas coordenadas: $(1,7000)$ e $(3,5000)$. Porém, não descreveu o comportamento do gráfico da função e não identificou os eixos.	**4**
4ª Ação: Interpretar a solução	Interpreta de maneira implícita de modo sucinto, pela elaboração das respostas identifica-se uma possível compreensão do estudante, para relacionar os dados com o objetivo do problema. Apresenta resultados parcialmente completos, porém parte dos procedimentos realiza de forma implícita (mental), o esboço do gráfico ficou incompleto. Não realizou relatório ou descrição (sendo que este item não foi claramente solicitado para os estudantes), mas apresenta aspectos de solução do modelo.	4

Estudante E_4: Resultado das Características das Ações no problema resolvido

Categoria	**Analises da Atividade-02**	**D-Quanti**
Compreender o problema	Não se aplica (os dados já foram fornecidos) a função $f(x) = 8000 - 1000x$ e tabela de dados. Determina as condições, demonstrando os cálculos, para identificar os prognósticos dos próximos dois anos, obtendo como resultado $f(4) = 4000$ e $f(5) = 5000$. Identifica o ano que a produção será encerrada no 8º ano e esboça o gráfico nos pontos. O estudante define o objetivo do problema, realizando os prognósticos de $f(4)$ até $f(8)$ para identificar os valores dos próximos dois anos e o encerramento no próximo 8º ano. Esboçou o gráfico desta função, identificando os pontos em parte de forma implícita, traçando a reta nas coordenadas dos pontos: $(1,7000), (2,6000), (3,5000), (4,4000), (5,3000), (6,2000), (7,1000)$ e $(8,0)$, nomeando os eixos $y(prod)$ e $x(anos)$.	5
Construir o modelo matemático	Não se aplica. Identifica claramente que $f(x)$ está relacionado com o prognóstico da produção e x com os anos. Pois, em suas descrições utiliza os termos "anos" e "produção" e "conforme a função $f(x) = a + bx$. Realiza as ações de forma objetiva, as descrições são sucintas, os cálculos são suficientes para realizar análises, os resultados estão corretos, realizou o esboço completo do gráfico.	5
Solucionar o modelo matemático	Observa-se pelos resultados que o estudante identifica de forma clara que a função $f(x) = ax + b$ é o modelo matemático que está relacionado com a tabela, pois se utiliza dos termos "anos" e "produção" na descrição das respostas. Determina as condições de maneira implícita, identificou os prognósticos para os próximos cinco anos de produção, sendo identificado que no 8º ano a produção seria encerrada. Construiu o gráfico de maneira correta trançando a reta nas coordenadas: $(1,7000), (2,6000), (3,5000), (4,4000), (5,3000), (6,2000), (7,1000)$ e $(8,0)$. Porém, não descreveu o comportamento do gráfico da função e identificou os eixos y(prod) e x(anos).	**5**
Interpretar a solução	Determina de maneira implícita de modo sucinto, pela elaboração das respostas identifica-se uma possível compreensão do estudante, para relacionar os dados com o objetivo do problema. Sim, apresentando resultados completos, porém não justifica claramente as ações e os resultados encontrados, elaborou o esboço do gráfico completo. Não realizou (sendo que este item não foi claramente solicitado para os estudantes), mas apresenta aspectos de compreensão e solução do modelo.	4

Estudante E_5: Resultado das Características das Ações no problema resolvido

Categoria	**Analises da Atividade-02**	**D-Quanti**
Compreender o problema	O aluno não extrai os elementos do problema, mas faz as identificações de forma implícita. Os elementos para essa análise são insuficientes, mas observa-se que ele determina o modelo corretamente, no entanto, não faz a relação com o elemento poupança. Não determina completamente o objetivo do problema, os dados são insuficientes para identificar o nível de compreensão do aluno.	2
Construir o modelo matemático	Determina de forma implícita as variáveis do problema. Não faz a descrição das variáveis de forma relativa com os elementos. Constrói o modelo matemático $P(x) = 3x/4 - 120$, no entanto não aplica a questão b) para encontrar o salário do empregado quando ele poupa $R\$\ 240{,}00$. Não realiza análise descritiva das unidades de medida do modelo matemático determinado.	**4**
Solucionar o modelo matemático	Os métodos utilizados foram insuficientes para resolver o problema. Não soluciona a questão b), fazendo uso do modelo matemático construído.	1
Interpretar a	O estudante faz somente uma breve descrição afirmando "*Como ele gasta 4/3 de seu salário, pagando R$ 120,00 de aluguel, logo seu salário é de R$ 480,00*". No entanto, não respondeu corretamente o objetivo do problema.	2

solução		

APÊNDICE F – Resultados da Atividades Formativas e Mediadora: Análise Descritiva

Estudante $E_{1:}$ Resultado das Características das Ações no problema resolvido – **Atividade-04 -** Faltou na aplicação.
Estudante $E_{1:}$ Resultado das Características das Ações no problema resolvido – **Atividade-05 -** Faltou na aplicação.

Estudante $E_{1:}$ das Características das Ações no problema resolvido

Categoria	**Analises da Atividade-06**	**D-Quanti**
Compreender o problema	Faz a leitura, extrai os elementos do problema dado, destacando $x = 2$ pela direita e pela esquerda deste ponto. Determina, os valores para substituição da variável x, tanto pela esquerda, quanto pela direita. Define o objetivo, pois destaca as variáveis pela esquerda e pela direita para encontrar valores mais próximos de x.	5
Construir o modelo matemático	Determina as variáveis, escolhendo valores para aplicação na tabela. Nomeia as variáveis da tabela, determina x elevado ao sinal negativo (esquerda) e x elevado ao sinal positivo (direita). O modelo matemático foi fornecido parcialmente, ou seja, o estudante precisaria completar com a resolução da equação, que constrói parcialmente o modelo, pois não analisou ponto a ponto da tabela, sua análise foi realizada de maneira geral, de modo que não fez o detalhamento explicativo da diferença entre f(x) e x, para o entendimento da ideia de limite.	2
3ª Ação: Solucionar o modelo matemático	O método matemático foi fornecido no problema. O estudante soluciona o modelo, atribuindo valores para x no intervalo de 1,5 até 1,9999 pela direita e 2,5 até 2,001 pela direita, demonstrado em duas tabelas consecutivas.	5
4ª Ação: Interpretar a solução	Extrai os resultados com relação ao objetivo do problema. Mas, responde parcialmente, pois não detalha o comportamento ponto a ponto da função que leve ao entendimento do conceito de limite. Na sua explicação, faz um breve comentário: "*quando x tende a 2, f(x) tende a zero*". Esse é um entendimento intuitivamente correto, mas insuficiente para atender o objetivo da questão.	**2**

Estudante $E_{1:}$ Resultado das Características das Ações no problema resolvido

Categoria	**Analises da Atividade-07**	**D-Quanti**
Compreender o problema	Não extrai todos os elementos do problema e não determina as condições, pois não na tentativa de solução não identifica a definição de limite, portanto, não defini os objetivos do problema.	1
Construir o modelo matemático	Determina parcialmente o modelo, pois não explica de forma precisa e completa. Nomeia parcialmente as variáveis e não constrói o modelo matemático, pois não menciona a definição intuitiva de limite, ou seja, realiza análise de forma incompleta.	1
Solucionar o modelo matemático	Não encontra a solução correta, pois não menciona a definição de limite, na forma intuitiva. Soluciona parcialmente, pois responde de forma incompleta a primeira questão e incorretamente a tabela de demonstração pela esquerda.	2
Interpretar a solução	Não extrai, pois responde parcialmente a primeira questão e incorretamente a segunda. Portanto, não dá respostas aos objetivos do problema, pois não relaciona com a definição intuitiva de limite, na expressão verbal do estudante afirma que: "*o valor de* $f(x)$ *quando tendemos a* 2 *é aproximado de* 7". E segunda questão (b): "*sim. Se tivermos uma função que apresente uma descontinuidade*".	1

Estudante $E_{2:}$ Resultado das Características das Ações no problema resolvido

Categoria	**Analises da Atividade-04**	**D-Quanti**

Compreender o problema	A RESPOSTA NÃO SE APLICA AO PROBLEMA.	1
Construir o modelo matemático	A RESPOSTA NÃO SE APLICA AO PROBLEMA.	1
Solucionar o modelo matemático	A RESPOSTA NÃO SE APLICA AO PROBLEMA.	1
Interpretar a solução	A descrição do aluno é insuficiente para realizar conclusões de análise: "*A palavra TANGENTE significa tocando. Uma reta tangente deve ter a mesma direção que a curva no ponto de contato, uma tangente à uma curva é uma reta que toca a curva. Podemos dizer que a inclinação da reta tangente a uma curva é o limite da inclinação das retas secantes*".	1

Estudante E_2: Resultado das Características das Ações no problema resolvido

Categoria	**Analises da Atividade-05**	**D-Quanti**
Compreender o problema	A RESPOSTA NÃO SE APLICA AO PROBLEMA.	1
Construir o modelo matemático	A RESPOSTA NÃO SE APLICA AO PROBLEMA.	**1**
Solucionar o modelo matemático	A RESPOSTA NÃO SE APLICA AO PROBLEMA.	1
Interpretar a solução	Não encontra nenhum resultado na forma algébrica.Apenas a seguinte descrição *"Fica entendido a velocidade de um dado objeto não podemos afirmar que é uma velocidade exata, ou seja, constante. Analisando os exemplos fica entendido que cada vez que diminuirmos o espaço de tempo ficamos mais próximos da velocidade média"*.	1

Estudante E_2: Resultado das Características das Ações no problema resolvido

Categoria	**Analises da Atividade-06**	**D-Quanti**
Compreender o problema	Faz a leitura extrai os elementos do problema dado, destacando $x = 2$ pela direita e pela esquerda deste ponto.Determina as condições, pois determina valores para substituição da variável x, tanto pela esquerda, quanto pela direita, na ilustração gráfica inseri duas setas apontando para o número 2 no eixo das abcissas. Define o objetivo, destacando as variáveis pela esquerda e pela direita para encontrar valores mais próximos de x. Inclusive destaca a função de limite tendendo a 2.	5
Construir o modelo matemático	Determina as variáveis, escolhendo valores para aplicação na tabela. Nomeia as variáveis da tabela determina$x$ elevado ao sinal negativo (esquerda) e x elevado ao sinal positivo (direita). O modelo matemático foi fornecido no problema, mas não completamente, o estudante precisaria completar com resolução da equação. Fez análise de modo parcial, pois não analisou ponto a ponto da tabela, sua análise foi realizada de maneira geral. O aluno não faz o detalhamento explicativo que deveria ser feito, para o entendimento da ideia intuitiva de limite.	2
Solucionar o modelo matemático	O método matemático foi fornecido no problema. O estudante soluciona o modelo, atribuindo valores para x no intervalo de 1,5 até 1,999 pela direita e 2,5 até 2,0001 pela direita, demonstrado em duas tabelas consecutivas.	5
Interpretar a solução	Extrai os resultados significativos com relação ao objetivo do problema. Responde parcialmente, pois não detalha o comportamento ponto a ponto da função que leve ao entendimento do conceito de limite. Na sua explicação: *"quando nos aproximados do valor x=2 pela direita y = f(x) se aproxima de "0" por valor maior que 0. Quando nos aproximas do valor de x=2 pela esquerda, y = f(x) se aproxima de 0, por valor menor que 0"*. Esse é um entendimento intuitivamente correto, mas poderia ser mais detalhado explicitando as diferenças de um valor para outro de aproximação.	**4**

Estudante E_2: Resultado das Características das Ações no problema resolvido

Categoria	**Analises da Atividade-07**	**D-Quanti**
Compreender o problema	Não conseguiu extrair os elementos do problema como também não determinou as condições e consequentemente não conseguiu definir os objetivos do problema.	1
Construir o modelo matemático	Não determinou e não nomeou as variáveis. Portanto, não conseguiu construir o modelo matemático, logo não houve análises.	1

Solucionar o modelo matemático	Não realizou a solução.	1
Interpretar a solução	Não extraiu nenhuma resposta.	1

Estudante $E_{3:}$ Resultado das Características das Ações no problema resolvido

Categoria	**Analises da Atividade-04**	**D-Quanti**
Compreender o problema	Ler e descreve os elementos essenciais do problema. Determina as condições afirmando que precisa encontrar o coeficiente para poder resolver a equação. Define o objetivo ao afirmar que precisa encontrar o coeficiente angular definindo dois pontos, para encontrar a inclinação da reta.	**4**
Construir o modelo matemático	Não determina o modelo na sua descrição, as variáveis e não nomeia, portanto não realiza análises das unidades.	1
Solucionar o modelo matemático	Não encontra método algébrico. Soluciona parcialmente o modelo de forma descritiva.	1
Interpretar a solução	O estudante explica de forma confusa os conceitos relacionados ao problema. A resposta dada não esta de acordo com o objetivo. O estudante descreve como relatório de análise: *"para encontrar a solução é necessário montar o gráfico da tabela dada. Como o ponto P já é conhecido traça-se uma curva tangenciando o ponto P, que na sua extremidade passa o ponto R, através destes dois pontos podemos chegar ao coeficiente angular, que é a solução do problema*". O relatório é insuficiente para realizar análise da compreensão do problema, fazer relações com os conceitos e interpretação da solução.	2

Estudante $E_{3:}$ Resultado das Características das Ações no problema resolvido

Categoria	**Analises da Atividade-05**	**D-Quanti**
Compreender o problema	Faz a leitura e destaca que o problema envolve duas variáveis (distância e tempo). Determina as condições do problema quando afirma que existem duas velocidades no problema (média e instantânea). Define os objetivos descrevendo as velocidades que precisam ser encontradas.	5
Construir o modelo matemático	Apesar de descrever, o aluno não determina as variáveis algebricamente. Do mesmo modo, não nomeia nenhuma variável e incógnita. Não constrói o modelo matemático de forma algébrica ou geométrica, apenas descreve o que compreendeu. Portanto, não consegue fazer análise das unidades do problema.	1
Solucionar o modelo matemático	Não descreve modelo matemático na forma algébrica ou geométrica. Soluciona apenas de forma descritiva a maneira de resolver, não apresenta definições matemática para a solução.	2
Interpretar a solução	Extrai os resultados ao observar que o problema trata de dois tipos de velocidade (média e instantânea). Responde parcialmente de forma descritiva o problema, mas não demonstra modelo matemático para a solução. "*O problema envolve duas variáveis: distância e tempo. Através do gráfico, podemos visualizar duas velocidades, a velocidade média e a velocidade instantânea. A reta tangente, fornece a velocidade instantânea e a reta secante a velocidade média. Podemos calcular a importância dos limites para determinar a solução de problemas que envolve velocidade e distância".*	**3**

Estudante $E_{2:}$: Resultado das Características das Ações no problema resolvido

Categoria	**Analises da Atividade-06**	**D-Quanti**
Compreender o problema	Faz a leitura extrai os elementos do problema dado, destacando $x = 2$ pela direita e pela esquerda deste ponto. Determina parcialmente as condições, pois os valores escolhidos para substituição da variável x, pela direita, o aluno não soube fazer a aproximação adequada, sendo observado também na ilustração gráfica. Define o objetivo, pois destaca as variáveis pela esquerda e pela direita para encontrar valores mais próximos de x. Inclusive destaca a função de limite tendendo a 2.	2
Construir o modelo matemático	Determina parcialmente correta as variáveis, pois os valores escolhido para atribuição a x pela direita, o estudante poderia ter atribuído valores mais próximos possível de 2. Nomeia as variáveis da tabela, determina x elevado ao sinal negativo (esquerda) e x elevado ao sinal positivo (direita). O modelo matemático foi fornecido no problema, mas parcialmente completo, o estudante precisaria completar com resolução da equação. Fez análise das unidades de modo parcial, pois não analisou ponto a ponto da tabela, sua análise foi realizada de maneira geral. O estudante não faz o detalhamento explicativo que deveria ser feito, para o entendimento da ideia intuitiva de limite.	2

Solucionar o modelo matemático	O método matemático foi fornecido no problema. O estudante soluciona o modelo, mas parcialmente correto, atribuindo valores para x no intervalo de 1,5 até 1,99999 pela direita e 2,5 até 2,01 pela direita, demonstrado em duas tabelas consecultivas.	3
Interpretar a solução	Extrai os resultados com relação ao objetivo do problema. Responde parcialmente, pois não detalha o comportamento ponto a ponto da função que leve ao entendimento do conceito de limite. Na sua explicação: "*O limite da função quando x tende 2 é igual 0"*. O estudante dá uma resposta correta, mas não detalha o comportamento, portanto, esta resposta não atende ao objetivo do problema.	**2**

Estudante $E_{3:}$ Resultado das Características das Ações no problema resolvido

Categoria	**Analises da Atividade-07**	**D-Quanti**
Compreender o problema	Não extrai todos os elementos do problema. Não determina as condições do problema pois não identifica a definição de limite. Portanto, não defini os objetivos do problema, pois não menciona a definição de limite.	1
Construir o modelo matemático	Determina parcialmente, pois não explica precisamente o comportamento dos valores no intervalo dado. Nomeia parcialmente, portanto, não constrói corretamente o modelo, por não mencionar a definição de limite, logo sua análise está incorreta.	1
Solucionar o modelo matemático	Não encontra a solução correta, pois não menciona a definição de limite. Responde de forma incompleta e incorreta a primeira questão e não responde a segunda.	2
Interpretar a solução	Não extrai os resultados, pois responde parcialmente a primeira questão e não responde a segunda. Portanto, não dá respostas aos objetivos do problema, pois não relaciona com a definição de limites, na primeira questão responde: *"o limite de f(x) para x=7*". E na segunda apenas menciona que *f(x) =x*. Logo, as respostas estão incorretas, ou seja, não atendem aos objetivos do problema.	1

Estudante $E_{4:}$ Resultado das Características das Ações no problema resolvido-**Problema 04** Faltou na aplicação
Estudante $E_{4:}$ Resultado das Características das Ações no problema resolvido-**Problema 05** Faltou na aplicação

Estudante $E_{4:}$ Resultado das Características das Ações no problema resolvido

Categoria	**Analises da Atividade-06**	**D-Quanti**
Compreender o problema	Faz a leitura, extrai os elementos do problema dado, destacando $x = 2$ pela direita e pela esquerda deste ponto. Determina parcialmente as condições, pois os valores escolhidos para substituição da variável x, pela direita não foram apropriados para fazer a aproximação adequada, sendo observado também na ilustração gráfica. Define parcialmente o objetivo, pois destaca as variáveis pela esquerda e pela direita para encontrar valores mais próximos de x. Inclusive destaca a função de limite tendendo a 2.	2
Construir o modelo matemático	Determina parcialmente as variáveis, pois os valores escolhido para atribuição a x pela direita, poderia ter escolhido valores mais próximos possível de 2.Nomeia as variáveis da tabela determina x elevado ao sinal negativo (esquerda) e x elevado ao sinal positivo (direita). O modelo matemático foi fornecido no problema, mas o estudante precisaria completar com resolução da equação. Fez análise de modo parcial, pois não analisou ponto a ponto da tabela, sua análise foi realizada de maneira geral. O aluno não faz o detalhamento explicativo que deveria ser feito, para o entendimento da ideia intuitiva de limite.	2
Solucionar o modelo matemático	O método matemático foi fornecido no problema. O estudante soluciona o modelo, mas parcialmente correto, atribuindo valores para x no intervalo de 1,5 até 1,99 pela direita e 2,5 até 2,1 pela direita, demonstrado em duas tabelas consecultivas. Não representou os pontos da tabela no gráfico dado.	2
Interpretar a solução	Extrai os resultados significativos com relação ao objetivo do problema. Responde parcialmente, pois não detalha o comportamento ponto a ponto da função que leva ao entendimento do conceito de limite. Na sua explicação: "*O limite da função quando x tende 2 é igual 0*". A resposta dada está correta, mas não detalha o comportamento, portanto, esta resposta não atende ao objetivo do problema.	2

Estudante $E_{4:}$ Resultado das Características das Ações no problema resolvido

Categoria	**Analises da Atividade-07**	**D-Quanti**
Compreender o problema	Não extrai todos os elementos do problema. Faltando mencionar a definição de limite. Não determina as condições do problema, pois não identifica a definição de limite. Não defini os objetivos do problema, pois não menciona a definição de limite.	1
Construir o modelo matemático	Determina parcialmente, pois não explica de forma precisa e completa. Nomeia parcialmente as variáveis, faltando identificar a definição limite. Não constrói o modelo, pois não menciona a definição de limite. Realiza análise de forma parcial.	2

Solucionar o modelo matemático	Não encontra, pois não menciona a definição de limite. Responde de forma incompleta, pois a primeira questão falta a definição limite e a segunda está correta.	3
Interpretar a solução	Extrai parcialmente os resultados significativos, pois responde as duas questões, mas a primeira está incompleta. A resposta dada não está totalmente correta, pois a primeira questão faltou mais detalhamento sobre o conceito de limite, mas a segunda está correta. A primeira questão responde: na primeira "*O limite de $f(x)$ quando x tende a 2, será igual a 7*" e na segunda "*Não, pois nas vizinhanças de 2 f(x) é igual a 7, portanto, para x=2, f(x) se aproxima de 7''*.	4

Estudante E_5: Resultado das Características das Ações no problema resolvido

Categoria	Analises da Atividade-04	D-Quanti
Compreender o problema	Ler o problema e extrai os elementos. Determina as condições quando afirma que primeiro precisa encontrar o coeficiente angular, para poder encontrar a equação da reta tangente, mas o problema só dá apenas um ponto e são necessários dois pontos. Define a descrever completamente as condições do problema.	5
Construir o modelo matemático	Determina todas as variáveis e incógnitas quando determinas as fórmulas algébricas e a representação geométrica. Nomina da seguinte forma: $P(1,1), Q(x, x^2), m, t$. Constrói o modelo algébrico e geométrico do problema. Realiza as análises das unidades de forma descritiva.	5
Solucionar o modelo matemático	Encontra o método algébrico e geométrico de solução. Resolve de forma descritiva fazendo demonstrações das condições do problemas, as formas de solução e a relação entre os elementos. $P(x) = x - (120 + \frac{3}{4}x)$ $240 = \frac{x}{4} - 120$	5
Interpretar a solução	Extrai todos os elementos relativos ao problema, fazendo descrições de aplicação ao modelo. Responde ao problema de forma descritiva fazendo demonstração algébrica e geométrica do problema, demonstra explicitado da escrita. De acordo com o problema apresentado, para encontrar uma reta t tangente à parábola $y = x\text{^}2$, usaremos os mesmos princípios da explicação dada, onde encontrando o coeficiente angular, podemos achar a equação da reta, mas temos um problema: $Y - Y0 = M(X - X0)$, ou seja, só temos um ponto, e precisamos de dois pontos para encontrar o coeficiente angular m no ponto (1,1). Esboça um gráfico com identificação do pontos e das retas secante e tangente à esquerda da parábola com concavidade para cima. E continua a descrição: "daí colocamos um ponto na parábola próximo para calcular assim o valor do coeficiente da reta secante, no caso a reta PQ, $m_{PQ} = (x^2 - 1)/(X - 1)$. Assim dada a fórmula para achar um ponto qualquer, ou seja, quanto mais próximo o ponto Q estiver de P, mais próximo x estará de 1. De acordo com esta descrição o aluno demonstrou uma forma correta de descreve o problema no modo de solucionar o problema, usando inclusive o modelo algébrico.	5

Estudante E_5: Resultado das Características das Ações no problema resolvido

Categoria	Analises da Atividade-05	D-Quanti
Compreender o problema	Faz a leitura e extrai os elementos principais do problema identificando a velocidade como um elemento a ser descoberto. Determina parcialmente as condições do problemas, pois identifica apenas que deve encontrar a velocidade média, faltando mencionar a velocidade instantânea. Define o objetivo parcialmente, pois afirma ter que encontrar somente a velocidade média para solucionar o problema.	2
Construir o modelo matemático	Determina parcialmente as variáveis e incógnitas do problema, da seguinte forma: $t = 5$, $t = 5{,}1$. Nomina apenas a variável de tempo: $t = 5$ e $t = 5{,}1$. Não constrói modelo matemático na forma algébrica ou geométrica. Realiza parcialmente análise das unidades que destaca.	**2**
Solucionar o modelo matemático	Não faz descrição quanto ao método de resolução nem mesmo de forma descritiva. Não se aplica. Apenas tenta descrever a solução, mas insuficiente para análise.	2
Interpretar a solução	Não extrai nenhum resultado do problema. Responde parcialmente ao problema. A descrição do estudante quanto a análise do problema: "*Nesse problema, o autor quer saber a velocidade de uma bola após 5 segundos, sendo ela solta a partir de um ponto de observação no alto da Torre CN em Toronto, cerca de 450 metros acima do solo. Como na explicação e na resolução dos problemas anteriores de velocidade, o primeiro passo é calcular a velocidade média no intervalo de tempo, temos um único instante de tempo neste caso, (t=5), porém podemos aproximar a uma velocidade média, acima do instante de tempo que é dado, t=5 até o instante t=5,1, como foi feito no problema*".	3

Estudante E_5: Resultado das Características das Ações no problema resolvido

Categoria	Analises da Atividade-06	D-Quanti

Compreender o problema	Faz a leitura, extrai os elementos do problema, destacando $x = 2$ pela direita e pela esquerda deste ponto. Determina parcialmente o objetivo, pois os valores escolhidos para substituição da variável x, pela direita atribui valores distantes do ponto, sendo observado também na ilustração gráfica. Destaca as variáveis pela esquerda e pela direita para encontrar valores mais próximos de x. Inclusive destaca a função de limite tendendo a 2.	2
Construir o modelo matemático	Determina parcialmente correta as variáveis, pois os valores escolhido para atribuição a x pela direita poderia ter atribuído valores mais próximos possível de 2. Nomeia as variáveis da tabela determinar x elevado ao sinal negativo (esquerda) e x elevado ao sinal positivo (direita). O modelo matemático foi fornecido no problema, mas não completamente, precisaria completar com resolução da equação. De modo parcial, pois não analisou ponto a ponto da tabela, sua análise f realizada de maneira geral. O aluno não faz o detalhamento explicativo que deveria ser feito, para o entendimento da ideia de limite.	2
Solucionar o modelo matemático	O método matemático foi fornecido no problema, o aluno soluciona o modelo parcialmente correto, atribuindo valores para x no intervalo de 1,5 até 1,99 pela direita e 2,4 até 2,0001 pela direita, demonstrado em duas tabelas consecutivas. Demonstrou os pontos encontrados na tabela dada.	3
Interpretar a solução	Extrai os resultados significativos com relação ao objetivo do problema. Responde parcialmente, pois não detalha o comportamento ponto a ponto da função que leva ao entendimento do conceito de limite. Na sua explicação: "*O limite da função quando x tende 2 é igual 0"*. Ela dá uma resposta correta, mas detalha o comportamento, portanto, esta resposta não atende ao objetivo do problema.	2

Estudante $E_{5:}$ Resultado das Características das Ações no problema resolvido

Categoria	**Analises da Atividade-07**	**D-Quanti**
Compreender o problema	Extrai parcialmente os elementos do problema. Determina parcialmente as condições do problema, pois não identifica a definição de limite. Define parcialmente os objetivos do problema, pois não menciona a definição de limite.	1
Construir o modelo matemático	Determina parcialmente, pois não explica de forma precisa e completa. Nomeia parcialmente as variáveis. Não constrói, pois não menciona a definição de limite. Realiza de forma incorreta.	1
Solucionar o modelo matemático	Não encontra, pois não menciona a definição de limite. Responde de forma incompleta e incorreta a primeira questão e não responde à segunda.	2
Interpretar a solução	Não extrai, pois responde parcialmente a primeira questão e não responde a segunda. Não dá respostas aos objetivos do problema, pois não relaciona com a definição de limites. O aluno descreve somente a primeira questão responde: *"O limite de f(x) quando x tende a 2 será igual a 7"*.	1

APÊNDICE G- Resultados do Teste Final: Análise Descritiva

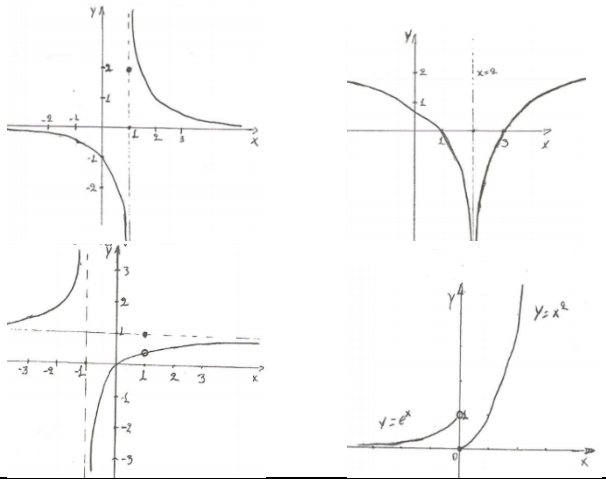
Estudante E_1: Resultado das Características das Ações no problema resolvido

Categoria	Analises da Atividade-08	D-Quanti
Compreender o problema	Faz a leitura das funções do problema e extrai os elementos essenciais para saber se a função é contínua ou descontínua no ponto dado. Determina realizando os cálculos na forma algébrica e geométrica. Destaca cada uma das tabelas dos pontos próximos do valor dado, compõe o gráfico de cada uma. Ao destacar cada uma das funções se observa que o aluno define o objetivo, pois descreve o que precisa encontrar para dar o resultado do problema.	5
Construir o modelo matemático	Identifica as variáveis e incógnitas dispostas na tabela para encontrar os pontos próximos do ponto dado tanto pela sua direita, quanto pela esquerda. Nomina as variáveis, classifica X elevado ao sinal de menos pela esquerda e x elevado ao sinal positivo pela direita. Constrói e determina as condições para resolver, ao destacar cada uma das funções para identificar o tipo. O aluno realizou também para todas as funções a demonstração geométrica e também fez um breve relatório descritivo. Analisa que variáveis necessitam de atenção ao substituir os valores, que precisam tomar um posicionamento nas proximidades do ponto dado.	5
Solucionar o modelo matemático	Utiliza o método de resolução intuitiva de limite, compondo tabela e gráfico do comportamento da função para poder identificar o tipo. não recomendado para este problema. O aluno explica porque cada função é descontínua no pondo dado: a) atribui valores próximos de 2 pela esquerda até a quarta cada decima, encontrando as coordenadas pela esquerda (1,5,-0,6931) até (0,999, -9,2103) e pela direita atribuindo valores próximos de dois até a quarta casa decima (2,5,-0,6931) até (2,0001, -9,2103) e demonstra no gráfico; b)já nesta função o aluno compõe apenas uma tabela, determinando os pontos (2,1), (0,-1), (3, 1/2) e (-1, -1/2) aplica no gráfico; c) nesta função o aluno elabora duas tabelas (esquerda e direita) e encontra as coordenadas pela esquerda (-1, 0,3678), (-2, 0,1353), (-0,5, 0,6065), (-0,1, 0,9048) e pela direita (0,0), (1,1), (2,4), (0,5, 0,25) e (0,1,0,01); d) (0,0), (0,5 , 0,33) e (2, 2/3).	5
Interpretar a solução	Através das funções dadas destaca e descreve o comportamento identificando o tipo, atendendo ao objetivo do problema.	5

Estudante E_1: Resultado das Características das Ações no problema resolvido

Categoria	Analises da Atividade-09	D-Quanti
Compreender o problema	Extrai os elementos e destaca o modelo da função. Ao organizar os dados para resolver, esboça que determina as condições do problema. Ao iniciar a resolução do problema destaca-se a função com um ponto de interrogação S(x) = ?, observa-se que o aluno determina uma incógnita neste momento.	5
Construir o modelo matemático	Determina as variáveis e incógnitas, definindo que S(x), x, y, demonstrando algebricamente. Nomeia as variáveis e incógnitas: identifica a função. Não se aplica o modelo já foi dado no problema, mas organiza dos dados problemas na forma algébrica. Faz relação das variáveis do modelo matemático com a solução do problema. $960 = x - 480$	**5**
Solucionar o modelo matemático	Encontra o método de solução, através da compondo uma tabela e atribuindo valores para x no intervalo de 10 até 99.Não se aplica. Observando o desenvolvido dos cálculos o aluno solucionou o modelo matemático e apresenta o resultado. $x = 960 + 480$	5
Interpretar a solução	Extrai o modelo do problema e faz relação com o limite que precisa encontrar. Responde ao problema destacando os procedimentos algebricamente. No final da questão o aluno descreve o seguinte texto: "*Destacando o intervalo que determina a função da porcentagem do custo. Quanto mais distante de 100 pela esquerda, menor o custo"*. No entanto, o valor máximo é de 80%.	**5**

Estudante E_2: Resultado das Características das Ações no problema resolvido

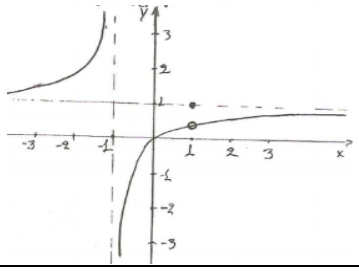
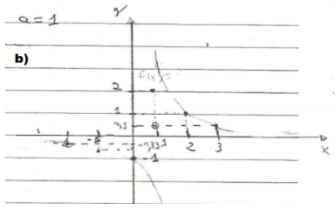
Categoria	Analises da Atividade-08	D-Quanti
Compreender o problema	Faz a leitura e extrai os elementos das funções de cada questão. Determina as condições e o objetivo quando, esboça um gráfico a partir dos dados do problema e por isso consegue explicar. Define o objetivo a destacar o modelo gráfico e a explicação dada sobre cada função resolvida.	5
Construir o modelo matemático	Determina as variáveis e incógnitas necessárias para resolver o problema. Nomina as variáveis x e y. Constrói para todas a funções o modelo matemático na forma geométrica e algébrica: 	5
Solucionar o modelo matemático	Aplica o método para resolução da função limite. Soluciona todos os modelos matemáticos, fazendo a seguinte descrição para cada uma.	5
Interpretar a solução	Extrai os resultados destacando cada uma das funções. Dá resposta parcialmente ao problema, pois para uma das funções o estudante não descreveu a resposta. Descreve o motivo de três funções serem descontínuas faltando apenas a última: *a) ele afirma ser descontínua, pois a função logarítmica não está definida no ponto 2; b) afirma ser descontínua porque no ponto 1 o limite não existe; c) afirma pelas condições dada da função os limites laterais não são iguais, ou seja, não existe, logo é descontínua; e d) não explicou.*	4

Estudante E_2: Resultado das Características das Ações no problema resolvido

Categoria	Analises da Atividade-09	D-Quanti
Compreender o problema	Faz a leitura, destaca as funções e as variáveis. Determina parcialmente as condições, pois não compreende totalmente o problema e não se atentou para o intervalo dado, por isso interpretou erroneamente a forma de encontrar o resultado. Define parcialmente o objetivo, pois fez somente a aplicação inicial do modelo, ou seja, não atribuiu valores suficiente para a variável para solucionar corretamente o problema.	2
Construir o modelo matemático	Determina parcialmente o modelo, destacou somente as incógnitas e não atribuiu valores para as variáveis, para obter dados substanciáveis. Não determina, pois não atribuiu valores para variáveis. Constrói parcialmente, pois o modelo encontrado pelo aluno é insuficiente para encontrar o resultado. A análise do aluno está incorreta.	**2**
Solucionar o modelo matemático	O método encontrado pelo estudante está incorreto. Soluciona parcialmente o modelo, pois o resultado está incorreto.	2
Interpretar a solução	Extrai parcialmente o resultado, faltando considerar o intervalo. Não responde corretamente o objetivo. De acordo com a interpretação do aluno: "*O limite é 80 e está tendendo por valores negativos"*, o que não está correto. *"E o limite do denominador está tendendo a zero por valores negativos"*. Continuando ainda *"o custo percentual de remoção do lixo tóxico, próximo dos 100%, está indo pra mais infinito e não está definido"*. A resposta está incorreta porque o limite neste caso é 80%.	**2**

Estudante E_3: Resultado das Características das Ações no problema resolvido

Categoria	Análises da Atividade-08	D-Quanti
Compreender o problema	O aluno faz a leitura das funções do problema, descreve os elementos. Determina as condições ao descrever o modelo algébrico e geométrico para a resolução do problema. Define o objetivo de cada função destaca a maneira de solução.	5
Construir o modelo matemático	Determina as variáveis das funções x e $P(x)$. Nomeia as variáveis e atribui corretamente os valores na tabela. Constrói o modelo algébrico (tabelas) e geométrico (gráfico). Faz análises das unidades e relaciona com a forma de resolução do problema.	5

Solucionar o modelo matemático	Utiliza o método de resolução da função limite. Soluciona o modelo atribuindo valores a variável x para encontrar as coordenadas: a) $(-2, 1{,}39), (-1, 1{,}09), (0, 0{,}69), (1{,}0), (3{,}0)$; b) $(-2, 0{,}33), (-1, -0{,}5), (0, -1), (2{,}1), (3, 0{,}5)$; c) $(-1, 1/2), (-2, (1/2)\text{^}2), (3, (1/3)\text{^}2)$; d)$(-2, 2), (-3, 1{,}5), (0{,}0), (2, 0{,}11), (3, 0{,}2)$. Posteriormente constrói os gráficos de cada uma das funções.	5
Interpretar a solução	**Interpretar a Solução:** Extrai os elementos significativos relacionados com o problema. Responde através do modelo algébrico e demonstração geométrica todas as funções limite. Ao final o aluno faz uma breve descrição sobre a interpretação dos resultados: *a) a função é descontínua e não está definida no ponto a=2, pois não existe ln de 0; b) a função é descontínua e não está definida no 1º caso, no segundo caso ela está definida no ponto, apesar de se tratar de F(x) =2; c) Na primeira função será descontínua no ponto a = 0, pois está definido qualquer número elevado a zero é igual a 1. No segundo caso está definido e não há descontinuidade*.  	5

Estudante E_3: Resultado das Características das Ações no problema resolvido

Categoria	Analises da Atividade-09	D-Quanti
Compreender o problema	Extrai parcialmente, pois não considera o intervalo dado. Como também determina parcialmente as condições e o objetivo, pois não fez todas as relações.	2
Construir o modelo matemático	Determina parcialmente as variáveis, pois desconsidera os valores do intervalo dado no problema. Constrói o modelo de maneira insuficiente para resolver o problema, tornando-se inviável realizar análise, no entanto, fez mas está incorreta.	2
Solucionar o modelo matemático	Encontra parcialmente o método, pois não avalia o intervalo a ser usado. Logo, soluciona o modelo incorretamente.	2
Interpretar a solução	Não extrai todos os resultados significativos e relativos ao problema. A reposta dada está incorreta. O estudante descreve que *"o limite da função quando x tende a 100 pela esquerda, os limites laterais serão diferente",* ou seja, a resposta descrita está incorreta.	1

Estudante E_4: Resultado das Características das Ações no problema resolvido-**Atividade-08 -** Faltou na aplicação
Estudante E_4: Resultado das Características das Ações no problema resolvido-**Atividade-09 -** Faltou na aplicação

Estudante E_5: Resultado das Características das Ações no problema resolvido

Categoria	Analises da Atividade-08	D-Quanti
Compreender o problema	Extrai os elementos das funções. Determina parcialmente. Define parcialmente os objetivos das questões, calculando corretamente o limite e duas funções, sendo que outras duas os resultados estão incompletos.	3
Construir o modelo matemático	Determina as variáveis de todas as funções dadas. Nomeia e constrói os modelos parcialmente corretos, pois faltou mais atenção na exploração dos valores próximo dos pontos das descontinuidades.	3
Solucionar o modelo matemático	Encontra o método correto para calculara duas funções, porém para resolver as outras duas os modelos estavam incorretos. Portanto, solucionou parcialmente os modelos de forma algébrica (tabelas) e geométrica (gráficos).	3
Interpretar a solução	Extraiu parcialmente os resultados do problema, porque responde corretamente duas funções de quatro. Sendo que as demais ele resolve incorretamente e não consegue explicar, devido não ter compreendido completamente o problema. As descrições do aluno sobre cada uma das funções: a) há uma descontinuidade	3

	por não haver uma imagem para x-2; c) a solução é descontínua no ponto a=1, porque não está definida neste ponto, ou seja, não existe imagem esse número; questões b) e d) o aluno não respondeu.	

Estudante $E_{5:}$ Resultado das Características das Ações no problema resolvido

Categoria	**Analises da Atividade-09**	**D-Quanti**
Compreender o problema	Faz a leitura, mas extrai parcialmente os elementos. Determina também parcialmente as condições, não faz relação com os valores do intervalo. Define parcialmente o objetivo, pois não considera todos os elementos para resolver o problema.	2
Construir o modelo matemático	Determina parcialmente as variáveis, pois desconsidera o intervalo dado. Nomeia as variáveis, mas não relaciona com o intervalo estipulado no problema. O aluno constrói parcialmente o modelo, apesar de organizar os dados em forma de tabela, o aluno não atribui corretamente as variáveis, o que é fundamental observar para resolver o problema no intervalo dado.	2
Solucionar o modelo matemático	Encontra o método de aplicação algébrica composta em tabela e faz uma tentativa de esboçar o gráfico. Soluciona incompletamente o modelo, pois, atribui variáveis incorretas para encontrar o resultado.	2
Interpretar a solução	Os elementos extraídos são insuficientes para atender o objetivo do problema. A resposta dada pelo estudante é incompleta. Não elaborou a justificativa de interpretação.	1